









Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1909

München 1910
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München

Inhaltsübersicht.

I. Sitzungsberichte.

II. Abhandlungen.

Sitzungsberichte

der mathematisch-physikalischen Klasse
der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
1909.

Sitzung am 9. Januar.

1. Herr v. LINDE legt eine Mitteilung des Herrn VOGEL vor und berichtet über die darin behandelten Untersuchungen, welche im Laboratorium für technische Physik hier unternommen worden sind, um die Temperaturveränderungen zu ermitteln, welche beim Strömen von Gasen durch Drosselstellen unter Entspannung von höherem zu niedrigerem Drucke auftreten. Die gegenwärtige erste Mitteilung umfaßt die Ergebnisse einer Untersuchungsreihe mit atmosphärischer Luft bei Zimmertemperatur und bei konstanter Druckdifferenz von sechs Atmosphären unter steigenden absoluten Drücken bis zu 150 Atmosphären. Hiernach nimmt die Abkühlung der durchströmenden Luft mit zunehmendem Drucke in linearer Weise so ab, daß sie bei Extrapolation bis zu 300 Atmosphären Null wird. Die Versuche, deren Ergebnisse für die Physik der Gase und für die technische Thermodynamik von hohem Werte sind, sollen unter höheren und tieferen Temperaturen und mit anderen Gasen fortgesetzt werden.

2. Herr Dr. K. A. HOFMANN berichtete

Über das Spektrum von Neo-Erbiumoxyd.

Wie in den Berichten[1]) der deutschen chemischen Gesellschaft mitgeteilt wurde, ist es dem Verfasser gelungen, das

---

[1]) 41. 308 und 3783 (1908).

Oxyd von Neo-Erbium in bisher nicht erreichter Reinheit zu gewinnen. Das Atomgewicht ist für dreiwertiges Erbium = 167.43, während bisher 166.25 als richtig galt.

An diesem reinsten Material konnte die merkwürdigste Eigenschaft dieses Elementes, nämlich die auswählende Lichtabsorption und Emission seiner Verbindungen[1]) frei von störenden Nebenerscheinungen untersucht werden.

Dabei ergab sich zunächst, daß eine Reihe von Absorptionsstreifen der Nitratlösung, die man früher dem Erbium zugeschrieben hatte, nicht diesem, sondern schwer zu entfernenden Beimengungen zukommen. Sicher gehören dem Neo-Erbium an die Streifen 667^4, 654^2, 541^4, 523^1, 492^4, 487^1, 450^2 und 442^3, wobei die Exponenten die von 1 bis 4 sinkende Intensität ausdrücken.

Weit charakteristischer als die Spektra der gelösten Salze, deren Streifen in 10 %iger Lösung meist eine Breite von 0.5 —2 m μ besitzen, ist das Reflexspektrum des geglühten Oxyds bei gewöhnlicher Temperatur, dessen Linien die Schärfe der Gasspektra erreichen und die trotz ihrer großen Anzahl sehr regelmäßige Gruppierung um bestimmte Maxima zeigen. In Gemischen mit anderen Oxyden verschwinden diese Linien nur teilweise, der Rest behält dieselbe Lage wie im reinen Oxyd bei und kann zur Erkennung von Erbiumoxyd in Gegenwart anderer Erden dienen.

Um ein scharfes, starkes Reflexspektrum des Oxyds zu erhalten, bringt man das rosafarbene Erbiumoxyd als feines amorphes Pulver in den Hohlraum zwischen zwei ineinander gesteckten Probierröhrchen und läßt das mit einer Quarzlinse konzentrierte Licht einer Bogenlampe oder eines Auerbrenners darauf fallen.

Die dunklen Linien sind nicht gleichmäßig über das ganze sichtbare Spektrum verteilt, sondern erscheinen in Gruppen angeordnet, innerhalb deren ziemlich gleichmäßige Abstände der einzelnen Linien auffallen.

---

[1]) cf. Anderson: Absorptions- und Emissionsspektra of Neodym and Erbium compounds. Astrophysical Journal, vol. 26, p. 73, 1907.

Gruppen im Rot. [1]

683.9	680.1	676.0	672.5	668.4	664.5	**661.7**	Hauptlinie
3.8	4.1	3.5	4.1	3.6	3.1		Differenz
			658.4	656.0	654.2	**652.5**	Hauptlinie
			2.4	1.8	1.7		Differenz
				652.2	650.1	**648.1**	Hauptlinie
				2.1	2.0		Differenz

Gruppe im Gelb.

563.8 Hauptlinie 561.6 559.5? 556.3 554.3

Gruppen im Grün.

540.3 Hauptlinie 538.9 537.3 535.6 534.2 532.8
529.8 528.2 526.8 525.6 523.8 **522.4** Hauptlinie
527.5 524.5 520.6 **519.8** Hauptlinie

Auch im blauen und im violetten Spektralgebiet sind Liniengruppen vorhanden, die aber nicht gemessen werden. Kühlt man das Oxyd mit flüssiger Luft, so nehmen die Linien an Schärfe noch zu, wie dies nach den Untersuchungen, die Jean Becquerl[2]) und Du Bois an Kristallen von verschiedenen Mineralien ausgeführt haben, zu erwarten stand. Der Lage nach bleiben die Linien unverändert, doch zeigen sich bei der tiefen Temperatur insoferne auffallende Unterschiede, als die Gruppe im Gelb verschwindet, wiewohl in ihr 563.8 und 554.3 bei + 15° beträchtliche Intensität zeigen. Aus dem grünen Teil verschwinden 535.6, 534.2, 532.8.

Dafür treten neu hervor bei der Temperatur der flüssigen Luft 643.3, 541.7, 541.0, 522.8, 521.9, 521.2. Bringt man das Oxyd in einem Spiritus- oder Bunsenbrenner zum Glühen, dann treten entsprechend dem Kirchhoffschen Satz umgekehrt helle Emissionszentra an Stelle der Hauptabsorptionen, wodurch das Spektrum diskontinuierlich erscheint. Eine ähnliche

[1]) Die abschließend genauen Messungen werden später folgen.
[2]) cf. Compt. rend. **146**. 625.

Beobachtung an dem glühenden Erbiumoxyd haben schon Bahr[1]) und Bunsen gemacht, doch verglichen sie dessen Lichtaussendung mit der Absorption des gelösten Nitrates, so daß sie keine Übereinstimmung erhalten konnten. Auch war das Material dieser Forscher noch so stark mit anderen Erden gemengt, daß sich auch im Hinblick auf neuere Beobachtungen an Neodymoxyd die Ansicht geltend machte, für die selektive diskontinuierliche Strahlung sei in jedem Fall die Anwesenheit von Gemischen gefärbter Erden mit den farblosen Oxyden erforderlich.

Für das hier untersuchte Erbiumoxyd trifft dies keinesfalls zu; es muß vielmehr anerkannt werden, daß auch ein einheitlicher fester Körper selektive Strahlung zeigen kann. Eine Verflüchtigung des Oxyds findet dabei nicht statt, wie besondere Versuche im elektrischen Widerstandsofen ergaben und wie auch daraus folgt, daß die heizende Flamme oberhalb des glühenden Oxyds keine andere Strahlung hat als unterhalb desselben.

Aus diesen Resultaten folgt der Schluß, daß auch in einem festen Körper sich ähnliche Bedingungen der Bewegungsfreiheit für die Licht absorbierenden und Licht emittierenden Elektronen finden können wie in einem verdünnten Gas.

Da auch Anton Wägner[2]) an einem Neodymoxyd bestimmter Bereitungsweise ein schönes Reflexspektrum mit drei äußerst scharfen Linien gefunden hat, dürfte dieser Schluß in Zukunft allgemeinere Bedeutung erlangen.

3. Herr A. Sommerfeld legt einen Auszug aus einer Arbeit vor:

Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie.

Im Mittelpunkte der Untersuchung steht die Frage, ob die Wellen der drahtlosen Telegraphie Raumwellen (vom Charakter der Hertzschen Ätherwellen) oder Oberflächenwellen (vom Charakter der Drahtwellen) sind bzw. welchen Anteil die eine oder andere Wellenform an den telegraphischen Wirkungen hat.

[1]) Annalen der Chemie 137. 1.

[2]) Zeitschr. anorg. Chem. 42. 123.

4. Herr Pringsheim legt eine Abhandlung von Fr. Hartogs vor:

Über die elementare Herleitung des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes.

Der von Weierstraß unter der obigen Bezeichnung aufgestellte und bewiesene Satz gibt bekanntlich Auskunft über die Nullstellen einer Potenzreihe von beliebig vielen Veränderlichen in der Umgebung der durch das Nullsetzen sämtlicher Veränderlichen definierten Stelle. Da dieser Satz eine der wichtigsten Grundlagen für die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlicher bildet, so muß bei der relativen Umständlichkeit und Schwierigkeit des von Weierstraß gegebenen Beweises eine Vereinfachung des letzteren äußerst wünschenswert erscheinen. Dem Verfasser ist die Herleitung eines überaus einfachen Beweises gelungen auf Grund der Darstellung einer in einem gewissen Gebiete regulären und nicht verschwindenden Funktion mehrerer Veränderlicher durch einen Exponential-Ausdruck. Zugleich gibt er für den beim Beweise benützten Laurentschen Satz für Funktionen beliebig vieler Veränderlicher einen gleichfalls neuen und elementaren, auf dem Laurentschen Satze für Funktionen einer Veränderlichen beruhenden Beweis.

Sitzung am 6. Februar.

1. Herr J. Ranke berichtet über seine Untersuchungen der mit der Gaffronschen Sammlung peruanischer Altertümer vom Staate erworbenen und nun in der anthropologisch-prähistorischen Sammlung aufgestellten Kollektion von 37 altperuanischen Schädeln aus den Fundplätzen von Arcon und Pachacamác. Die Staatssammlung besitzt nun, eingerechnet die 1898 von I. K. H. Prinzessin Therese persönlich gesammelten 34 Schädel, von denselben beiden Fundplätzen 71 deformierte Schädel, zu welchen noch Mumien von Erwachsenen und Kindern und eine Anzahl mumifizierter Köpfe kommen.

Die Resultate der Untersuchung der neuen Serie bestätigen die älteren 1890 veröffentlichten vollkommen. Die „künstliche Deformation“ der altperuanischen Schädel von Ancon und Pachacamác ist keine im strengeren Sinne „absichtliche“. sie erklärt sich wie die zwar im allgemeinen schwächeren, im Prinzipe aber vollkommen identischen „künstlichen Deformationen“ europäischer Schädel, z. B. deren Hinterkopf-Abplattung und Sattelkopfbildung, aus der Art und Dauer der Lagerung der Neugeborenen auf mehr oder weniger fester Unterlage und aus der Einbindung der noch leicht formbaren Köpfchen in verschieden gebundene Kinderhäubchen.

(Die Abhandlung soll in den „Abhandlungen der K. B. Akademie der Wissenschaften“ erscheinen).

2. H. Ebert macht einen Zusatz zu seiner in der Dezembersitzung vorgelegten Mitteilung über die Beschaffenheit der dunklen Mondmareflächen. Er war zu dem Schlusse gelangt, daß man viele sonst sehr rätselhafte Eigentümlichkeiten, welche diese Flächen bei verschiedenen Beleuchtungen durch die Sonne darbieten, verhältnismäßig einfach erklären könne, wenn man annimmt, daß die Flächen aus einem rasch und daher glasartig erstarrten Schmelzflusse bestehen, der eine wenn auch nur oberflächliche Durchscheinbarkeit, Pelluzidät, aufweist. Herr von Groth hatte im Anschlusse daran darauf hingewiesen, daß es in der Tat flaschenglasartige Schmelzflüsse gibt, deren meteorischen Ursprung mit Sicherheit nachzuweisen in neuester Zeit gelungen ist, und es war daher von Interesse, auch für diese die optischen Eigenschaften zu studieren, was seither noch nicht geschehen war. Herr von Groth hatte für diesen Zweck ein Stück meteorischen Glases, eines sogenannten Moldavites, zur Verfügung gestellt. Über die Ergebnisse dieser Untersuchungen wurde kurz berichtet und dieselben namentlich mit denen an künstlichen Glasflüssen, irdischen natürlichen Gläsern und jenen Daten in Parallele gestellt, welche man in dieser Beziehung über die Mondoberfläche seither erhalten hat.

3. Herr A. Voss sprach:

Über Paare von Kurven im Raume.

Zwei Kurven im Raum, welche durch gemeinsame Normalen von konstanter Länge aufeinander bezogen sind, kann man als ein Paar bezeichnen. Ein einfacher Fall eines solchen Paares sind die vielfach untersuchten Bertraudschen Kurven. Die allgemeine Untersuchung führt zu vielen, wie es scheint, neuen Resultaten, von denen hier nur eins angeführt werden möge, das wegen seiner kinematischen Beziehungen von Interesse scheint. Sollen zwei kongruente mit entsprechenden Punkten aufeinander bezogene Kurven ein Paar bilden, so sind sie (abgesehen von einem trivialen Falle) entweder gemeine Schraubenlinien oder willkürliche Kurven auf einem Kreiszylinder. Im letzteren Falle erhält man als einziges Paar ebener Kurven zwei Ellipsen, die eine Achse gemeinsam haben.

4. Herr A. Pringsheim legt vor:

Edmund Landau: Bemerkung zu meinem Aufsatze: Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen.[1])

Bekanntlich hat jede der drei Reihenformen:

1) Dirichletsche Reihen,

2) Fakultätenreihen,

3) Binomialkoeffizientenreihen,

wenn deren Variable mit x bezeichnet wird, nachstehende zwei Eigenschaften:

I) Das Konvergenzgebiet ist im folgenden Sinne eine Halbebene. Es gibt eine reelle Zahl a derart, daß die Reihe für $\Re(x) < a$ divergiert, für $\Re(x) > a$ konvergiert. Hierbei sind auch die extremen Fälle $a = -\infty$ und $a = +\infty$ möglich; ferner ist bei der Reihenform 2) von den Punkten $0, -1, -2, \ldots$ (in welchen Glieder den Nenner 0 haben) abzusehen, und bei der Reihenform 3) sind die Punkte $1, 2, 3, \ldots$, so-

[1]) Bd. 36 (1906) dieser Berichte, S. 151—218.

weit sie nicht innerhalb der Konvergenzhalbebene liegen, den Konvergenzpunkten zuzuzählen.

II) Die Reihe konvergiert gleichmäßig in einer gewissen Umgebung jedes Punktes im Inneren der Konvergenzhalbebene; sie stellt also in der Konvergenzhalbebene eine analytische Funktion dar.

Historische Angaben über diese 3×2 höchst einfach beweisbaren Sätze stehen in meiner oben zitierten Arbeit. Dort gab ich auch nach der für 1) I) (Jensen) und 1) II) (Cahen) klassischen Methode einen Beweis für 2) I) (was Herr Jensen 1881 in Gestalt einer Übungsaufgabe verlangt hatte, deren Lösung aber Herrn Nielsen in mehreren Arbeiten nicht gelungen war), sowie einen Beweis für 2) II), ferner neue Beweise für 3) I) und 3) II) unter ausdrücklichem Hinweis darauf, daß richtige Beweise für 3) I) und 3) II) schon bei Herrn Bendixson standen. Dieser Hinweis steht bei mir auf Seite 154 und 194, und in der Fußnote [2]) zu Seite 154 betone ich sogar besonders in Bezug auf 3) I): „Herr Nielsen schreibt mir in einer nachträglichen Note auf S. 325 seines Buches irrtümlich diesen Satz zu.“

Die vorliegende Erklärung ist durch Herrn Nielsens kürzlich erschienene Arbeit veranlaßt: „Sur la convergence uniforme d'une classe de séries infinies“ im Band 15 der Serie 3 der Annali di Matematica pura ed applicata (1908, Seite 275—282). In dieser Arbeit wirft Herr Nielsen die obigen historischen Daten nochmals durcheinander, indem er bei 3) I) immer noch mich und nicht Herrn Bendixson zitiert und bei 1) II), 2) II), 3) II) (den drei Sätzen über gleichmäßige Konvergenz) niemand (statt Cahen, Landau, Bendixson) zitiert, so daß der Leser hieraus und aus anderen Stellen der Arbeit (z. B. dreimal: „la démonstration de l'uniformité de la convergence semble être nouvelle“) den falschen Eindruck gewinnen muß, diese Sätze seien zum ersten Male in der vorliegenden Nielsenschen Arbeit bewiesen.

Aber auch der von Herrn Nielsen gegebene Beweis jener drei Sätze ist nicht als neu anzusehen. Er folgert nämlich

diese Sätze aus einem angeblichen allgemeinen und neuen Reihensatz, welcher eine ganz unwesentliche Abänderung des Cahenschen Reihensatzes (der unter gewissen Voraussetzungen die gleichmäßige Konvergenz einer Reihe besagt) darstellt; aus dem Cahenschen Reihensatze hatte dieser selbst 1) II), ich 2) II) und 3) II) gefolgert.

Jener unwesentlich abgeänderte Satz, den Herr Nielsen durch die bei solchen Betrachtungen übliche Methode der partiellen Summation zu beweisen sucht, lautet:

Désignons par

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x)\ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

une suite illimitée des fonctions, telle que $f_0(x)$ est finie et déterminée, tandis que la série à termes positifs $\Sigma|f_n(x)-f_{n+1}(x)|$ est uniformément convergente, quand la variable x parcourt un ensemble infini quelconque K; supposons ensuite convergente la série Σa_n, la nouvelle série infinie $\Sigma a_n f_n(x)$ est uniformément convergente dans l'ensemble K.

Übrigens ist der Satz falsch, wie folgendes Beispiel zeigt: K sei die Menge $0 < x \leqq 1$; es sei ferner $a_n = \frac{1}{2^n}$, $f_0(x) = 0$ und $f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2^n}$ für $n > 1$.

Beim Beweise liegt der Fehler auf Seite 276, Zeile 16—17. Natürlich wird der Satz richtig, wenn z. B. außerdem vorausgesetzt wird, daß $f_n(x)$ für alle x in K und für alle n (oder auch nur bei jedem festen n für alle x in K) unterhalb einer festen Schranke liegt.

Aber es ist ganz gleichgültig, ob man mit diesem berichtigten Satz oder dem ursprünglichen Cahenschen Satz oder einem anderen aus der Identität

$$\sum_{n=u}^{v}(A_n-A_{n-1})f_n(x)=\sum_{n=u}^{v}A_n(f_n(x)-f_{n+1}(x))-A_{u-1}f_u(x)+A_v f_{v+1}(x)$$

fließenden Satz die Beweise führt. Es ist ganz offenbar, daß Herr Nielsen bei der Abfassung der vorliegenden Arbeit ver-

gessen hatte, daß im wesentlichen dasselbe bei mir und den von mir zitierten Autoren schon stand; aus diesen Quellen hatte er ja schließlich die Sache gelernt, die an sich sehr einfach ist, die er jedoch in seinen früheren Arbeiten nicht erkannt hatte.

Ich füge noch hinzu, daß Herr Nielsen in seinem kürzlich erschienenen „Lehrbuch der unendlichen Reihen“ (Verlag von Teubner, 1909, Schlußkapitel 22) ungefähr dieselben vermeintlich neuen, in Wirklichkeit (ganz abgesehen von dem zu berichtigenden Wortlaut des allgemeinen Satzes) nicht als neu anzusehenden Entwicklungen publiziert hat und ihnen sogar im Vorwort die Empfehlung vorangeschickt hat: „Als mir eigentümlich darf ich vielleicht z. B. . . . . die Entwicklungen des letzten Kapitels hervorheben. Durch diese letzten Entwicklungen ist in der Tat, soviel ich verstehe, die erste Grundlage einer wirklich elementaren Theorie der Dirichletschen Reihen, der Fakultäten- und der Binomialkoeffizientenreihen gegeben worden, indem die Bestimmung des Konvergenzbereiches dieser Reihen unmittelbar lehrt, daß die betreffenden Reihen in diesem Bereiche stets gleichmäßig konvergieren.“

Sitzung am 6. März.

1. Herr S. Günther legt für die Sitzungsberichte eine Abhandlung vor:

Zur Morphologie der Wackelsteine.

Seit den Untersuchungen der englischen Gelehrten über den „Rocking Stone“ von Cornwall und Ch. Darwins über die „Steinströme“ der Falkland-Inseln hat man sich, aber immer nur gelegentlich, mit derartigen Vorkommnissen beschäftigt. Es werden die in der Literatur verzeichneten Fälle näher besprochen, um zu zeigen, daß einzelne Wackelsteine als Residuen von Blockmeeren, andere als Ergebnis der äolischen Erosion anzusehen sind.

2. Herr Walther von Dyck legte eine Abhandlung vor:

Über die singulären Stellen eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung.

Die Abhandlung bezieht sich auf die Analysis situs der durch ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung definierten Kurvensysteme. Sie knüpft an frühere Arbeiten des Verfassers an, sowie an Untersuchungen von Poincaré und von Bendixon. Die Heranziehung analytischer Methoden, die auf Kronecker zurückgehen, ermöglicht die Weiterführung der geometrischen Probleme im Gebiete von n Variabeln. Für die Diskussion kommen Sätze über die Lagenverhältnisse der Brennpunkte von Strahlensystemen in Betracht.

3. Herr A. Rothpletz sprach über die in den Solnhofener Plattenkalken eingeschlossenen Ammoniten, von denen die größeren Gehäuse nicht selten dicht neben der Wohnkammer einen Eindruck ihrer Ventralseite in dem Kalkschlamm zurückgelassen haben. Die Erklärung dieser Erscheinung ist darin zu finden, daß die in seichtem Wasser freischwimmenden Tiere bei sinkendem Meeresspiegel auf den Boden aufstießen und sich mit ihrer Ventralseite in denselben eindrückten. Dann fielen sie um und blieben auf dem Schlammboden liegen, weil zum Schwimmen nicht mehr Wasser genug vorhanden war. Solche Ammoniten, die auf der Ventralseite große Stacheln tragen, haben sich beim Aufstoßen häufig so fest in den Schlamm eingebohrt, daß sie nachher sich nicht mehr rühren konnten. Sie blieben stecken und der obere freie Teil ihres Gehäuses brach später ab, so daß nur ihre Wohnkammer, oft noch mit dem darin befindlichen Deckel (Aptychus), aber nicht liegend sondern aufrechtstehend im Gestein erhalten blieb. Diese Erhaltungsweisen gewähren uns interessante Einblicke in die physikalischen Verhältnisse, unter denen die Lithographensteine am Ende der Jurazeit zum Absatz gelangt sind.

Öffentliche Sitzung

zur Feier des 150. Stiftungstages

am 10. März 1909.

Zur Feier des 150. Stiftungstages der Kgl. Akademie der Wissenschaften hielt der Präsident Herr K. Th. von Heigel die Festrede:

Die Münchener Akademie von 1759 bis 1909.

Dieselbe wird unter den Festreden der Akademie sowie im Almanach für 1909 im Drucke erscheinen.

Von Unterstützungen wissenschaftlicher Unternehmungen durch die Kgl. Akademie der Wissenschaften sind folgende bekannt zu geben:

Aus den Zinsen der **Savigny-Stiftung**, deren Verfügung im Jahre 1909 der Kgl. Bayer. Akademie der Wissenschaften zusteht, wurden genehmigt:

1. für den Honorarfonds der Zeitschrift der Savigny-Stiftung für Rechtsgeschichte 600 M.;

2. an den Privatdozenten und K. Hofpriester Dr. Alb. Mich. Koeniger in München für die von ihm unternommene Ausgabe von Quellen zur Geschichte der Sendgerichte in Deutschland 1500 M.;

3. an die Kommission für das Wörterbuch der älteren deutschen Rechtssprache 2900 M.

Aus dem Thereianos-Fonds bewilligte die philosophisch-philologische Klasse zwei Preise von je 800 Mark dem Professor der alten Geschichte in Würzburg Julius Kaerst für seine „Geschichte des hellenistischen Zeitalters“ und an Professor Nikolaos Politis in Athen für seine Sammlung der volksmäßigen Überlieferungen Neugriechenlands.

Außerdem erhielten

1. Dr. Paul Maas in München zur Fortsetzung seiner Studien über die griechische Kirchenpoesie des 6.—8. Jahrhunderts 300 M.;

2. Professor Hermann Thiersch in Freiburg i. Br. zum Zweck der Untersuchung der Fundamente des Pharos von Alexandria 2000 M.;

3. Dr. Nikolaos Veis in Athen für die Fortsetzung seiner Arbeiten in den Meteorklöstern 300 M.;

4. Professor Karl Reichhold in München zur Unterstützung des Werkes „Griechische Vasenmalerei“ 700 M.;

5. Professor Karl Krumbacher in München zur Unterstützung der Byzantinischen Zeitschrift 1500 M.

Aus der Wilhelm Koenigs-Stiftung für botanische und zoologische Forschungen und Reisen wurden bewilligt:

an Dr. Philipp Freiherrn von Lützelburg in München zu einer botanischen Reise nach Brasilien 3000 M.;

an Lorenz Müller in München für eine Reise zu biologischen Zwecken nach Zentralamerika 4000 M.

Aus der Koenigs-Stiftung zum Adolf von Baeyer-Jubiläum:

Professor Otto Dimroth in München zur Fortsetzung einer Untersuchung der Carminsäure 500 M.;

Dr. Heinrich Wieland in München zu Arbeiten auf dem Gebiete der Knallsäure 400 M.

Aus der **Münchener Bürger- und Cramer-Klett-Stiftung:**

1. an Professor Ernst Freiherrn Stromer von Reichenbach für geologisch-paläontologische Forschungen in Süd-Ägypten 4000 M.;

2. an Studiosus Paul Buchner in München für Untersuchungen an Chaetognathen an der Mittelmeerküste 1500 M.;

3. an Professor Theodor Boveri in Würzburg zu Regenerationsversuchen an Säugetiergeweben 500 M.;

4. an Professor Richard Fuchs in Erlangen zu Untersuchungen der Einwirkung der Luft auf hohen Bergen 557 M.;

5. an Lehrer Philipp Fauth in Landstuhl als Unterstützung bei seiner wissenschaftlichen Tätigkeit 400 M.;

6. an Lorenz Müller in München zu tiergeographischen und biologischen Arbeiten in Zentralamerika 100 M.;

7. an Dr. Philipp Freiherrn von Lützelburg in München zu anatomischen, biologischen und morphologischen Forschungen über die Pflanzengattung Utricularia 1100 M.

Der **Zographos-Preis** im Betrage von 1500 M. für die im Jahre 1906 zur Bewerbung ausgeschriebene Preisaufgabe

Technik und Geschichte des byzantinischen Urkundenwesens

wurde Dr. Paul Marc in München zuerkannt.

Als neue Preisaufgabe für den Zographos-Fonds mit dem Termin 31. Dezember 1912 stellt die Akademie:

Die Topographie von Thessalien.

Beschränkung auf ein größeres Teilgebiet ist gestattet.

Die mathematisch-physikalische Klasse hat im letzten Jahre drei Mitglieder durch den Tod verloren.

Am 13. Februar 1908 starb in San Remo Sir George King, K. C. I. E., F. R. S. etc.

1. George King gehörte zu den englischen Militärärzten, welchen wir einen großen Teil unserer Kenntnis der indischen Flora verdanken. Er wurde am 12. April 1840 in Peterhead (Schottland) geboren und studierte in Aberdeen. 1865 trat er in den militärärztlichen Dienst in Bengalen ein, beschäftigte sich aber neben seiner medizinischen Tätigkeit schon frühzeitig mit botanischen Studien. Diese wurden zu seinem Lebensberuf, als er 1871 zum Direktor des berühmten botanischen Gartens in Sibpuhr bei Calcutta ernannt wurde. Als solcher wirkte er mit großem Erfolg, einerseits in praktischer Beziehung (er war u. a. auch Oberleiter der Chinaplantagen und der botanischen Erforschung Indiens), andererseits in rein wissenschaftlicher. Er begründete die „Annals of the royal botanical garden Calcutta“ und veröffentlichte darin eine Anzahl ausgezeichneter systematischer Arbeiten, welche die Kenntnis der indischen und indo-malayischen Flora sehr gefördert haben. Der Flora Hinterindiens widmete er ein besonderes grundlegendes Werk „Materials for a flora of the Malayan peninsula“, das er im Jahre 1907 zum Abschluß brachte. Er nahm nicht nur unter den Vertretern der systematischen Botanik einen Ehrenplatz ein, sondern er hat auch in praktischer Beziehung außerordentlich große Verdienste, nicht nur dadurch, daß er es ermöglichte, daß die indische Regierung selbst dem ärmsten Teil der Bevölkerung Chinin zur Verfügung stellen konnte, sondern auch dadurch, daß er die Kenntnis der reichen Baumflora Indiens ungemein bereicherte. Alle seine Arbeiten sind Muster von Genauigkeit, Klarheit und Vollständigkeit.

2. Adolf Wüllner wurde am 13. Juni 1835 in Düsseldorf geboren. Im Jahr 1856 promovierte er unter P. Jolly in München. 1858 wurde er Privatdozent in Marburg, 1863 Direktor der provinzialen Gewerbeschule in Aachen, 1865 Lehrer der Physik an der Landwirtschaftlichen Hochschule in Poppelsdorf, 1867 außerordentlicher Professor in Bonn und 1870 ordentlicher Professor an der Technischen Hochschule in Aachen. In dieser Stellung verblieb er bis zu seinem 1908 erfolgten Tode.

Wüllner hat auf fast allen Gebieten der Physik experimentell gearbeitet. Seine Veröffentlichungen haben vielfach zu lebhaften Kontroversen Veranlassung gegeben, die, wenn sie auch nicht immer zu seinen Gunsten abgeschlossen wurden, doch sehr viel zur Klarstellung interessanter Probleme beigetragen haben. Den größten bleibenden Wert dürften seine in München angefangenen und im Magnusschen Laboratorium in Berlin fortgesetzten Untersuchungen über die Spannkraft wässeriger Lösungen haben; sie führten später mit den Arbeiten von Raoult und van t'Hoff zu dem Gesetz der molekularen Dampfdruckerniedrigung und wurden von Helmholtz der Berechnung der elektromotorischen Kraft von Konzentrationselementen zu Grunde gelegt.

Einen großen Teil seiner Arbeitskraft hat Wüllner verwendet, um sein „Lehrbuch der Experimentalphysik“ zu schreiben und dasselbe über 40 Jahre hindurch in verschiedenen Auflagen mit immer neuem Stoff zu bereichern. Viele Fachgenossen und Freunde der Physik werden ihm dafür besonders dankbar sein. Gegen Ende der fünfziger Jahre war in deutscher Sprache kein größeres Lehrbuch der Physik zu haben als das veraltete, sonst aber unübertroffene und musterhafte von Fechner übersetzte Buch von Biot. Das veranlaßte J. Müller, Pouillets Lehrbuch zu übersetzen, und etwas später Wüllner den Jaminschen Cours de Physique für Deutsche zu bearbeiten. Die erste Th. Jolly gewidmete Auflage erschien 1862; mit jeder folgenden Auflage wurde die Arbeit selbständiger.

Als ein weiteres besonderes Verdienst Wüllners soll hier hervorgehoben werden, daß es ihm durch seine große Gabe,

jüngere Talente nach ihren wissenschaftlichen Werken richtig einzuschätzen, gelungen ist, der Aachener Hochschule eine Reihe von hervorragenden Physikern zuzuführen und für einige Jahre in Anfangsstellungen festzuhalten (K. W. Roentgen).

3. Oskar Emil Meyer, geboren 1834 zu Varel a. d. Jahde, gestorben 1909 zu Breslau. Er war in den fünfziger Jahren Mitglied der hervorragenden mathematisch-physikalischen Königsberger Schule; seinem Meister Franz Neumann, dessen Vorlesungen über Elastizität er später herausgab, ist auch sein Hauptwerk, die kinetische Theorie der Gase, gewidmet. Er habilitierte sich 1862 in Göttingen und übernahm 1864 die Professur in Breslau, die er bis wenige Jahre vor seinem Tode inne hatte. Unserer Akademie gehörte er seit 1879 als korrespondierendes Mitglied an.

Das Thema seiner Königsberger Dissertation, die Reibung der Flüssigkeiten betreffend, ist für seine spätere Arbeitsrichtung maßgebend geworden. Von hier aus wurde er auf die innere Reibung der Gase geführt, deren Beobachtung er durch sorgsame Korrektionsrechnungen förderte. Auch gewisse hydraulische Untersuchungen an Rohrleitungen und seine Auffassung der elastischen Nachwirkung knüpfen an die Vorgänge der inneren Reibung an.

Sein schon genanntes Hauptwerk (Breslau 1877) ordnet in anziehender und gemeinverständlicher Darstellung das gesamte vorliegende und von Meyer selbst erweiterte Erfahrungsmaterial über die Gasgesetze in die kinetische Vorstellung ein und hat zum Ausbau und zur Verbreitung dieser Lehre auch in denjenigen Kreisen der Naturforscher, denen die Maxwell-Boltzmannsche Behandlung der Gastheorie unzugänglich ist, wirkungsvoll beigetragen (A. Sommerfeld).

Sitzung am 1. Mai.

1. Herr v. Seeliger hält einen Vortrag:

Über die Anwendung der Naturgesetze auf das Universum.

Die Möglichkeit der Ausdehnung der Gültigkeit gewisser Naturgesetze auf das Universum ist nicht ohne weiteres abzulehnen, vielmehr liegt hier ein bestimmtes und wohldefinierbares Problem vor. Seine allgemeine Lösung ist eine sehr weitschichtige Aufgabe, die vom Verfasser nicht beabsichtigt wird, vielmehr behandelt er einige spezielle Fälle, denen allerdings eine besondere Wichtigkeit zukommt. Es handelt sich um die Frage, ob das Newtonsche Gravitationsgesetz ein absolut genaues und überall anwendbares Naturgesetz darstellt und darum, ob die Erscheinungen am Himmel dazu nötigen, die Zahl der leuchtenden Sterne als endlich annehmen zu müssen. Beide Fragen werden vom Verfasser in ähnlicher Weise, wie er schon vor Jahren getan hat, verneint. Ferner wird die Anwendbarkeit der beiden Hauptsätze der Wärmetheorie auf das Universum untersucht. Das Resultat ist auch hier ein negatives. So ist der vielbesprochene Clausiussche Satz, nach welchem das Universum sich unaufhaltsam einem Zustand nähert, wo alle Temperaturverschiedenheiten, alle Bewegungen etc. aufgehört haben, nicht als physikalische Konsequenz der Wärmetheorie zuzulassen. Seine Gültigkeit ist räumlich beschränkt und an gewisse Bedingungen geknüpft. Der Verfasser macht darauf aufmerksam, daß der verstorbene ausgezeichnete Würzburger Physiologe Fick schon vor 34 Jahren sehr richtige Ansichten in diesen Fragen geäußert hat. Leider sind diese den meisten Physikern unbekannt geblieben.

2. Herr Finsterwalder legt eine Abhandlung des Herrn M. Lagally vor:

Geodätische Netze auf Rotationsflächen.

Es werden jene Deformationen eines aus geodätischen Lamellen mit konstanten Maschenlängen geflochtenen Netzes untersucht, bei welchen die ursprüngliche Rotationssymmetrie aufrecht erhalten bleibt und insbesondere die Rotationsflächen bestimmt, auf die sich jene Netze auflegen lassen, welche im undeformierten Zustand von den Tangenten eines Kreises gebildet werden.

3. Herr A. Rothpletz sprach über die Einbettung der Ammoniten in den Solnhofener Schichten und führte im Anschluß an das in der letzten Sitzung darüber Mitgeteilte weiter aus, daß die Gehäuse, welche auf dem Schlammboden des Meeres zu liegen gekommen waren, sehr bald von neuem Schlamm bedeckt wurden und, weil die Kammern noch mit Luft erfüllt waren, alsbald in demselben in die Höhe stiegen. So entstand unter dem Gehäuse eine Aufbiegung und über demselben ein Wulst auf den Schichtflächen, die auch heute noch vorzüglich zu sehen sind. Das Gleiche gilt für die Fische und Sepien. Schließlich aber bekommen die dünnwandigen Gehäuse Risse, die Luft konnte entweichen und nun wurden die Wandungen zusammengepreßt, während von unten der Schlamm heraufstieg, von oben heruntersank, wobei der Wulst zwar erhalten blieb, aber um ihn herum eine ringförmige Einsenkung entstund. Die Schlammdecken selbst müssen sich verhältnismäßig rasch gebildet haben und für die im Maximum etwa 25 m mächtigen Solnhofener Schichten wird ein Zeitraum genügt haben, der nicht nach Jahrhunderten, sondern eher nur nach Jahren oder höchstens nach Jahrzehnten mißt.

Derselbe besprach und legte vor eine Arbeit über die Samoa-Inseln, von den Herren Immanuel Friedländer und Prof. Max Weber verfaßt. Der erstere hat die Inseln bereist und auf ihren geologischen Bau genau untersucht. Es sind

reine Vulkaninseln und ähnlich wie auf den Hawaischen Inseln herrschen die Dom- oder Schildvulkane vor. Prof. Weber gibt eine genaue Beschreibung der Julien, unter denen er neben dem vorherrschenden Feldspatbasalt auch Trachydolorite, Nephelinbasalt etc. nachgewiesen hat. Damit wird der Hypothese, daß die pazifische und die altantische Provinz durch chemische Verschiedenartigkeit der Lavagesteine ausgezeichnet sei, neuerdings eine Stütze geraubt.

4. Herr A. Voss legt eine Abhandlung vor von Herrn Ludwig Berwald:

Vereinfachte Herleitung unharmonischer trigonometrischer Reihen.

Die Arbeit gestaltet eine von Cauchy herrührende Beweismethode für die Entwickelung sogenannter willkürlicher Funktionen in nichtharmonische trigonometrische Reihen (d. h. in solche trigonometrischeReihen, bei denen die Parameter Wurzeln einer gegebenen transzendenten Gleichung sind) unter der Voraussetzung, daß die zu entwickelnde Funktion in dem betrachteten Intervalle eine Funktion mit beschränkter Schwankung ist, zu einem strengen Beweise aus. Aus diesem Beweise ergibt sich dann auch unschwer ein anscheinend neuer Satz über die Summe solcher nichtharmonischer trigonometrischer Reihenentwickelungen an den Grenzen ihres Gültigkeitsbereiches, zu dem schließlich noch Beispiele gegeben werden.

5. Herr Alfred Pringsheim spricht

Über den Konvergenz-Charakter eingliedrig limitär-periodischer Kettenbrüche.

Unter letzterer Bezeichnung verstehe ich die für die Funktionslehre wichtige Kategorie von Kettenbrüchen, deren Teilbrüche mit unbegrenzt wachsendem Index einem festen Grenzbruche zustreben. Man hat die Konvergenz dieser Art von Kettenbrüchen bisher auf einen allgemeineren Satz von Poincaré basiert: der von Poincaré gegebene Beweis ist

aber, ohne daß ich seine Richtigkeit anfechten will, nicht nur durch effektive Rechenfehler und unzulänglich begründete Schlußfolgerungen entstellt, sondern in der gegebenen Darstellung überhaupt kaum verständlich. Im übrigen würde der Poincarésche Satz nur ausreichen, um zu erkennen, daß jene Kettenbrüche „im allgemeinen“ konvergieren, ohne aber über das eventuelle Eintreten der Divergenz und deren besonderen Charakter präcise Aufschlüsse zu liefern. Ich gebe zunächst einen exakten, übrigens völlig elementaren Beweis des in der angedeuteten Richtung vervollständigten Kettenbruch-Satzes und werde in einer folgenden Mitteilung auf einige funktionentheoretische Anwendungen der gefundenen Resultate eingehen.

Sitzung am 12. Juni.

1. Herr K. A. Hofmann berichtete über das von ihm aufgefundene Nitrosylperchlorat. Dieses entsteht aus der konzentriert wässerigen Überchlorsäure bei der Einwirkung von rauchender Salpetersäure oder von dem als salpetrige Dämpfe bekannten Gasgemisch und ist das Anhydrid der Überchlorsäure mit der salpetrigen Säure von der Formel $ClO_4 \cdot NO$.

Obwohl dieses farblose Kristallpulver im trockenen Zustand sehr beständig ist und erst bei 108° ruhig zerfällt. wirkt es doch auf viele Kohlenstoffverbindungen. wie z. B. Alkohole und Äther mit explosiver Heftigkeit ein. Namentlich Anilin und die ihm verwandten Toluidine werden augenblicklich entzündet, wenn sie mit Nitrosylperchlorat in Berührung kommen. Es wird Sache der Technik sein, diesen für sich allein ganz ungefährlichen Stoff zu Initialzündungen zu verwerten.

2. Herr L. Burmester sprach über:

Dioptrische Erscheinungen bei einäugigem Sehen und beschränktem Sehfeld.

Es wird eine von alters her bekannte, aber noch nicht wissenschaftlich messend beobachtete Erscheinung sein, daß

bei einäugigem Sehen eines Gegenstandes durch eine nahe vor dem Auge gegen die Sehrichtung bewegte Fingerspitze der Gegenstand verschoben und verändert erscheint. Ein entfernterer, fixierter Punkt flieht vor der bewegten Fingerspitze, bis er von ihr verdeckt wird. Eine gezeichnete gerade Linie oder eine gerade Kante eines Körpers erscheint vor der bewegten Fingerspitze gebogen und bewegt. Infolge einer solchen Beschränkung des Sehfeldes wird die Abbildung auf der Netzhaut des Auges verändert und dadurch werden diese dioptrischen Erscheinungen bewirkt. In exakterer Weise können diese Erscheinungen an einem Drahtquadrat durch eine Irisblende beobachtet werden. Bei fester Kopfstützung und somit bei ruhendem Drehpunkt des vor der weit geöffneten Irisblende befindlichen Auges wird vermittels Visierens das Drahtquadrat auf einen weißen Kartonschirm projiziert, und auf demselben das so bestimmte, perspektive quadratische Bild des Drahtquadrates gezeichnet. Wenn dann die Öffnung der Irisblende verengert wird, verkleinert sich dieses Bild, es erscheint innerhalb des Drahtquadrates und von diesem gleichsam umrahmt. Vermittels einer Vorrichtung kann diese Erscheinung durch Messungen näher untersucht werden.

3. Herr Sommerfeld legt vor eine Abhandlung des korrespondierenden Mitgliedes Herrn J. Lüroth-Freiburg i. Br.:

Eine Bemerkung zum Michelsonschen Versuch.

Der genannte Versuch hat eine große theoretische Bedeutung gewonnen. Daher schien es von Interesse zu berechnen, wie groß etwa die Längenänderung ist, die ein auf der Erde horizontal gelagerter Stab durch die Zentrifugalkräfte der Bewegung der Erde erfährt. Dies ist in der vorliegenden Note geschehen.

(Diese Note ist gedruckt in den Sitzungsberichten der math.-phys. Klasse, Jahrgang 1909, als 7. Abhandlung.)

Herr Lüroth sendete später folgenden Nachtrag zu seiner Note:

„Eine Bemerkung zum Michelsonschen Versuch."

In dieser Note sind zwei Fehler zu verbessern, auf die mich Herr Ingenieur G. Duffing in Mülheim a. Rh. aufmerksam gemacht hat.

Auf Seite 6 sind in den Formeln Zeile 8 v. o. und 3 v. u. die Zeichen der beiden letzten Glieder umzukehren und damit auch auf der rechten Seite der Gl. (5) die drei Minuszeichen in Plus zu verwandeln. Bei der Integration wurde die zweite Grenzbedingung vergessen: daß $\frac{\partial u}{\partial x}$ am freien Ende des Stabs beständig Null sein muß. Ein Integral, das beiden Grenzbedingungen genügt, entsteht aus dem Ausdruck für u auf Seite 8, indem man in den beiden ersten Gliedern $\frac{x^2}{2}$ und $\frac{x^3}{6}$ durch $x l - \frac{x^2}{2}$ und $\frac{x l^2}{2} - \frac{x^3}{6}$ ersetzt und in den drei letzten für die Quadrate der Sinus drei Ausdrücke einführt, die aus

$$\sin \frac{x}{2} p \sqrt{\frac{\varrho}{E}} \sin \left(l - \frac{x}{2}\right) p \sqrt{\frac{\varrho}{E}} : \cos l p \sqrt{\frac{\varrho}{E}}$$

hervorgehen durch Einsetzen von $\omega + \Omega$, $\omega - \Omega$, Ω an Stelle von p. Nimmt man $x = l$, vertauscht die Sinus der kleinen Bogen mit diesen und die Kosinus mit der Einheit, so ergibt sich $l^2 p^2 \varrho : 4 E$. Für u^* folgt dann die erste Formel in § 4, in der nur im zweiten Glied im Nenner $3 E$ statt 6ε zu setzen ist. Der numerische Wert unten auf Seite 9 ändert sich gar nicht.

J. Lüroth.

4. Herr J. Ranke teilt eine Abhandlung des Herrn Prof. Dr. Schlosser in München mit:

Die Bären- oder Tischoferhöhle im Kaisertal bei Kufstein.

Die Tischofer- oder Bärenhöhle, 80 Meter über der Sohle des Kaisertals zwischen den beiden ersten Kaiserhöfen, gelegen wurde vom Verfasser im Auftrag des Vereins für Heimatskunde zu Kufstein ausgebeutet. Vor den Höhlen in Franken und Schwaben hat sie den großen Vorzug, daß sie, weil im ehemals vergletscherten Gebiete befindlich, Aufschluß gibt über die zeitlichen Beziehungen ihrer organischen Einschlüsse zu den verschiedenen Perioden des jüngeren Pleistocän. Auch ließ sich aus gewissen Daten der jährliche Betrag der Erosion durch fließendes Wasser in enger Felsschlucht ermitteln.

Die verschiedenen in der Höhle beobachteten Schichten sind:

der interglaziale Höhlenlehm mit zahlreichen Überresten von Höhlenbär — über 200 erwachsene und ebenso viele junge Individuen — nebst solchen von Hyäne, Löwe, Wolf, Fuchs, Rentier, Edelhirsch, Gemse und Steinbock,

der glaziale Letten ohne Tierreste,

die neolithische Schicht mit Überresten von Mensch, Rind, Schwein und Schaf, mit zum Teil polierten Steinwerkzeugen, zahlreichen Tongefäßen und verkohltem Weizen,

die bronzezeitliche Schicht — Werkstätte eines Bronzegießers, der hier aus Brixlegger Erzen Bronzegeräte erzeugte — und

Steinchenschicht und Kalksinter mit zahlreichen Knochen von Weibern und Kindern sowie mit solchen von einem ziegenhörnigem Schaf und von Haushund, welche ebenfalls der älteren Bronzezeit angehören.

5. Herr Ebert legt zwei Arbeiten vor; zunächst eine von Herrn Dr. K. Kurz, welcher mit den luftelektrischen Untersuchungen betraut ist, die von unserer Akademie im Vereine mit den übrigen deutschen kartellierten Akademien vorge-

nommen werden. Die Arbeit behandelt das Vorkommen von Radium, Thorium und Aktinium in der Atmosphäre und ihre Bedeutung für die atmosphärische Elektrizität. Nach dem Vorgange von Elster und Geitel bestimmt man die aus den Emanationen der genannten Radio-Elemente hervorgehenden Zerfallsprodukte, welche sich in der Luft vorfinden und hier durch ihre Strahlungen Ionen erzeugen, in der Weise, daß man auf einem negativ geladenen Drahte diese Produkte auffängt, dann den Draht zusammenwickelt und in einem geeigneten elektrometrischen Apparate untersucht. Die Methode gab seither im wesentlichen nur qualitative Resultate. Der Genannte hat aber die Frage eingehender untersucht, wie man diese Methode so weiter entwickeln könne, daß man auch auf die absoluten Mengen der radioaktiven Substanzen pro Kubikmeter Luft schließen kann. Zu diesem Zwecke waren umfangreiche Untersuchungen über die Abhängigkeit der eingefangenen Mengen von der Zeitdauer der Exposition des Drahtes und von der Höhe seiner Ladespannung erforderlich. Ferner mußte untersucht werden, wie sich die Angaben des Meßapparates auf absolutes Maß umrechnen lassen, und wie man die Wirkung der drei gemeinsam in der Atmosphäre vorhandenen radioaktiven Elemente voneinander trennen könne. Der Verfasser kommt hierbei zu wesentlich neuen und für die Beurteilung des Elektrizitätshaushaltes der Erde wichtigen Ergebnissen.

Ferner legt Herr Ebert eine Arbeit des Herrn Kustos Dr. C. W. Lutz vor:

Eine neue Form des Aspirationsapparates.

Wenn man die Anzahl der in der Atmosphäre pro Kubikzentimeter vorhandenen freien beweglichen Ionen bestimmen will, verfährt man nach Ebert so, daß man mittels einer kleinen Luftturbine eine abgemessene Menge der zu untersuchenden Luft durch eine im Innern auf hohe Spannung geladene Zylinderanordnung hindurchsaugt und den durch die geladenen, in der Luft befindlichen Partikelchen bedingten

Spannungsrückgang mißt. Lutz fügt nun an diesen Fangapparat einen kleinen Meßkondensator mit veränderlicher Kapazität an und bestimmt die in der Luft befindliche Elektrizitätsmenge aus den Änderungen, welche man dieser Hilfskapazität erteilen muß, um die ursprüngliche Spannung im Meßapparate aufrecht zu erhalten, was mit viel größerer Genauigkeit geschehen kann, als die Messung des Spannungsrückganges selbst.

6. Herr S. Günther bespricht eine Abhandlung von Dr. Walter Behrmann in Leipzig: Zur Kritik der flächentreuen Abbildung der ganzen Erde und einer Halbkugel.

7. Herr Dyck legt vor eine Arbeit von Heinrich Burkhardt: Zur Theorie der trigonometrischen Reihen und der Entwickelungen nach Kugelfunktionen und Ultrakugelfunktionen einer Veränderlichen.

Der Verfasser gibt einen vereinfachten Beweis des Satzes von der Entwickelbarkeit einer sogenannten willkürlichen Funktion einer Variabeln in eine Reihe nach Kugelfunktionen, der sich auch auf Ultrakugelfunktionen überträgt. Dabei ergibt sich zugleich eine kleine Vereinfachung im Beweise des entsprechenden Satzes für trigonometrische Reihen.

8. Herr Rothpletz legt eine Arbeit von Dr. Paul Groeber vor über das Karbon und die Karbonfossilien des nördlichen und zentralen Tian-schan. Sie bildet einen Teil der wissenschaftlichen Ergebnisse der Merzbacherschen Tian-schan-Expedition und erörtert eingehend die Beziehungen, die zur unteren Karbonzeit zwischen Zentral-Asien und Europa bestanden.

Sitzung am 3. Juli.

1. Herr R. Hertwig sprach über Experimente, welche er in den letzten fünf Jahren über die Geschlechtsbestimmung bei Fröschen angestellt hat. Diese haben zu dem Resultat geführt, daß sowohl die Eier wie die Samenfäden auf das Geschlecht Einfluß ausüben, die ersteren einen größeren Einfluß als die letzteren. Auch wechselt der sexuelle Charakter der Eier je nach ihrer Reife, der Art, daß überreife (wahrscheinlich auch unterreife) Eier ausschließlich männliche Tiere liefern. Eine entsprechende ausgesprochene Veränderung des sexuellen Charakters ließ sich für die Überreife der Samenfäden nicht nachweisen, obwohl hierüber zahlreiche Experimente angestellt wurden. Dieser Unterschied ist wohl darauf zurückzuführen daß die Eier aus Kern und reichlichem Protoplasma bestehen und daher ein gewisses Maß zu weiteren Umbildungen besitzen, was bei Spermatozoen nicht der Fall ist. Bei den Untersuchungen hat sich ferner herausgestellt, daß zwei Typen der Geschlechtsentwicklung bei Fröschen vorhanden sind. Bei dem einen läßt sich das Geschlecht schon bei jungen Kaulquappen, bei denen die Anlagen der hinteren Extremitäten sich zu differenzieren beginnen, erkennen, bei dem anderen müssen die jungen Fröschchen viele Monate über die Metamorphose hinaus kultiviert werden.

2. Herr H. Ebert legt die Ergebnisse einer über drei Jahre sich erstreckenden in Gemeinschaft mit Herrn Dr. K. Kurz durchgeführten Untersuchung vor, bei der die aus dem Erdboden hervortretenden Elektrizitätsmengen und die aus dem Untergrunde stammenden radioaktiven Emanationen in ihrer Wirksamkeit fortlaufend registriert wurden. Ein Vergleich mit den meteorologischen Elementen, namentlich mit den Luftdruckschwankungen, deckt interessante Gesetzmäßigkeiten in dieser elektrischen „Bodenatmung“ auf.

3. Herr A. Rothpletz legt 1. eine Arbeit vor, die der Obermedizinalrat Dr. Egger über die Foraminiferen der Seewener Kreideschichten verfaßt hat und worin Gesteine aus der Umgebung von Tegernsee, Schliersee, des Grünten und von Seewen auf ihren Gehalt an Foraminiferen untersucht sind. Er beschreibt und bildet ab 48 Arten, die sich auf 15 Genera verteilen. Die häufigsten Arten sind Lagma sphaerica und ovalis Heer. Sie können aber nicht zu Lagma gehören und werden von dem Verfasser zu dem von Rhumbler neuestens beschriebenen noch lebenden Genus Abulinaria gestellt;

2. eine Arbeit des K. B. Landesgeologen Dr. Otto M. Reis über einen Insektenflügel aus dem Muschelkalk Frankens, den er als Handlirschia Gelasii nov. gen. zu Ehren des Finders Herrn Pater Gelasius Kraus, Gymnasiallehrer in Münnerstadt, beschreibt. Es ist der erste Insektenrest aus dem Muschelkalk überhaupt und er nimmt eine Zwischenstellung ein zwischen den Libellen und den großen karbonischen Protodonaten, deren Flügel bis über 60 cm lang waren. Der Flügelbau verweist auf einen Schnellflieger in einem trocknen Windklima. Eigenartige Poren nahe dem Vorderrand werden als Duftporen, wie solche bei lebenden Schmetterlingen vorkommen, gedeutet. Der Finder hat dieses Unikum in dankenswerter Weise der paläontologischen Staatssammlung überlassen.

4. Herr Röntgen legt vor eine Mitteilung des Herrn W. Wien (Würzburg). In dieser wird über weitere Versuche mit positiven Strahlen berichtet, bei denen die unter gleichen Bedingungen erzeugten Strahlen in einen Raum geleitet werden, in welchem der Gasdruck variiert werden kann. Es ergibt sich, daß die aus positiv geladenen Atomen des Wasserstoffs bestehenden Strahlen bei höherer Gasverdünnung weniger stark durch einen Magneten abgelenkt werden als bei geringerer, was sich durch die Annahme erklären läßt, daß durch die Zusammenstöße mit ruhenden Molekülen sich neutrale Atome positiv laden. Auch ist die Lichtemission der positiven Strahlen bei sonst gleichen Umständen im hohen Vakuum wesentlich

geringer als im niedrigen. Bei der Beobachtung der unter gleichen Bedingungen erzeugten Strahlen des Quecksilbers ergab sich, daß sie im hohen Vakuum zwar Licht aussenden, aber keine merkliche positive Ladung transportieren und daß auch die Lichtemission nicht magnetisch beeinflußbar ist.

Bemerkung zu meiner Abhandlung „Über die elementare Herleitung des Weierstrassschen Vorbereitungssatzes."

Erst nach Erscheinen meiner Arbeit erhielt ich durch eine freundliche Mitteilung des Herrn Stickelberger Kenntnis davon, daß er selbst ebenfalls einen abgekürzten Beweis des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes veröffentlicht hat. und zwar in seiner Abhandlung „Über einen Satz des Herrn Noether" (Math. Ann., Bd. 30). Der Umstand, daß in dem Titel dieses Aufsatzes der erste, rein funktionentheoretische Teil des Inhalts nicht besonders zum Ausdruck gekommen ist, kann wohl als Erklärung dafür gelten, daß der von Herrn Stickelberger veröffentlichte Beweis nicht nur mir, sondern, wie es scheint, auch anderen Autoren, die sich mit dem Gegenstande näher beschäftigt haben, entgangen ist; so habe ich weder in dem betreffenden Artikel der mathematischen Enzyklopädie noch an irgend einer anderen, auf den Weierstraßschen Vorbereitungssatz bezüglichen Stelle der Literatur einen Hinweis auf denselben gefunden. Der Beweis des Herrn Stickelberger stimmt mit dem in § 2 meiner Arbeit enthaltenen in dem wesentlichsten Punkte, nämlich der Aufstellung der auf pag. 9 meiner Arbeit mit (2) bezeichneten Gleichung und der hieran geknüpften Folgerungen, überein. Was jedoch die Herleitung der genannten Gleichung betrifft, so weichen die von uns dabei eingeschlagenen Wege voneinander ab, indem Herr Stickelberger sich auf gewisse Eigenschaften der gleichmäßig konvergenten Reihen von analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen stützt, während ich von einem Spezialfall des Laurentschen Satzes für Funktionen mehrerer Variablen Anwendung mache.

F. Hartogs.

Sitzung am 6. November.

1. Herr v. Seeliger legt eine für die Abhandlungen der Akademie bestimmte Arbeit: Betrachtungen über die räumliche Verteilung der Fixsterne, vor, welche eine Fortsetzung der an gleicher Stelle vor elf Jahren erschienenen Untersuchungen ist. An der Hand allgemeiner Formeln wird der Zusammenhang der scheinbaren Verteilung der Sterne mit ihrer räumlichen Anordnung festgestellt. Es ergibt sich, daß die letztere nicht bestimmt werden kann, wenn die Größe der Absorption des Sternlichts im Weltraum unbekannt ist. Wenn man aber die mittleren Entfernungen der Sterne von verschiedener Helligkeit angeben kann, dann ist das Problem lösbar, wenn auch nicht eindeutig. Bisher sind diese mittleren Entfernungen nur auf Grund von Hypothesen ermittelt worden, deren Zulässigkeit angezweifelt werden kann und eine Verstärkung dieser Zweifel tritt dadurch ein, daß ihre Darstellung die Annahme einer sehr bedeutenden Absorption erfordert, was aber zur Folge hat, daß die räumliche Sternfülle mit sehr unwahrscheinlicher Schnelligkeit anwachsen muß, wenn sich die Entfernung von unserem Sonnensystem vergrößert. Im übrigen bestätigen auch diese neuen Untersuchungen die schon früher geäußerte Ansicht des Verfassers, derzufolge die uns umgebenden Sterne ein abgeschlossenes System von endlicher Ausdehnung bilden, zu dem alles gehört, was wir am Himmel sehen.

2. Herr v. Seeliger legt eine Arbeit über Registrierungen einiger südeuropäischer Erdbeben auf der Münchener Erdbebenstation von Prof. Dr. J. B. Messerschmitt vor. Es werden die Aufzeichnungen des Wichertschen Seismographen der Erdbeben vom 23. April 1909 von Lissabon, vom 11. Juni in der Provence, vom 10. Juli in Südfrankreich und von dem griechischen Erdbeben vom 15. Juli 1909 analy-

siert und insbesondere wird auf das Auftreten langer Gravitationswellen in den Vorläufern hingewiesen, die die normalen longitudinalen Elastizitätswellen überlagern. Zum Schluß wird noch eine Formel für die Berechnung der Herdtiefe geprüft, die für Stationen von höchstens 1000 km Entfernung die Tiefe aus einer Seismographenaufzeichnung zu berechnen erlaubt und befriedigende Resultate liefert.

3. Herr Hertwig legt für die Abhandlungen der Akademie eine Abhandlung des Hilfsarbeiters an der zoologischen Staatssammlung, Herrn Lorenz Müller, vor. Diese gibt eine Bearbeitung der Reptilien, welche im Lauf des letzten Jahrzehnts der Staatssammlung aus Kamerunzugegangen sind, unter Benutzung eines reichen Vergleichsmaterials, welches dem Verfasser aus den wichtigsten Museen Europas zugesandt worden war. Die ziemlich umfangreiche Kollektion enthält mehrere neue Arten, sowie Formen, welche für Ostafrika neu sind.

Öffentliche Sitzung

zu Ehren Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

am 20. November.

Der Präsident der Akademie Herr K. Th. von Heigel eröffnete die Festsitzung mit folgender Ansprache:

Unsre akademische Gemeinde steht fernab vom Streit der Völker und der Parteien, doch unsres Vaterlandes Ehre ist auch unsre Ehre, und sein Wohl und Wehe macht auch unsre Herzen froh oder beklommen. Wie könnten wir in einer Festsitzung zu Ehren unsres Landesherrn nicht in dankbarer Verehrung dessen gedenken, was der hohe Herr in schlichter, treuer Pflichterfüllung für unsren Staat, was er aus Überzeugung und mit Freuden für unsren Verband getan hat und tut! — Wir grüßen ihn mit Iphigeniens Segenswort: Mag Sieg und Ruhm und

Reichtum und das Wohl der Seinen ihm verliehn und jedes frommen Wunsches Fülle ihm gewährt sein! —

Auch aus der Chronik des letzten Jahres habe ich dankbar in Erinnerung zu bringen, wie sehr die Gnade des Regenten und die Huld unsrer Ehrenmitglieder dazu beitrugen, daß die in bescheidenen Formen gehaltene Gedächtnisfeier des 150jährigen Bestehens unsrer Akademie einen des Verdienstes unsrer Vorfahren würdigen Verlauf nahm.

Ein erfreuliches Ereignis in der Entwicklungsgeschichte unsres Gemeinwesens war die im laufenden Jahre vollzogene Vereinigung der ersten und der dritten Klasse. Es wurde seit langem beklagt, daß die Vertreter der sogenannten historischen Wissenschaften systemwidrig in die beiden Klassen verteilt waren, daß der Rechtshistoriker der ersten, der Wirtschaftshistoriker der dritten Klasse, der Archäologe der ersten, der Vertreter der neueren Kunstgeschichte der dritten Klasse angehörten u. s. f. Diesem Mißstand ist jetzt abgeholfen. Es wurde zwar, um nicht eine Statutenänderung nötig zu machen, und auch aus geschäftlichen Rücksichten von einer förmlichen Verschmelzung der zwei Klassen abgesehen, aber die Mitglieder vereinigen sich nur noch zu gemeinsamen Sitzungen, um Vorträge aus den verschiedenartigen Wissensgebieten entgegenzunehmen und über die von unsrer Akademie und von den akademischen Kartellen ins Leben gerufenen wissenschaftlichen Unternehmungen Beratung zu pflegen. Gleichzeitig wurde im Interesse der Gleichstellung der naturwissenschaftlichen Vertretung mit Genehmigung der K. Staatsregierung die Zahl der Mitglieder der zweiten Klasse von 18 auf 24 erhöht.

In unsrer Zeit der vielverästelten Spezialisierung der Wissenschaft ist alles willkommen zu heißen, was zu einer Verbindung, zu einer Zusammenfassung wissenschaftlichen Betriebs dienlich sein kann. Nicht die Spezialisierung an sich ist zu beklagen. Ohne Spezialisierung wäre ein lebhaftes Fortschreiten der Wissenschaft unmöglich. Gustav Freytag hat einmal feinsinnig ausgeführt, daß es neben den Forschern, welche neue Scheite ins Feuer der Wissenschaft werfen, auch andre geben muß, die

Darsteller, die Lehrer, welche die heilige Flamme durchs Land tragen. Ebenso sind aber auch Mittel- und Sammelpunkte nötig, in welchen die infolge der Spezialisierung gebrochenen Licht- und Wärmestrahlen wieder zusammentreffen. Das Aufeinanderwirken verschiedener Wissenschaften, sagt Cousin, ist um nichts weniger von lichtbringender Kraft, als die Reibung elektrischer Körper.

Als solche Mittel- und Sammelpunkte bieten sich in unsren Tagen die Akademien dar. Hier findet jede freie Wissenschaft eine Heimstätte und einen Arbeitsplatz. Alle ihre Diener, mögen sie die Bahnen der Sterne messen oder dem Werdegang der Pflanze nachspüren oder die Wahrheit über Menschen- und Völkerschicksale zu ergründen oder die Gesetze der Schönheit festzustellen suchen, sie alle vereinigen sich hier zu friedlichem Wettbewerb, zu Syssitien, bei welchen alle von den Arbeitsfrüchten aller zu kosten bekommen. —

Auch im abgelaufenen Jahre ist den wissenschaftlichen Unternehmungen der Akademie und den wissenschaftlichen Sammlungen des Staates von vielen Seiten opferwillige Hilfe zuteil geworden.

Zu wärmstem Danke sind wir der K. Staatsregierung verpflichtet, welche, nachdem schon die Arbeiterkolonie des Thesaurus linguae latinae im Gebäude der alten Augenklinik untergebracht war, noch ein weiteres Stockwerk instand setzen ließ, um dort Räume für andere Unternehmungen der kartellierten deutschen Akademien und der internationalen Assoziation zu schaffen. Dank dieser Fürsorge ließen sich den jungen Kollegen, die für Herausgabe des griechischen Urkundenbuches und der mittelalterlichen Bibliothekskataloge tätig sind, freundliche Arbeitszimmer zur Verfügung stellen.

Ein hochherziger Gönner der Wissenschaft, Geheimer Kommerzienrat Dr. von Brunck in Ludwigshafen, hat, „tief durchdrungen von der hohen Bedeutung der wissenschaftlichen Forschungen für die Industrie, speziell für die chemische Technik, in der er nunmehr 40 Jahre tätig ist“, der Akademie 50000 Mark zur Förderung chemischer und physikalisch-

chemischer Forschung zugewendet. Die Stiftung hat am 22. Oktober dieses Jahres die landesherrliche Bestätigung erhalten, so daß mit Einrechnung der Zuwendungen unsres verstorbenen Kollegen Königs für chemische Forschungen nunmehr jährlich der Zinsenertrag eines Kapitals von 150000 Mark zur Verfügung steht.

Dem Antiquarium schenkte Herr James Loeb zwei sehr gute Terrakottastatuetten aus Tanagra, Jünglingsgestalten mit vielen Farberesten, — ein erfreulicher Gewinn, da das Antiquarium an griechischen Terrakotten aus der besten Zeit nicht sehr reich ist und die beiden Typen noch nicht vertreten sind.

Schon wiederholt hat das K. Münzkabinett von Herrn Rentner Hugo von Hirsch-Gereuth reiche Gaben erhalten, welche es instand setzten, kostspielige Ankäufe zu machen. Mit Hilfe dieses Gönners konnten neuerdings ein feines Miniaturbildnis des Kurfürsten Ott Heinrich von der Pfalz, in Kelheimer Stein geschnitten, ferner einige hocharchaische griechische Münzen aus einem Funde auf Melos, altitalisches Barrengeld aus Bronze, ein babylonischer Siegelzylinder u. s. w. erworben werden. Desgleichen mit Hilfe eines Ungenannten eine Medaille auf Martin Bucer vom Jahr 1543, ein köstliches Meisterwerk der deutschen Renaissance.

Auch das allgemeine Interesse an den zoologischen Sammlungen, deren Umzug in ihre neuen, praktisch adaptierten Räume demnächst vollendet sein wird, gibt sich andauernd in Geschenken kund. An ihre Spitze sind zu setzen eine prachtvolle, von Seiner Königlichen Hoheit Prinz Rupprecht geschenkte Reihergruppe, sodann zahlreiche Objekte aus der Jagdbeute des allzufrüh dem Vaterland entrissenen, mit feinem Verständnis für das Schöne und Wertvolle in Kunst und Natur begabten Prinzen Arnulf und die nicht weniger als 400 Nummern umfassende Sammlung von Säugetieren, Vögeln und Insekten, welche Ihre Königliche Hoheiten die Prinzen Leopold und Georg aus Deutsch-Südwestafrika mitgebracht haben. Viele Exemplare sind so trefflich erhalten und so wichtig, daß sie in der Schausammlung aufgestellt werden. Voraussichtlich kann die

ganze Kollektion vorher zusammen mit den von unsrem Landsmann Professor Dr. Gottfried Merzbacher von seiner letzten Expedition nach dem Tian-Schan-Gebirge mitgebrachten und großmütig wieder unsrem Museum zugewendeten Objekten in einer Sonderausstellung in diesen Festräumen dem Publikum gezeigt werden. Unsre Vogelsammlung haben durch Schenkungen vermehrt die Herren Hellmayer, Dr. Parrot, Dr. Zugmayer, Generalarzt Dr. Stechow, Dr. Schlaginweit, Hofrat Martin, Postsekretär Fischer etc. Rentner Appel hat außer einem prächtigen Giraffenbock einen Eisbären von ungewöhnlicher Größe und allerlei Vögel aus Nowaja-Semlja beigesteuert, Herr Prager viele sehr wertvolle ostafrikanische Säuger. Die Fischsammlung wurde bereichert durch wertvolle Schenkungen der Münchner Seefischhalle. Aus weiter Ferne haben Plantagendirektor Widnmann in Sumatra und ganz besonders Gouverneur Hahl in Neu-Guinea unsre Sammlungen bedacht. Schließlich seien noch die namhaften Spenden Dr. Bruegels erwähnt, der zu den schon früher von ihm gesammelten und geschenkten Fauna-Objekten neuerdings mannigfaltiges Material aus Borneo dem Staatsmuseum widmete. Auch diese umfangreichen Zuwendungen Dr. Bruegels zeigen die Vorzüge der früheren: systematische Sammlung und wissenschaftlich genaue Etikettierung.

Noch reicherer Ausstattung mit Geschenken hatte sich das Ethnographische Museum zu erfreuen. Das Königliche Haus bewahrte ihm seine von jeher bewiesene Teilnahme. Ihre Königliche Hoheit Prinzessin Therese leitete eine Sammlung ein, um die Mittel zum Ankauf einer kostbaren neuseeländischen Textilarbeit aufzubringen, eines aus seidenglänzendem Hanf in einer heute vergessenen Knüpf- und Webetechnik hergestellten Mantels eines Maori-Häuptlings, der sich nunmehr den berühmten älteren kunstgewerblichen Beständen des Museums würdig anreiht. Seine Königliche Hoheit Prinz Alfons stellte eine Reihe von photographischen Abbildungen peruanischer Terrakotten, die zum Vergleich mit unsren Beständen von Interesse sind, zur Verfügung. Von Seiner Königlichen Hoheit Prinz Georg wurden Erwerbungen von seiner ostasiatischen Reise

dem Museum überwiesen, worunter die barocken Helme und Ritterhüte aus Japan besondere Hervorhebung verdienen.

Für die Altertumskunde Zentralamerikas verdankt das Museum ein überaus wichtiges Anschauungsmaterial dem Sammeleifer und der Freigebigkeit des deutschen Vizekonsuls in Guatemala, Karl Sauerbrey. Die von ihm überlassenen Sammlungen setzen sich zusammen aus Höhlen- und Gräberfunden auf eigenem Gebiete — Herr Sauerbrey ist Besitzer von Kaffeeplantagen — und aus Ankäufen, die von andren Fundstätten im westlichen Guatemala stammen. Es befinden sich darunter antike Amulettsteine, Kultfiguren, Gefäße und Gefäßfragmente mit mannigfachem linearen und figuralen Zierat, aber auch moderne Indianerarbeiten, gewobene Kleidungsstücke, Kürbisschalen mit genreartigen Darstellungen in schwarz-, gelb-, rotbrauner Bemalung etc.

Die Reise des Herrn Dr. Zugmayer kam zwar vorzugsweise der Zoologie zugute, aber auch die Ethnographie ist nicht leer ausgegangen. Das Museum erhielt von ihm eine ansehnliche Anzahl von Tempelgeräten und Kultobjekten des nördlichen Buddhismus und von eigenartigen Gebrauchsgegenständen aus Tibet und den angrenzenden Ländern Zentralasiens.

Die Sammlung ostasiatischer Kleinkunst wurde durch Geschenke von Kommerzienrat Wenglein in Nürnberg, Professor Grützner, Major Passavant und Numismatiker Dr. Jakob Hirsch bereichert. Zwei palästinensische Grabsteine mit arabischen Inschriften, die zu den ältesten ihrer Art gehören, überwies Kommerzienrat Zettler. Dr. Bruegel reihte seinen im Vorjahre betätigten Schenkungen aus Siam und Borneo neue Zugänge an, Holzschnitzereien, Metallarbeiten und Modelle aus dem malaiischen Kulturkreis. Nach alter Tradition sich forterbende Kunstfertigkeit läßt sich an den Gegenständen bewundern, die Freiherr von Wendland neuerdings auf Reisen in der asiatischen Türkei erworben und dem Museum geschenkt hat; besonders wertvoll sind die alten, schwersilbernen Schmuckstücke eines mesopotamischen Beduinenstammes und die farbigen glasierten Tonziegel von Moscheen aus Damaskus, eine will-

kommene Weiterführung unsrer kleinen Kachelsammlung, zu welcher die von Prinz Rupprecht aus Jerusalem mitgebrachten Stücke den Grund gelegt haben. Eben jetzt werden umfangreiche Sendungen aus Neu-Guinea ausgepackt, die dem Museum wertvolles ethnographisches Gut aus den deutschen Besitzungen in Ozeanien zuführen, — Schenkungen des dortigen Gouverneurs Dr. Haal, eines bayerischen Staatsangehörigen.

Als Leihgabe hat Professor Dr. Merzbacher eine kostbare Sammlung persischer Fayencen, Bronzen, Mosaiken, Lackarbeiten und Waffen, darunter Prunkstücke aus der industriellen Blütezeit Persiens im 17. und 18. Jahrhundert, im Museum aufstellen lassen.

In den ersten Jahrzehnten nach der Gründung unsrer Akademie wurde fast jedem verstorbenen Mitglied in öffentlicher Sitzung ein ehrender Nachruf gewidmet. Dies änderte sich, als der Kreis der Genossen sich erweiterte und — so darf wohl hinzugesetzt werden — die Selbsteinschätzung der Leistungen strenger und gerechter wurde. Es läßt sich die interessante Beobachtung machen, daß im nämlichen Verhältnis, wie die Bedeutung der Münchner Akademie und der Wert ihrer Arbeit stiegen, die Zahl der Gedächtnisreden abnahm. Was früher die Regel war, ist heute nur noch Ausnahme. Es wurde jedoch daran festgehalten, daß außergewöhnlich verdienstvollen Mitgliedern nach ihrem Ableben noch eine letzte Huldigung gewidmet wurde, indem ein berufener Fachgenosse der wissenschaftlichen, wie der menschlichen Bedeutung des verewigten Kollegen gerecht zu werden suchte.

Nach Furtwänglers Tod bestand in unserem Kreise kein Zweifel, daß diesem Gelehrten von schöpferischem, urtümlichem Geist ein ehrender Nachruf nicht versagt werden dürfe. Die Geschichte der antiken Kunst verdankt ihm ja eine Reihe bahnbrechender kritischer Arbeiten; die seiner Obhut anvertrauten Sammlungen hatten an ihm einen ebenso rührigen, wie verständnisvollen Hüter, und die erfolgreichen Ausgrabungen in Ägina und Orchomenos sind für immer mit seinem Namen verknüpft. Freilich, wer hoch steht, den trifft man-

cher Windstoß, und das Wetter schlägt gern in die hohen Türme! Doch von Wind und Wellen geschaukelt, schuf er Werke, die Wind und Wellen dauernd widerstehen werden. Nur das schwer Erreichbare lockte ihn; den eigenen Körper glaubte ér wie fremden Widerstand meistern zu können; nur das Höchste, das Größte erschien ihm als würdiger Kampfpreis! Wenn auch die Warnung vor Ikarischer Kühnheit in unsren Tagen zum Anachronismus geworden ist, scheint mir doch der Vergleich mit Dädalos' Sohn am besten zu passen für den Mann mit dem Blick und der Feuerseele eines Jünglings, den jäh das letzte Los der Sterblichen ereilte, weil ihm auch der Flug zu den Göttern nicht als allzu kühnes Wagnis erschien.

Dann verkündigten die Klassensekretäre die Wahlen.

Es wurden gewählt und von Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten bestätigt

I. in der mathematisch-physikalischen Klasse

als ordentliche Mitglieder:

Dr. Ludwig Burmester, o. Professor der darstellenden Geometrie an der Technischen Hochschule in München,

Dr. August Föppl, o. Professor der elementaren und der technischen Mechanik an der Technischen Hochschule in München.

Dr. Wilhelm Muthmann, o. Professor der anorganischen Chemie an der Technischen Hochschule in München,

Dr. Erwin Voit, o. Professor der Physiologie und Diätetik an der Tierärztlichen Hochschule in München;

als außerordentliche Mitglieder:

Dr. Max von Gruber, K. Obermedizinalrat, K. K. Hofrat, o. Professor der Hygiene und Bakteriologie an der Universität München,

Dr. Otto Frank, o. Professor der Physiologie an der Universität München,

Dr. Heinrich Burkhardt, o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in München,

Dr. Erich von Drygalski, o. Professor der Geographie an der Universität München;

als korrespondierende Mitglieder:

Dr. Eduard Riecke, Geheimer Regierungsrat, o. Professor der Experimentalphysik an der Universität Göttingen,

Dr. Woldemar Voigt, Geheimer Regierungsrat, o. Professor der theoretischen Physik an der Universität Göttingen,

Dr. Albin Haller, Professor der Chemie an der Faculté des Sciences an der Sorbonne, Membre de l'Institut in Paris,

Dr. David Prain, Lieut. Col., Direktor des Botanischen Gartens in Kew,

Frederik Orpen Bower, Professor der Botanik an der Universität Glasgow,

Dr. Joseph Partsch, o. Professor der Erdkunde an der Universität Leipzig,

Dr. Albert Penck, Geheimer Regierungsrat, K. K. Hofrat, o. Professor der Geographie an der Universität Berlin, Direktor des Institus für Meereskunde.

Darauf hielt das ordentliche Mitglied der philosophisch-philologischen Klasse, Herr P. Wolters, die besonders im Druck erscheinende Gedächtnisrede auf Adolf Furtwängler.

Sitzung am 4. Dezember.

1. Herr Rothpletz legte vor eine Arbeit des Herrn Dr. Julius Schuster:

Ein Beitrag zur Pithecanthropus-Frage.

Der Verfasser sucht das Altersproblem des Pithecanthropus auf Grund der in den Pithecanthropus-Schichten enthaltenen fossilen Flora zu lösen. An der Hand des umfangreichen Materials. das teils durch die mit Unterstützung der Berliner Akademie ausgeführte I. Selenka-Expedition teils durch die von der Münchener Akademie organisierte II. Selenka-Expedition zusammengebracht worden war. gelang es. 54 Arten von Pflanzen zu bestimmen, die alle noch lebend sind, aber heute zum Teil eine andere geographische Verbreitung haben; von den 54 Arten kommen nur 24 noch jetzt in Java vor, 13 gehen östlich bis Neu-Guinea und Australien. 5 bis zu den Philippinen, 4 bis Celebes, während rund 30 das indische Festland oder eine der drei großen Sunda-Inseln östlich nicht überschreiten. Da demnach die fossile Flora von Trinil zahlreiche Arten enthält, die jetzt nur mehr auf Sumatra bzw. Borneo oder auf dem indischen Festland vorkommen, Java aber erst in altdiluvialer Zeit sich abtrennte. so kann die Trinilflora nicht jünger sein als altdiluvial, aber auch nicht älter, da sie keine einzige ausgestorbene Art enthält. Diese Altersbestimmung gilt für die gesamten, nicht ganz 25 m mächtigen Pithecanthropus-Schichten, da sowohl der Charakter der Flora wie der Fauna der gleiche ist und die geologische Betrachtung ergibt, daß die Schichten das Produkt einer vulkanischen Haupteruption und mehrerer darauffolgender schwächerer Ausbrüche sind. die sämtlich einer geologischen Epoche angehören. Während Trinil (100 m) heute in der heißen

Tropenregion liegt, entspricht die fossile Flora einem offenen, gemischten, immergrünen Regenwald der gemäßigten Zone, also einer Höhe von 600—1200 m und zwar der oberen Grenze, da namentlich eine Schneeballart nicht unter 1200 m herabsteigt. Daraus und aus der ganzen Zusammensetzung der Flora, die in den regenreichen Khassischen Bergen ihren Ursprung hat, geht hervor, daß das Klima damals in Mitteljava feuchter und kühler war. In der Ebene von Madiun, in der Trinil liegt, beträgt die Temperatur durchschnittlich 24—28° C., in der gemäßigten Zone 18—22°, woraus folgt, daß die Temperatur zur Zeit des Pithecantropus um 6° niedriger war und die Schneegrenze um 400 m tiefer lag als heute. Durch das auf Grund der fossilen Flora erkannte altdiluviale Alter der Ablagerung ist die Vorstellung hinfällig, daß der Pithecanthropus ein direktes zeitliches Bindeglied zwischen Affen und Menschen sei; es ist vielmehr das altdiluviale Relikt einer Entwicklungsreihe, die im Pliozän zu den Hominiden hinführte.

2. Herr W. v. Dyck sprach:

Über die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definierten Kurvensysteme. 3. Mitteilung: Über singuläre Lösungen.

Die Theorie der singulären Lösungen einer Differentialgleichung erster Ordnung ist seit der bekannten Arbeit von Darboux aus dem Jahre 1873 Gegenstand vieler Untersuchungen gewesen, die sich indes wesentlich nur auf zwei Formen von singulären Kurven einer Kurvenschar bezogen haben, nämlich auf die Kurven der singulären Punkte einer Schar — die im allgemeinen keine Lösungen der Differentialgleichung darstellen — und auf die Umhüllungskurven einer Schar — die singuläre Lösungen sind. Darüber hinaus aber bietet das Auftreten von Grenzkurven der Schar — die zugleich den Charakter singulärer und partikulärer Integrale haben — besonderes Interesse. Sie treten

schon bei sehr einfachen und ganz bekannten Differentialgleichungen auf. Mit ihrer gestaltlichen Diskussion beschäftigt sich die vorliegende Abhandlung.

3. Herr Pringsheim legte vor eine Abhandlung von G. Dumas:

Elementare Herleitung des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes.

In der Januarsitzung habe ich einen sehr einfachen Beweis dieses für die Theorie der Funktionen mehrerer Variablen fundamentalen Satzes von Herrn Fr. Hartogs vorgelegt. Der vorliegende Beweis erreicht den letzteren zwar nicht an Kürze, arbeitet dafür aber mit noch elementareren Mitteln: er ist durchaus algebraisch-reihentheoretischer Natur, während der Hartogsche Beweis auf funktionentheoretischer Grundlage beruht.

Verzeichnis der im Jahre 1909 eingelaufenen Druckschriften.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten.

Aachen. Geschichtsverein:
— — Zeitschrift, Bd. 30, 1908.
Aarau. Historische Gesellschaft des Kantons Aargau:
— — Taschenbuch für das Jahr 1908.
Abbeville. Société d'Émulation:
— — Bulletin trimestriel 1908, No. 3 et 4: 1909. No. 1 et 2.
— — Mémoires, Tom. VI, part 1.
Aberdeen. University:
— — Studies, No. 31—35. 1908. 4⁰.
Adelaide. Royal Society of South-Australia:
— — Transactions, Proceedings, and Report, vol. XXXII, 1908.
— — Report of the Meeting of Australasian Association for the Advancement of Science, 1907.
Agram. Südslavische Akademie der Wissenschaften:
— — Codex diplomat. regni Croatiae. Dalmatiae et Slavoniae, vol. VI. 1908.
— — Ljetopis, 23. Svezak. 1909.
— — Rad, Knjiga 174—177.
— — Zbornik, Bd. XIII. 2; XIV. 1.
— — Rječnik, 27, 1908.
— — Grada, Knjiga 6, 1909.
— K. Kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv:
— — Vjestnik, Bd. XI, Heft 1—4. 1908/09, 4⁰.
— K. Kroat. National-Museum:
— — Vjestnik, II. Serie, Bd. 10, 1908/09.

Aix. Faculté de droit et des lettres:
— — Annales. Faculté de droit, Tome II, No. 1, 2; Faculté des lettres, Tome 2, No. 1—4, Paris 1908/09.

Albany. New York State Education Department:
— — New York State Library, 90th annual Report 1907, tom. 1—3.
— — Bulletin, No. 121—125, 1908.
— — New York State Museum, annual Report 60, vol. 1—5; 61, 1907, vol. 1—3 (in 4^0 u. 8^0).
— — Education Department Bulletin, No. 440, 442, 445, 447, 450, 451. 453, 455.
— — Annual Report of the Education Department 5. 1909 u. Suppl.-Bd.

Alexandrien. Société des publications égyptiennes:
— — Bulletin, Sér. V, tome II, 2.

Allahabad. Government of the United Provinces:
— — District Gazetteers, vol. 24, 26, 28. 29.

Allegheny. Observatory:
— — Publications, vol. I, No. 10—13, 15—17, 18, 1909, 4^0.

Altenburg. Geschichts- und altertumsforschende Gesellschaft:
— — Mitteilungen, XII, 1.

Amiens. Société des Antiquaires de Picardie:
— — Bulletin trimestriel, année 1908, trim. 1—4.

Amsterdam. K. Akademie der Wissenschaften:
— Verhandelingen, afd. Natuurkunde, I. sectie X, 1; II. sectie XIV, 2—4, XV, 1.
— — Verhandelingen, afd. Letterkunde, Nieuwe Reeks, deel X. 2.
— — Verslagen, Afd., Natuurkunde. deel XVII, 1, 2, 1908/09; Afd. Letterkunde 4. Reeks. deel 9.
— — Jaarboek voor 1908; 1909.
— — Prijsvers, 1909.

Andover. Phillips Academy:
— — Department of Archaeology: Bulletin IV, 1, 2, 1908.

Ansbach. Historischer Verein:
— — 56. Jahresbericht, 1909.

Antwerpen. Stadtverwaltung:
— — Paedologisch Jaarboek, Jaarg. 7, afd. 2. 1909.

Aschaffenburg. K. Humanist. Gymnasium:
— — Jahresbericht 1908/09.

Athen. École française:
— — Bulletin du Correspond. hellénique, année 30, 1906; année 33, 1909.
— Wissenschaftliche Gesellschaft:
— — Redaktion der Zeitschrift „Athena“: Athena. tom. 20, Heft 4; tom. 21, Heft 1—3. Beilage: *Μαρκέλλου Σιδητοῦ περὶ σφυγμῶν τὸ πρῶτον ὑπὸ Ζέρβου ἐκδιδόμενον.* Athen 1907.

Athen. Universität:
— — *Ἐπιστημονικὴ ἐπετερίς*, 3, 1906/07.
— — *Λογοδοσίαι*, 1906 und 1907.
— — *Νέος Ἑλληνομνήμων*, Bd. 5, 1—4, 1908.
Augsburg. Historischer Verein für Schwaben und Neuburg:
— — Zeitschrift, Jahrg. 34, 35, 1908/09.
— Naturwissenschaftlicher Verein:
— 38. Bericht, 1908.
Austin. (Texas). Academy of Science:
— — Transactions, vol. 9, 10.

Baltimore. Peabody Intitute:
— — 42. annual Report 1909.
— Johns Hopkins University:
— — Circulars, 1908, No. 8—10; 1909, No. 1—7.
— — American Journal of Mathematics, vol. 30, No. 3, 4; vol. 31, No. 1—3; 1908, 4⁰.
— — The American Journal of Philology, vol. 29, No. 3, 4; vol. 30. No. 1—3.
— — American Chemical Journal, vol. 40, No. 1—6; vol. 41, No. 1—6; vol. 42, No. 1.
— — Johns Hopkins University Studies, ser. 26, No. 11, 12; ser. 27, No. 1—7.
— — Bulletin of the Johns Hopkins Hospital, vol. XX, No. 215—225, 1909, 4⁰.
Bamberg. K. Altes Gymnasium:
— — Jahresbericht 1908/09, mit Programm von Herlet.
— K. Neues Gymnasium:
— — Jahresbericht 1908/09, mit Programm: Heinrich I. von Bilversheim, Bischof von Bamberg, Teil III, von O. Kreuzer, 1909.
— Historischer Verein:
— — 67. Jahresbericht und Jahrbuch, 1909.
Barcelona. Institut d'Estudis Catalans:
— — Anuari 1907, 2⁰,
— — Memoria presentada al 31 de Desembre de 1908, 4⁰.
— — Puig y Cadafalch, de Falguera u. Goday: L'arquitecture Romanica y Catalunya, 1909.
Basel. Naturforschende Gesellschaft:
— — Verhandlungen, Bd. 20, Heft 1, 2, 1909.
— Historisch-antiquarische Gesellschaft:
— — Basler Zeitschrift für Geschichte und Altertumskunde, Bd. VIII, 2; IX, 1.

Basel Universität:
— — Schriften der Universität aus dem Jahre 1908/09 in 4⁰ und 8⁰.
— — Jahresverzeichnis der Schweizerischen Universitätsschriften 1908/09.

Batavia. Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen:
— — Dagh-Register gehauden int Casteel Batavia Anno 1679; 1909, 4⁰.
— — Tijdschrift voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde, deel 51, afl. 2—5 und Register zu 1907.
— — Notulen van de algemeene en directievergaderingen, deel 46, afl. 2—4, 1908.
— — Verhandelingen, deel 57. 1909.
— — Plan und Führer durch das Museum, 1909.
— R. Magnetical and Meteorological Observatory:
— — Observations, vol. 29 and Appendix 1 zu vol. 30 (1907), 2⁰.
— — Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indie, 29. Jahrg. 1907, deel 1, 2; 1908, 4⁰.
— — Erdbebenbericht 1909, Jan.—Sept.
— K. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indie:
— — Natuurkundig Tijdschrift, deel 68, Weltevreden 1909.

Bayreuth. K. Humanist. Gymnasium:
— — Jahresbericht 1908/09, mit Programm von Lederer.
— Historischer Verein:
— — Archiv für Geschichte und Altertumskunde von Oberfranken, Bd. 24, Heft 1.

Belgrad. K. Serbische Akademie der Wissenschaften:
— — Annuaire (Godišnjak), vol. 21, 1907; 1908.
— — Archives (Spomenik), vol. 46, 48, 1908, 4⁰.
— — Collection ethnographique (Etnografski Zbornik), vol. 10, 11, 1908
— — Collection historique (Istorijski Zbornik), section I, vol. 5, 1909.
— — Comptes rendus (Glas), vol. 75, 76, 78, 80, 1908/09.
— — Spomenica von N. Krstić, 1908.
— — Grad Klis u 1596 godini von Tomić (Jov. N.), 1908.

Bergen (Norwegen). Museum:
— — Aarbog 1908, Heft 3; 1909, Heft 1, 2.
— — Aarsberetning for 1908; 1909.
— — Sars G. O., An Account of the Crustacea of Norway, vol. V, part 23, 24, 1908; 25, 26, 1909.
— — Skrifter. N. R., 1, 1.

Bergzabern. K. Progymnasium:
— — Jahresbericht 1908/09.

Berkeley. University of California:
— — Bulletin. Third Series, vol. II, 9.

Berkeley. University of California:

— — The University of California Chronicle, vol. 10, No. 3, 4; vol. 11. No. 1, 2; vol. 8, No. 4.

— — Publications, Botany, vol. 3, No. 2—8; Physiology, vol. 3, No. 12—14; Geology, vol. 5, No. 12—17; Zoologie, vol. 4, No. 5—7 und Titel mit Register; vol. 5, No. 1—3; vol. 6, No. 1; American Archaeology etc., vol. 7, No. 3; vol. 8, No. 1—4; Modern Philology, vol. 1, No. 1; Philosophy, vol. 11, No. 1, 2.

— — Bulletin, No. 192—201, 1907/08.

— Agricultural Experiment Station:

— — Foreign Associates of National Societies. By E. C. Pickering, 1908/09.

Berlin. K. Preuß. Akademie der Wissenschaften:

— — Corpus inscriptionum latinarum, vol. 4, Suppl. Pars posterior, 1909, fol.

— — Abhandlungen { Philos.-histor. Klasse, 1908, 4⁰. Physikal.-math. Klasse, 1908, 4⁰.

— — Sitzungsberichte, 1908, No. 40—53; 1909, No. 1—53, gr. 8⁰.

— — Politische Korrespondenz Friedrichs des Großen, Bd. 33, 1909.

— — Inscriptiones Graecae, vol. VIII, vol. XII, fasc. 5b; fol.

— — Kritischer Katalog der Leibniz-Handschriften. Heft 1, 1908, 2⁰.

— K. Preuß. Geologische Landesanstalt:

— — Abhandlungen, N. F., Heft 53, 4⁰.

— — Jahrbuch für das Jahr 1905, Bd. 26, 1908, 4⁰.

— — Potonié, Abbildung und Beschreibung fossiler Pflanzenreste, Lief. 6, 1909.

— Physikalisch-Technische Reichsanstalt:

— — Die Tätigkeit der Physikal.-Techn. Reichsanstalt im Jahre 1908; 1909, 4⁰.

— K. Bibliothek:

— — Jahresbericht für 1908/09

— Zentralbureau der internationalen Erdmessung:

— — Veröffentlichungen, N. F., No. 17 u. 18, 1909, 4⁰.

— Deutsche Chemische Gesellschaft:

— — Mitgliederverzeichnis 1909.

— — Berichte, 41. Jahrg. No. 19 A. B.; 42. Jahrg. No. 1—18; 1909.

— Deutsche Geologische Gesellschaft:

— — Zeitschrift, Bd. 60, Heft 2 u. 4; Bd. 61, Heft 1 u. 3.

— — Monatsberichte, 1908, No. 3, 4, 8—12; 1909, No. 1—7.

— Medizinische Gesellschaft:

— — Verhandlungen, Bd. 39, 1909.

Berlin. Deutsche Physikalische Gesellschaft:
— — Die Fortschritte der Physik, 64. Jahrg., 1908, I—III.
— — Verhandlungen, Jahrg. 10, 1908, No. 24; Jahrg. 11, 1909, No. 1—23. Braunschweig 1908/09.
— Physiologische Gesellschaft:
— — Zentralblatt für Physiologie, Bd. 22, No. 20—26; Bd. 23, No. 1—20; 1908/09.
— — Bibliographia physiologica, Bd. 4, No. 4.
— K. Technische Hochschule:
— — Borrmann, Die Bauschule von Berlin. Rede, 1909, 4⁰.
— Kais. Deutsches Archäologisches Institut (röm. Abteilung s. unter Rom):
— — Jahrbuch, Bd. 23, Heft 3, 4; Bd. 24, Heft 1, 2; 1908/09, 4⁰.
— — Bericht über die Fortschritte der römisch-germanischen Forschung im Jahre 1906/07; Frankfurt a. M. 1909.
— K. Preuß. Geodätisches Institut:
— — Veröffentlichung, N. F., No. 39.
— K. Preuß. Meteorologisches Institut:
— — Abhandlungen, Bd. 2, No. 2, 5, 6; Bd. 3, No. 1; 1908/09, 4⁰.
— — Bericht über das Jahr 1908; 1909.
— — Veröffentlichungen. No. 208—213.
— — Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. und III. Ordnung im Jahre 1903; 1908, 4⁰.
— — Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1905 und 1906; 1908, 4⁰.
— — Ergebnisse der magnetischen Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1903 und 1904; 1908, 4⁰.
— — Ergebnisse der Niederschlagsbeobachtungen im Jahre 1906; 1908, 4⁰.
— Redaktion des „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“:
— — Jahrbuch, Bd. 37, Heft 3; Bd. 38, Heft 1, 2; 1909.
— Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuß. Staaten:
— — Katalog der Bibliothek, VII. Aufl., 1908.
— — Gartenflora, Jahrg. 1909, No. 1—24.
— Verein für Geschichte der Mark Brandenburg:
— — Forschungen zur brandenburgischen und preußischen Geschichte, Bd. 22, 1 und 2, Leipzig 1909.
— Reform-Verlag:
— — Universal-Archiv für Wissenschaft und Litteratur, Jahrg. 1, No. 7, 9, 11.
— Zeitschrift für Instrumentenkunde:
— — Zeitschrift, 26. Jahrg., No. 1—12.

Berlin. Deutsche Gesellschaft für Mechanik und Optik:
— — Deutsche Mechanikerzeitung, 1909, No. 13 - 17.

Bern. Schweizerische Naturforschende Gesellschaft:
— — Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz, Lief. 29 (= Geol. Bibliothek der Schweiz, 2. Teil), 1908, 4⁰.
— — Actes de la Société Helvétique des Sciences naturelles, session 91 in Glarus, 2 Bände, 1909.
— — Compte rendu des travaux prés. à la 91. session. 1908.
— — Neue Denkschrifteu, Bd. 44, 1, 2.
— Historischer Verein:
— — Archiv, Bd. 19, Heft 2.

Besançon. Société d'Emulation du Doubs:
— — Mémoires, ser. VIII, vol. 2, 1907; 1908.

Beyrouth. Université Saint Joseph:
— — Mélanges de la Faculté Orientale. III, fasc. 2.

Birmingham. Natural history and Philosophical Society:
— — List of membres 1909 and annual Report for 1908.

Bistritz. Gewerbelehrlingsschule:
— — Jahresbericht 33, 1907/08; 1908.

Bologna. R. Accademia delle Scienze dell' Istituto:
— — Memorie, Classe di scienze morali: Serie I, tomo 2, a) Sezione di scienze storico-filologiche, fasc. 1, 2; b) Sezione di scienze giuridiche, fasc. 1, 2, 1909, 4⁰.
— — Memorie, Classe di sciene fisiche, VI. 5, 1907/08.
— — Rendiconto, N. Ser., vol. 12 (1907/08).
— — Rendiconto, Classe di scienze morali, ser. 1, vol. 1, fasc. 2 und ser. 1, vol. 2, fasc. 2, 1906/08.
— R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna:
— — Atti e Memorie, ser. III, vol. 26, fasc. 4—6; vol. 27, fasc. 1—3; 1908/09.
— Osservatorio astronomico e meteorologico:
— — Osservazioni meteorologiche dell' annata 1907; 1908, fol.
— — Una discursione tra l' osservatorio e un Giornale politico. 1909.

Bonn. Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1908/09 in 4⁰ und 8⁰.
— Verein von Altertumsfreunden im Rheinlande:
— — Bonner Jahrbücher, Heft 117, 3 und 118, 1, 1908, 4⁰.
— Naturhistorischer Verein der preußischen Rheinlande:
— — Verhandlungen, 65. Jahrg., I. und II. Hälfte; 66. Jahrg., I. Hälfte. 1909.
— — Sitzungsberichte, 1908, I. uud II. Hälfte; 1909, I. Hälfte; 1909.

Bordeaux. Société des sciences physiques et naturelles:
— — Mémoires, 6e Série. tom. 4. cahier 1, 2.
— — Procès-verbaux, 1907/08.
— Société de géographie commerciale:
— — Bulletin, 1909, année 35, No. 1—12.
— Société Linnéenne:
— — Actes, vol. 62, VIIe série. tome 2.
Boston. American Academy of Arts and Sciences:
— — Proceedings, vol. 44, No. 1—26: vol. 45, No. 1. 2, 1908/09.
— Boston Society of natural History:
— — Proceedings, vol. 34, No. 1—4, 1907/09.
— — Occasional Papers, VII, No. 8—10, 1908.
— American Urological Association:
— — Transactions, vol. 1, 1907; vol. 2, 1908.
Bremen. Meteorologisches Observatorium:
— — Deutsches Meteorologisches Jahrbuch für 1908, Jahrg. 19, 1909, 4°.
— Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Abhandlungen, Bd. XIX. Heft 3 und Beilage, 1909.
Breslau. Schlesische Gesellschaft für vaterländische Kultur:
— — 86. Jahresbericht 1908; 1909.
Brooklyn. Institute of Arts and Sciences:
— — Science Bulletin, vol. 1, No. 15, 1909.
Brünn. Mährisches Landesmuseum:
— — Časopis, Bd. IX, 1, 2, 1909.
— — Zeitschrift, Bd. IX, 1, 1909.
— Deutscher Verein für die Geschichte Mährens und Schlesiens:
— — Zeitschrift, 13. Jahrg., Heft 1—4, 1909.
— Naturforschender Verein:
— — Verhandlungen, Bd. 46, 1907; 1908.
Brüssel. Académie Royale de médecine:
— — Mémoires couronnés. Collection in 8°, tom. 20. fasc. 1—5, 1909.
— — Bulletin. IVe sér., tom. 22, No. 9—11; tom. 23. No. 1—10; 1908/09.
— Académie Royale des sciences:
— — Annuaire 1909; Année 75.
— — Bulletin: a) Classe des lettres 1908, No. 9—12; 1909, No. 1—8; b) Classe des sciences 1908, No. 9—12; 1909, No. 1—8.
— — Mémoires. Classe des sciences, Collection in 8°. IIe sér., tom. II, fasc. 4, 5, 1909.
— — Mémoires, Classe des lettres, Collection in 4°. IIe sér., tom. III, 2 und 3; tom. IV; 1908.
— — Mémoires, Classe des sciences, Collection in 4°. IIe sér., tom. 2, fasc. 1, 1908.

Brüssel. Académie Royale des sciences:
— — Mémoires, Classe des lettres, Collection in 8⁰, IIe sér., tom. IV, fasc. 2, tom. V, fasc. 1.
— — Biographie nationale, tom. XX, fasc. 1, 1908.
— — Classe des sciences, Programme du concours pour 1910 (1909).
— — „ „ beaux arts, Programme du concours pour 1911 und 1912 (1909).
— — Notices biographiques 1907—1909, 5me éd., 1909.
— — Commission Royale d'histoire. Reçueil de chartes de l'Abbaye de Stavelot-Malmedy par J. Halkin et C.-G. Roland, tom. 1. 1909, 4⁰.
— — A. Cauchie et A. van Hove: Documents sur la principauté de Liège, tom. 1, 1908.
— Bibliothéque Royale de Belgique:
— — Cataloque des manuscrits, tom. 7. 8, 1907/08.
— Musée du Congo:
— — Annales, a) Botanique, sér. V, vol. 3, fasc. 1; sér. II, vol. 1, fol.
b) Zoologie, sér. III, sect. II, vol. 1, fasc. 1, 2.
c) Ethnographie et anthropologie, sér. III, vol. 1, fasc. 1.
— Observatoire Royal:
— — Annales, N. Sér. Physique du globe, tom. IV, fasc. 1, 1908, 4⁰.
— — Annales Astronomiques, tom. XI, fasc. 2, 1908, 4⁰.
— — Annuaire météorologique pour 1909; 1908.
— — Duc d'Orleans, Recueil des mémoires scientifiques rel. à la croisière océanographique, 1907.
— Société des Bollandistes:
— — Analecta Bollandiana, tom. 28, fasc. 1, 4, 1909.
— Société entomologique de Belgique:
— — Annales, tom. 52, 1908.
— — Mémoires, tom. 17, 1909.
— Société Belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie:
— — Nouveaux Mémoires, 1908, fasc. 2, 4⁰.
— — Bulletin: a) Mémoires, tom. 22, fasc. 2; tom. 23, fasc. 1, 2; 1909; b) Procès-verbaux, 1908/09, tom. 22, No. 8—11; tom. 23, No. 1—6.
— Société Royal zoologique et malacologique:
— — Annales, tom. 43 (1908).

Budapest. K. Ungarische Akademie der Wissenschaften:
— — Schriften des Jahres 1908 in 4⁰ und 8⁰.
— — Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, Bd. 24, 1906.

Budapest. K. Ungarische Geologische Reichsanstalt:
— — Mitteilungen aus dem Jahrbuch, Bd. XVI, Heft 5; Bd. XVII, Heft 1; 1908/09.
— — Földtani Közlöny, Bd. 38, Heft 11, 12; Bd. 39, Heft 1—5; 1908/09.
— — Jahresbericht für 1907 (1908).
— Statistisches Bureau:
— — Publikationen, No. 39—41, 1908.
— — Statistisches Jahrbuch, IX. Jahrg., 1906; 1908.

Buenos Aires. Museo nacional:
— — Annales, ser. III, tom. 10, 1909.
— — Le litige des scories et des terres cuites anthropiques des formations néogènes de la République Argentine par Florentino Ameghino, 1909, 4⁰.

Buffalo. Society of natural history:
— — Bulletin, vol. IX, No. 2, 1909.

Buitenzorg (Java). Departement van landbouw:
— — Jaarboek 1908.
— — Ch. Bernard, Algues unicellulaires, 1909.
— — Malayan Ferns. by G. van Alderwerelf van Rosenbourgh, Batavia 1908.
— — Bulletin, No. 22—27, 1909, 4⁰.
— — Mededeelingen, No. 5—8, 1908.

Bukarest. Academia Romana:
— — Analele, ser. II, tom. 30, 1908, 4⁰.
— — Din vieaţa poporului Român. Culegeri şi studii I—III. 1908.
— — Bianu und Hodoş, Bibliografia Româneascâ veche, tom. 2, fasc. 4, 1909, 4⁰.
— — Catalogul manuscriptelor Românesti de Bianu si Caracas, Teil 2, fasc. 1, 2, 1908/09.
— — Crăinicianu, Literatura medicală Românească, 1907.
— — Gesetze, Satzungen etc., 1908; 1909.
— — Grecescu, O schiţare din istoria botanicei, 1908, 4⁰.
— — Mrazec, Despre formarea zăcă mintelor de petrol din România, 1907, 4⁰.
— — Russo, Scrieri, publ. de P. V. Hanes, 1908.
— — Tocilescu, Monumentele epigrafice şi sculpturali P. II, 1908, 4⁰.
— Société des Sciences:
— — Bulletin, anul 47 (1908), No. 5, 6; anul 48 (1909), No. 1.
— Rumänisches Meteorologisches Institut:
— — Observatorul Astronomic si Meteorologie din România, anul 17 (1908), 18 (1909), 4⁰.

Burghausen. K. Humanist. Gymnasium:
— — Jahresbericht 1908/09 mit Programm von Friedrich Schmitt.

Caen. Société Linnéenne de Normandie:
— — Bulletin, ser. VI, vol. 1.
— — Mémoires, vol. 23. fasc. 1.

Cairo. Institut Égyptien:
— — Bulletin, ser. V, tom. 2, fasc. 1, 1908.

Calcutta. Meteorological Department of the Government of India:
— — Memoirs, vol. XVIII, part 2, 4; vol. XIX, part 1; vol. XX, part 3, 6, 7; London 1908—09, 4⁰.
— — Monthly Weather Review, 1908: June—December; 1909: January —August.
— — India Weather Review für 1907, Simla 1908, 4⁰.
— — Rainfall Data of India, Year 17, 1907; 1908, fol.
— — Report 1908/09, Simla 1909, fol.
— — Annual Summary, 1908.
— Government of Bengal:
— — Hrīshikeśa Sāstrī and Nīlamani Cakravartti, a descriptive Catalogue of Sanskrit Manuscripts in the Library of Calcutta Sanskrit College, No. 26.
— Royal Asiatic Society of Bengal:
— — Bibliotheca Indica, N. Ser., No. 1112, 1143, 1152, 1161, 1171, 1179, 1182—1186, 1188—1200.
— — Journal, vol. 73, part 1 (Tit. & Ind.); vol. 74, part 2, 3; 1907/08.
— — Journal and Proceedings, N. S., vol. II (Tit. & Ind.); vol. III, No. 5—10; vol. IV, No. 1—4, Extra-No.; 1907/08.
— Office of Superintendent of Government Printing:
— — Annual Report of the board of Scientific Advice for India for the year 1906/07 and 1907/08, 1908.
— Geological Survey of India:
— — Records, vol. 37, part 2—4; vol. 38, part 1—3, 1908/09, 4⁰.
— — Memoirs, vol. 37, part 1—3.
— — Memoirs, ser. XV, vol. 6, Memoir 1, N. S., vol. II, Memoir 5, 1909, 4⁰.
— — Burrard and Hayden, A Sketch of the Geography and Geology of the Himalaya Mountains and Tibet, part. 4. The geology of Himalaya, 1908, 4⁰.
— — Palaeontologia Indica, N. S., vol. II, No. 4; vol. III, No. 3; 1908.
— Survey of India Office:
— — Technical Art Series, Plates I—VIII, 1908, fol.
— — Memoirs, vol. XXXIV, part 4, 1906.
— — Sketch of the Mineral Resources of India, by T. H. Holland, 1908, 4⁰.

Cambridge (Mass.). Harvard University:
— — Harvard Oriental Series, vol. XI, 1908.
— — Bulletin, vol. 52, No. 7—14; vol. 53, No. 3, 4, 1909.
— — Memoirs, vol. XXXVII, No. 1; vol. XXVII, No. 2.
— Astronomical Observatory of Harvard University:
— — 63th annual Report for 1907/08, 1909.
— — Annals, vol. 54; vol. 56, No. 4; vol. 57, part 2; vol. 58, part 3; vol. 59, No. 2—4; vol. 61, part 2; vol. 64, No. 1—16; vol. 68, part 1; 1908/09. 4⁰.
— — Circular, No. 137—148, 1908, 4⁰.
— — Will. H. Pickering, 4 Separatabdrücke, 1908/09.

Cambridge (Engl.). Observatory:
— — Annual Report for 1908/09; 1909.
— Philosophical Society.
— — Proceedings, vol. 15, part 1, 2, 3, 1909.
— — Transactions, vol XXI, No. 7, 8, 9, 1909, 4⁰.

Capetown. Geological Survey:
— — Annual Report 12 for 1909.
— — Geological Map., Sheet 33, 41, 1908/09.

Catania. Accademia Gioenia di scienze naturali:
— — Atti, serie IV, vol. 20; serie V, vol. 1; 1908, 4⁰.
— — Bollettino, ser. II, fasc. 5—9, 1909.
— Società di storia patria per la Sicilia Orientale:
— — Archivio, anno V, fasc. 3; anno VI, fasc. 1; 1908/09.

Charkow. Société mathématique:
— — Communications, 2e sér., tom. 10; tom. 11, No. 1—4; 1907/09.
— Société de médecine scientifique à l'Université:
— — Traveaux, Jahrg. 1904/07, 1908.
— Université Imperiale:
— — Zapiski 1908, Lief. 4; 1909, Lief. 1—3; 1909.

Cherbourg. Société des sciences naturelles:
— — Mémoires, tom. 36, Paris 1906—07.

Chicago. Academy of Sciences:
— — Bulletin III, 1. 2.
— John Crerar Library:
— — 14th Annual Report for 1908; 1909.
— Field Columbian Museum:
— — Publications, No. 129, 133, 134, 135.
— Natural History Survey:
— — Bulletin VII, 1.

Chicago. University of Chicago Library:
— — The astrophysical Journal, vol. 23, No. 2—5; vol. 23, No. 1—5; vol. 24, No. 1—5; vol 25, No. 1—3, 5; vol. 26, No. 1—4; 1905/07.

Christiania. Videnskabsselskabet:
— — Forhandlinger, Aar 1908; 1909.
— — Skrifter, I. math.-naturwiss. Klasse, 1908; II. histor.-filos. Klasse. 1908.

Chur. Historisch-antiquarische Gesellschaft für Graubünden:
— — 38. Jahresbericht, Jahrg. 1908: 1909.
— Naturforschende Gesellschaft für Graubünden:
— — Jahresbericht, N. F., Bd. 51, Jahrg. 1908/09: 1909.

Cincinnati. Lloyd Library:
— — Bulletin, No. 11 (Reproduction Series, No. 7), 1909.
— University:
— — Record. ser. 1, vol. 5, No. 3—10; vol. 6, No. 2; 1908/09.
— — University Studies, ser. II, vol. 4, No. 1—4; vol. 5, Nr. 1—3.
— — Publications of the Cincinnati Observatory, Nr. 16, 1908, 4⁰.

Clermont. Académie des Sciences, Belles Lettres et Arts:
— — Mémoires, 2. sér., fasc. 7—17, 20, 21, 1894—1909.
— — Bulletin historique et scientifique de l'Auvergne, ser. II, 1897 bis 1907; 1908, No. 1—4; 6—10.
— Société des amis de l'Université:
— — Revue d'Auvergne et Bulletin de l'Université, année 17. 1900; 23, 1906; 24, 1907, No. 2—6; 25, 1908. No. 1, 2.
— — Clermont-Ferrand et le Puy-de-Dôme. 1908.

Cold Spring Harbor. Biological Laboratory:
— — Monographs 7, 1909.

Colmar. Naturhistorische Gesellschaft:
— — Mitteilungen, N. F., Bd. IX, Jahrg. 1907 und 1908; 1908.

Columbia. University of Missouri:
— — Studies, Science Series, vol. II, No. 1, 2 und Titelblatt zu vol. 1 (1902—08), 1908, gr. 8⁰.
— — Bulletin of Laws Observatory, No. 15, 16, 1908, 4⁰.
— — Social Science Series II, 3, 4.

Como. Società storica:
— — Periodico, vol. 18, fasc. 71, 72; vol. 19, fasc. 73; 1909.

Córdoba. Academia Nacional de ciencias:
— — Boletin, tom. XVIII, Teil 3, 1909.

Czernowitz. Franz Josephs-Universität:
— — Die feierliche Inauguration des Rektors für das Jahr 1908/09: 1909.
— — Verzeichnis der Vorlesungen, S.-S. 1909.

Danzig. Technische Hochschule:
— — Schriften des Jahres 1909.
— Westpreußischer Geschichtsverein:
— — Zeitschrift, Heft 51, 1909.
— — Mitteilungen, Jahrg. 8, 1909, No. 1—4.
Darmstadt. Historischer Verein für das Großherzogtum Hessen:
— — Archiv für hessische Geschichte, N. F., Bd. 5 und Ergänzungsband 3, 4; N. F., Bd. 6 und Ergänzungsband 4, 1.
— — Quartalblätter 1908. No. 9—13 und Sachregister zu Jahrg. 1861/90.
Davenport. Academy of Sciences:
— — Proceedings, vol. 12, pag. 95—222.
Delft. Technische Hoogeschool:
— — P. N. Degens, P. Tesch, J. W. van Dijk, A. Wijnberg, Proefschriften 1909.
— — Lijst der periodiken, 2e uitgave, 1909.
Denver (Colorado). Colorado Scientific Society:
— — Proceedings, vol. IX, pag. 65—258, 1908 09.
Dessau. Verein für Anhaltische Geschichte und Altertumskunde:
— — Mitteilungen, Bd. XI, Heft 2, 1909.
Dillingen. Historischer Verein:
— — Archiv für die Geschichte des Hochstifts Augsburg, Bd. 1, Lief. 1; Bd. 2, Lief. 1, 2.
Donaueschingen. Verein für Geschichte und Naturgeschichte der Baar und der angrenzenden Landesteile:
— — Schriften, Heft 12, 1909.
Donauwörth. Historischer Verein:
— — Verfassung und Verwaltung der Reichsstadt Donauwörth (1193 bis 1607) von Hermann Stenger, 1909.
Douai. Union géographique du Nord de la France:
— — Bulletin, année 29, 1908, trim. 4; année 30, 1909, trim. 1—3.
Dresden. K. Sächsischer Altertumsverein:
— — Neues Archiv für sächsische Geschichte, Bd. XXX, 1909.
— Verein für Erdkunde:
— — Mitteilungen, 1909, Heft 8, 9.
— — Mitgliederverzeichnis, April 1909.
— Numismatischer Verein:
— — Blätter für Münzfreunde 44, 6.
— K. Sächsische Landes-Wetterwarte:
— — Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1909, 1. und 2. Hälfte.
— — Dekaden-Monatsberichte, Jahrg. XI, 1908.
Dublin. Royal Irish Academy:
— — Proceedings, vol. XXVII, section A, No. 10—12; section B, No. 6 bis 11; section C, No. 9—18; 1909.

Dublin. Royal Society:
— — The Economic Proceedings, vol. 1, No. 13—16 und Index.
— — The Scientific Proceedings, vol. 11, No. 29—30; vol. 12, No. 1—23.
— — The Scientific Transactions, series II, vol. IX, No. 7—9, Title &c.: 1908/09, 4⁰.

Dürkheim. Pollichia:
— — Mitteilungen, 64. Jahrg., No. 24, 1909.
— Progymnasium:
— — Jahresbericht 1908/09.

Easton (Pa.). American Chemical Society:
— — The Journal, vol. 31, No. 1—12, 1909.

Edinburgh. Royal Society:
— — Proceedings, vol. 29, part 2—8, 1909.
— — Transactions, vol. 46, part 2, 3, 1909, fol.
— Geological Society:
— — Transactions, vol. 9, part 3, 4, 1909.
— Royal Physical Society:
— — Proceedings, vol. 17, No. 1, 1909.

Eichstätt. K. Humanist. Gymnasium:
— — Beilage zum Jahresbericht 1908/09 von J. F. Wirth.

Eisenach. Karl Friedrich-Gymnasium:
— — Jahresbericht für 1908/09.

Eisleben. Verein für Geschichte der Grafschaft Mansfeld:
— — Mansfelder Blätter, 22. Jahrg., 1908; 23. Jahrg., 1909.

Emden. Naturforschende Gesellschaft:
— — 93. Jahresbericht 1907/08.

Erfurt. K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften:
— — Jahrbücher, N. F., Heft 34, 1908.

Erlangen. K. Humanist. Gymnasium:
— — Jahresbericht 1908/09 mit Programm von Heinrich Beckh: Veit Joachim von Jaxheim. 1909.
— K. Universitätsbibliothek:
— — Schriften aus dem Jahre 1908/09 in 4⁰ und 8⁰.

Florenz. Reale Accademia dei Georgofili:
— — Atti, ser. V, vol. 6, disp. 1, 2ª, 3ª, 4ª.
— Biblioteca Nazionale Centrale:
— — Bollettino delle Pubblicazioni Italiane, 1908, Indici; 1909, No. 97 bis 1908.
— Società Asiatica Italiana:
— — Giornale, vol. 19, 1906, part. 1; vol. 21; 1908.

Frankfurt a. M. Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft:
— — Abhandlungen. Bd. 30, Heft 4. 1909, 4⁰.
— — 40. Bericht 1909.
— Physikalischer Verein:
— — Jahresbericht 1907/08.

Freiburg i. Br. Breisgau-Verein Schau ins Land:
— — „Schau ins Land". 1909. 36. Jahrlauf. 1. Hälfte.
— Kirchengeschichtlicher Verein:
— — Freiburger Diözesan-Archiv. N. F., Bd. X. 1909.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Berichte, Bd. 17, Heft 2, 1909.
— Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1908/09 in 4⁰ und 8⁰.

Freiburg (i. Schweiz). Universität:
— — Collectanea Friburgensia. N. F., fasc. X, 1909. gr. 8⁰.

Fürth. K. Humanist. Gymnasium:
— — Jahresbericht 1908/09.

Fulda. Verein für Naturkunde:
— — 9. Bericht für 1908/09.

Genf. Institut National Genevois:
— — Mémoires. tom. 19 (1901—09), 4⁰.
— Observatoire:
— — Observations météorologiques pendant l'année. 1907.
— — Résumé météorologique de l'année. 1907; 1908.
— Société d'histoire et d'archéologie:
— — Bulletin, tom. 3. livr. 3 und 4. 1908/09.
— Société de physique et d'histoire naturelle:
— — Mémoires. vol. 36. fasc. 1, 1909. 4⁰.
— Universität:
— — Séance sol. 4. Juin 1908. 1908.
— — Schriften aus dem Jahre 1908/09 in 4⁰ und 8⁰.
— Redaktion des „Journal de chimie physique":
— — Journal. tom. 1—6; tom. 7. No. 1—8 und Titel und Register zu tom. 7.

Gent. Vlaamsche Academie van tal- en letterkunde:
— — Verslagen. Oktober—November 1909.

Giessen. Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1908/09 in 4⁰ und 8⁰.
— Oberhessischer Geschichtsverein:
— — Mitteilungen. N. F., Bd. 16, 1908.

Giessen. Gesellschaft für Natur- und Heilkunde:
— — Bericht. N. F., medizinische Abteilung, Bd. 3, 4, 1908; naturwissenschaftliche Abteilung, Bd. 2. 1908.

Glasgow. Geological Society:
— — Transactions, vol. XIII. 1, 2.
— — Macnair and Mort, History of the Geological Society of Glasgow, 1908.

Godesberg (b. Bonn). Naturwissenschaftlicher Verlag:
— — Unsere Welt, Jahrg. 1 (1909), No. 1.

Görlitz. Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Neues Lausitzisches Magazin, Bd. 84, 1908; Bd. 85, 1909.
— — Codex diplomaticus Lusatiae superioris, III. Bd., 5. Heft, 1909.
— — Scheibe, Baugeschichtliche Entwicklung von Kamenz, 1909.
— — Döhler, Geschichte von Lomnitz und Bohre, 1909.
— — Steitz, Friedr. Üchtritz, 1909.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Abhandlungen, Bd. 26.

Göttingen. K. Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Göttingische Gelehrte Anzeigen. 1908, No. 11, 12; 1909. No. 1—12.
— — Abhandlungen, N. F., a) Philol.-hist. Klasse, Bd. XI, No. 2—5; b) Math.-phys. Klasse, Bd. VI, No. 4; Bd. VII, No. 3; Berlin 1909, 4⁰.
— — Nachrichten, a) Philol.-hist. Klasse, 1908, Heft 6; 1909, Heft 1—3; b) Math.-phys. Klasse, 1908, Heft 4; 1909. Heft 1 und 2; c) Geschäftliche Mitteilungen. 1909. Heft 1; Berlin, 4⁰.

Gothenburg. K. Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Handlingar, IV. Folge, Bd. 10, 1907; Bd. 11. 1908.
— Högskola:
— — Årsskrift. Bd. 11 (1905); Bd. 13 (1907); Bd. 14 (1908).

Granville (Ohio). Scientific Laboratories of Denison University:
— — Bulletin, vol. XIV, articles 11—16.

Graz. Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark:
— — Beiträge zur Erforschung steirischer Geschichte, 36. Jahrg., 1908.
— — Mitteilungen, Jahrg. Bd. 45, Heft 1 und 2.
— Historischer Verein für Steiermark:
— — Zeitschrift, VI, 1—4; VII, 1—4.
— Universität:
— — Verzeichnis der Vorlesungen im S.-S. 1909 und W.-S. 1909/10.
— — Verzeichnis der akademischen Behörden etc. 1909/10.

Greifswald. Rügisch-Pommerscher Geschichtsverein:
— — Pommersche Jahrbücher, Bd. 10, 1909.
— Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern:
— — Mitteilungen, 40. Jahrg., 1908, Berlin 1909.

Grenoble. Université.
— — Annales, 21, 1; Table analytique zu 1—20.
Grimma. Fürsten- und Landesschule:
— — Jahresbericht 1908/09; 1909, 4⁰.
Gunzenhausen. K. Realschule:
— — Jahresbericht 16, 1908/09.

Haag. K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indie:
— — Bijdragen, VII. Reeks, deel 8, afl. 1—4; deel 9, afl. 1, 2.
— — Catalogus der Koloniale Bibl., 1. Nachtrag, 1909.
— — Middelberg E., Handindustrie in Surinam, Amsterdam 1908
Haarlem. Musée Teyler:
— — Catalogue du Cabinet Numismatique de la fondation Teyler, 2e édition, 1909.
— — Archives, sér. II, vol. 11, partie 3, 1909, 4⁰.
— Société Hollandaise des Sciences:
— — Archives Néerlandaises des sciences exactes, sér. II, tom. 14, livr. 1—5, La Haye 1909.
Hall. K. K. Franz Joseph-Gymnasium:
— — Programm 1908/09; 1909.
Halle. K. Leopoldinisch-Karolinische Deutsche Akademie der Naturforscher:
— — Leopoldina, Heft 45, No. 1—12 und Titel.
— — Nova Acta, Bd. 88, 89; 1908, 4⁰.
— Deutsche Morgenländische Gesellschaft:
— — Zeitschrift, Bd. 62, Heft 4; Bd. 63, Heft 1—3, Leipzig 1909.
— Universität:
— — Preisbewerbung 1908/1909; 1909, 4⁰.
— — Schriften aus dem Jahre 1908/09, in 4⁰ und 8⁰.
— — Verzeichnis der Vorlesungen, S.-S. 1909 und W.-S. 1909/10; 1909.
— — Amtliches Verzeichnis des Personals etc. für Ostern—Mich. und W.-S. 1909/10.
— — Osterprogramm (Lütgert) 1909.
— — Chronik 1908/09.
— Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen u. Thüringen:
— — Zeitschrift für Naturwissenschaften, Bd. 80, Heft 3—4; Bd. 81, Heft 1—4; Leipzig 1908/09.
— Sächsisch-Thüringischer Verein für Erforschung des vaterländischen Altertums:
— — Neue Mitteilungen, Bd. 24, Heft 1.
— — Jahresbericht für 1907/08 und 1908/09; 1909.

Hamburg. Mathematische Gesellschaft:
— — Mitteilungen, Bd. IV, Heft 9. Leipzig 1909.
— Deutsche Seewarte:
— — 31. Jahresbericht für das Jahr 1908: 1909, 4⁰.
— — 8. Nachtrag zum Katalog der Bibliothek der Deutschen Seewarte, 1909.
— Stadtbibliothek:
— — Jahrbuch der wissenschaftlichen Anstalten Hamburgs, Jahrg. 25, 1907, und Beiheft 1—7.
— — Jahresbericht der Verwaltungsbehörden, 1907. 4⁰.
— — Staatshaushaltsberechnung 1907, 4⁰.
— — Entwurf des hamburgischen Staatsbudgets für 1907, 4⁰.
— — Verhandlungen zwischen Senat und Bürgerschaft. 1908, 4⁰.
— Sternwarte:
— — Astronomische Abhandlungen, Bd. 1, 1909.
— — Jahresbericht für 1907 und 1908.
— Verein für Hamburgische Geschichte:
— — Mitteilungen, 28. Jahrg., 1908; 1909.
— — Zeitschrift, Bd. XIV, 1.
— Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Verhandlungen, III. Folge, Bd. 16, 1909.
Hanoi. École Française d'Extrême Orient:
— — Bulletin, tom. 8. No. 3, 4; tom. 9, No. 1—3: 1908/09. 4⁰.
— — A. Guézinot, Répertoire d'épigraphie Jaina, 1908.
Hannover. Historischer Verein für Niedersachsen:
— — Zeitschrift, Jahrg. 1908, Heft 1—4; 1909. Heft 1—4.
Hartford (Conn.). Special-commission app. to investigate tuberculosis:
— — Report 1908.
Heidelberg. Astrophysikalisches Institut:
— — Publikationen. Bd. III, No. 3, 4⁰.
— Großherzogliche Sternwarte:
— — Mitteilungen, No. X—XVIII.
— — Veröffentlichungen. Bd. 5, 1909.
— Universität:
— — Schriften der Universität aus dem Jahre 1908/09 in 4⁰ und 8⁰.
— — Windelband, Akademische Rede, 1909.
— Historisch-philosophischer Verein:
— — Neue Heidelberger Jahrbücher, Bd. 16, No. 1, 1909.
— Naturhistorisch-medizinischer Verein:
— — Verhandlungen, N. F., Bd. VIII, Heft 5; Bd. IX, Heft 1—4; Bd. X, Heft 1, 2; 1908/09.

Heidelberg. Reichslimeskommission:
— — Der obergermanisch-rätische Limes des Römerreiches, Lief. 31 und 32, 1909, 4⁰.

Helsingfors. Institut météorologique central:
— — Observations météorologiques 1896/97; 1897/98; fol.
— — Meteorologisches Jahrbuch für Finnland, Bd. 2, 1902, 4⁰.
— Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1908/09 in 4⁰ und 8⁰.
— Sällskapet för Finlands Geografi:
— — Fennia, 23—27, 1905/09.
— — Statistik undersökning af socialekonomista förnållanden i Finlands landskommuner, År 1901, III u. Atlas, 1908 in fol. und 4⁰.
— Societas pro Fauna et Flora Fennica:
— — Acta, vol. 24, 29—32, 1904/09.
— — Meddelanden, Heft 33—35, 1906/09.
— — Festschrift, Prof. J. A. Palmén gewidmet, Bd. I, II, 1905/07, 4⁰.
— Societas Scientiarum Fennica:
— — Acta, tom. 33, 34, 35^{1-10} und Titel und Register; 36^{1-4} und Titel und Register; $37^{1,5-8}$; 1907/09; 4⁰.
— — Bidrag till kännedom af Finlands Natur och Folk, Heft 64—66, 1907/08.
— — Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societatens Förhandlingar, 48—50, 1906/09.

Hermannstadt. Verein für siebenbürgische Landeskunde:
— — Archiv, N. F., Bd. 35, Heft 3, 4; Bd. 36, Heft 1, 2, 4.
— Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften:
— — Verhandlungen und Mitteilungen, Bd. 58, Jahrg. 1908; 1909.

Hildburghausen. Verein für Sachsen-Meiningische Geschichte:
— — Schriften, Heft 58 und 59, 1909.

Igló. Ungarischer Karpathen-Verein:
— — Jahrbuch, 36. Jahrg., 1909.

Innsbruck. Ferdinandeum:
— — Zeitschrift, 3. Folge, Heft 53, 1909.

Irkutsk. Geographische Gesellschaft:
— — Iswestija, tom. 35, No. 3; tom. 36, 37; 1905/06.
— Observatoire physique central Nicolas:
— — Annales, 1905, Supplément, 1909; 1906, partie 1 und partie 2, fasc. 1, 2.
— — Observat. météorol. en Mandchourie, 1. fasc., 1909.

Ithaca. Journal of Physical Chemistry:
— — The Journal, vol. 13, No. 1—9, 1909, gr. 8⁰.

Jassy. Universität:
— — Annales scientifiques, tom. 5, fasc. 4; tom. 6, fasc. 1; 1909.
Jena. Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft:
— — Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, Bd. 44, Heft 2—4; Bd. 45, Heft 1, 2; 1909.
— — Denkschriften, Bd. XIII, 1, Lief. 1, 2; Bd. XV, 3. Lief. 1, 2; 1908/09.
— Verein für Thüringische Geschichte und Altertumskunde:
— — Zeitschrift, N. F., Bd. 19, Heft 1.
Johannesburg. Transvaal Meteorological Department Observatory:
— — Annual Report 1907/08. Pretoria 1909, fol.
Jurjew (Dorpat). Gelehrte Esthnische Gesellschaft:
— — Sitzungsberichte 1907 und 1908, 1908/09,
— Naturforschende Gesellschaft bei der Universität:
— — Sitzungsberichte, Bd. XVII, 3, 4; Bd. XVIII, 1.
— — Schriften, Bd. 19, 1909.
— Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1908/09 in 4^0 und 8^0.
— — Učenija Zapiski, Acta et Commentationes, Jahrg. 16, No. 1—8.

Karlsruhe. Badische Historische Kommission:
— — Siegel der badischen Städte, Heft 3, Heidelberg 1909.
— — Zeitschrift für die Geschichte des Oberrheins, N. F., Bd. 24, Heft 1—4, Heidelberg 1909.
— — Neujahrsblätter 1909, Heidelberg 1909.
— — Oberrheinische Stadtrechte, Abt. I, Heft 8; Abt. II, Heft 1; Heidelberg 1909.
— — 1883—1908. 25 Jahre der Badischen Historischen Kommission. Heidelberg 1909.
— Zentralbureau für Meteorologie und Hydrographie:
— — Jahresbericht für das Jahr 1908; 1909, fol.
— Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Verhandlungen, Bd. 21, 1907/08; 1909.
Kasan. Société physico-mathématique:
— — Bulletin, IIe sér., tom. 16. No. 2, 1908.
— Universität:
— — Učenija Zapiski, Bd. 75, Heft 12; Bd. 76. Heft 1—9 und 11; 1908/09.
— — 7 Universitätsschriften, 1907/08.
— Hygienisches Kabinet und physiologisches Laboratorium der Universität:
— — Arbeiten von Ordlov, Sinakevic, Tofanov, Calusov, Kitaev; 1908.
Kassel. Verein für hessische Geschichte und Landeskunde:
— — Zeitschrift, Bd. 43 (N. F., Bd. 35), 1909.

Kassel. Verein für Naturkunde:
— Abhandlungen und Bericht 52, 72, 73, 1907/09.

Kaufbeuren. K. Progymnasium:
— — Jahresbericht 1908/09; 1909.

Kempten. K. Humanist. Gymnasium:
— — Jahresbericht 1908/09 und Programm von Georg Kellermann.

Kiel. Gesellschaft für schleswig-holsteinische Geschichte:
— — Zeitschrift, Bd. 39, Leipzig 1909.
— Kommission zur wissenschaftlichen Untersuchung der deutschen Meere:
— — Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen, N. F., Bd. 9, Abteilung Helgoland; Bd. 10, Abteilung Kiel und Ergänzungsheft.
— K. Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1908/09 in 4⁰ und 8⁰.

Kiew. Universität:
— — Izvěstija, Bd. 48, No. 11, 12; Bd. 49, No. 1—7; 1908/09.
— Ukrainische Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Mitteilungen, Bd. 5.

Klagenfurt. Naturhistorisches Landesmuseum:
— — Carinthia II, 98. Jahrg., No. 4-6; 99. Jahrg., No. 3—5; 1908/09.
— — Jahresbericht 1908.
— — Jahrbuch, Heft 28.
— Geschichtsverein für Kärnten:
— — Jahresbericht über 1907; 1908.
— — Carinthia I, Jahrg. 1908, No. 1—6; Jahrg. 1899, No. 1, 2.

Klausenburg. Siebenbürgische Museums-Gesellschaft:
— — Erdélyi Múzeum, Bd. 26, Heft 1—5; 1909, 4⁰.

Köln. Gesellschaft für rheinische Geschichtskunde:
— Jahresbericht 28 (1908), 1909.

Königsberg. Physikalisch-ökonomische Gesellschaft:
— — Schriften, 49. Jahrg., 1908; 1909.
— Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1908/09.
— K. Sternwarte:
— — Astronomische Beobachtungen, 42 und 43, 1.

Kopenhagen. Ministerium für Kirchen- und Unterrichtswesen:
— — De danske Runemindesmaerker af L. Wimmer, Teil I, 1; IV, 2; 1893/98.
— K. Akademie der Wissenschaften:
— — Oversigt, 1908, No. 6; 1909, No. 1—5.
— — Mémoires, Section des lettres, sér. 7, tom. 1, No. 3; Section des sciences, sér. 7, tom. 6, No. 3, 4; tom. 7, No. 1; tom. 8, No. 1—3.

Kopenhagen. Botanischer Garten:
— — Arbeider, No. 1—42, 44—50.
— — Lind J., Separat-Abdruck aus Annales mycologici.
— Conseil permanent international pour l'exploration de la mer:
— — Rapports et Procès-verbaux, vol. 10, 11, 1907/08.
— — Bulletin trimestriel, année 1906/07, part. suppl.; année 1907/08, A–C, D, 4⁰.
— — Publications de circonstance, No. 43—47, 1909.
— — Bulletin statistique des pêches maritimes, vol. III, 1909, 4⁰.
— Gesellschaft für nordische Altertumskunde:
— — Aarböger, 1908, II. Raekke, Bd. 23.
— Congrés international des orientalistes:
— — Actes du 15. Congrés, 1909.

Krakau. Akademie der Wissenschaften:
— — Catalogue of Polnish Scientific Literature, tom. VIII, 1—4; tom. IX, 1, 2; 1907/09.
— — Monumenta med. aevi historica. tom. 16, 1901, 4⁰.
— — Anzeiger (Bulletin international), 1. Classe de philologie, 1908, No. 6—10; 1909. Nr. 1—8; 2. Classe des sciences mathématiques, 1908, No. 9, 10; 1909, No. 1—8.
— — Materialy i Prace Komisyi językowej, tom. 2, fasc. 2, 1906.
— — Rocznik, Rok 1907/08.
— — Sprawozdanie komisyi fizyograficzny, tom. 42, 1909.
— — Atlas geologiczny Galicyi, tom. 23 mit Text (1909).
— — Rozprawy, histor.-filozof., ser. II, tom. 26 und 27, 1908/09.
— — „ filolog., ser. II, tom. 30.
— — Materialy antropologiczno-archeologiczne i etnograficzne, tom. 10 (1909).
— — Zapalocorez Hugo, Conspectus florae Galiziae criticus, tom. II, 1909.
— — Szelagowski Adam, Najstarsze drogi 2 polskina Wschod, 1909.
— — Abraham W. Jerkób Strepa Kocak, 1908.

Kyoto. Imperial University:
— — Calendar, 1909/10.
— — Memoirs, vol. 1, 1904—08.

Lancester. American Association for the Advancement of Science:
— — Science, N. S., vol. 29, 1909, No. 734.

Landau (Pfalz). K. Humanist. Gymnasium:
— — Jahresbericht 1908/09 mit Programm von D. Wollner.

Landsberg a. L. K. Realschule:
— — 31. Jahresbericht 1908/09.

Landshut. Historischer Verein:
— — Verhandlungen, Bd. 45. 1909.

Lausanne. Société Vaudoise des sciences naturelles:
— — Bulletin, 5e sér., vol. 44, No. 164, 165; vol. 45, No. 166, 167; Titel und Register zu Bd. 44; 1908/09.
— Institut agricole:
— — Observations, année 22.

Lawrence. University of Kansas:
— Bulletin, vol. 9, No. 5. 1908.

Leiden. Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde:
— — Tijdschrift, deel 26. afl. 3. 4; deel 27, afl. 1—4; deel 28. afl. 1, 2; 1907/09.
— — Handelingen en Mededeelingen, 1907/08 und 1908/09.
— — Levensberichten, 1907/08 und 1908/09.
— Sternwarte:
— — Verslag 1996—1908; 1909.

Leipzig. K. Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Abhandlungen der philol.-hist. Klasse, Bd. 26, No. 3—5; Bd. 27. No. 1—27; 1909, gr. 8⁰.
— — Abhandlungen der math.-phys. Klasse, Bd. 30, No. 6; Bd. 31; Bd. 32, No. 1; 1909, gr. 8⁰.
— — Berichte über die Verhandlungen der philol.-hist. Klasse, Bd. 60, No. 4—8; Bd. 61, No. 1, 2; 1909.
— — Berichte über die Verhandlungen der math.-phys. Klasse, Bd. 59, No. 1—4; No. 60, No. 6—8; Bd. 61, No. 1—3; 1907/09.
— Fürstlich Jablonowskische Gesellschaft:
— — Jahresbericht 1909.
— — Preisschriften. 38. Bd., Geschichte des Griechischen Vereinswesens von Poland, 1909, 4⁰.
— K. Universität:
— — Festschrift zur Feier des 500jährigen Bestehens der Universität Leipzig, Bd. I, II, III, IV, 1, 2; 1909.

Leisnig. Geschichts- und Altertumsverein:
— — Mitteilungen, Heft 13, 1908.

Lemberg. K. K. Franzens-Universität:
— — Programm der Vorlesungen 1908/09 und 1909/10.
— Société polonaise pour l'avancement des sciences:
— — Bulletin, I—VIII, 1901/08.

Lima. Cuerpo de ingenieros de minas del Perú:
— — Boletin. No. 63—74. 1908/09.

Lindenberg. K. Preuß. Aëronautisches Observatorium:
— — Ergebnisse der Arbeiten des Jahres 1907; 1908, 4⁰.

Linz. Museum Francisco-Carolinum:
— — 67. Jahresbericht, 1909.
Lissabon. Academia de sciencias de Portugal:
— — Trabalhos, ser. I, tom. 1, 1908.
— Sociedade de geographia:
— — Boletim, 26a ser., 1908, No. 9—12; 27a ser., 1909, No. 1—11.
Loewen. Université Catholique:
— — Publications académiques de l'année 1907—08.
— Zeitschrift „La Cellule":
— — La Cellule, tom. XXV, fasc. 1, 1909, 4⁰.
Lohr. K. Humanist. Gymnasium:
— — Jahresbericht 1908/09, mit Programm von Wilh. Donderer.
London. Redaktion der Zeitschrift: Illuminating Engineer:
— — Illuminating Engineer, 1908, 1—12; 1909, 1—12.
— R. Institution of Great Britain:
— — Proceedings, vol. 18, part 3.
— The English Historical Review:
— — Historical Review, vol. 24, No. 93—96, 1909.
— Royal Society:
— — Proceedings, ser. A, vol. 81, No. A 550; vol. 82, No. 551—558; vol. 83, No. 559, 560. Ser. B, vol. 80, No. B 544, 545; vol. 81, No. B 546—552.
— — Year-Book 1909.
— — Philosophical Transactions, ser. A, vol. 208, 209; ser. B, vol. 200; 1909, 4⁰.
— — National Antarctic Expedition Magnetic Observations, 1909, 4⁰.
— — Reports of the Evolution Committee. Report IV, 1908.
— — Report of a magnetic survey of South Africa, by Beattie, 1909.
— R. Society of Arts:
— — Journal No. 2974.
— R. Astronomical Society:
— — Monthly Notices, vol. 69, No. 2—9 (Suppl.-number, 1909) und vol. 70, No. 1.
— — Memoirs, vol. 57, part 3, 4 und Appendix II to vol. 57; vol. 58; vol. 59, part 1—3; 1908/09, 4⁰.
— Chemical Society:
— — Journal, No. 555—556 und Suppl.-number vols XCIII and XCIV, 1908/09.
— — Proceedings, vol. 24, Titel und Register; vol. 25, No. 350—364.
Geological Society:
— — The Quarterly Journal, vol. 65, part 1, 2, 1909.
— — Geological Literature for the year 1908; 1909.
— — The Centenary 1907; 1609.

London. R. Historical Society:
— — List of members, 1909.
— Linnean Society:
— — The Darwin-Wallace celebration held on 1. July 1908; 1908.
— — Proceedings. Session 121; 1908/09.
— — The Journal, a) Botany, vol. 38, No. 268; vol, 39, No. 269–271; b) Zoology, vol. 30, No. 199, 200; vol. 31, No. 205, 206.
— — List of the Linnean Society 1909/10.
— — Transactions, ser. 2, Zoology, vol. 11, part 1–5; vol. 12, part 4, 5; Botany, vol. 7, part 10–12.
— R. Medical and Chirurgical Society:
— — Medico-chirurgical Transactions, vol. 19, 1907.
— R. Microscopical Society:
— — Journal 1909, part 1—6.
— Zoological Society:
— — Proceedings, 1908, Nov., Dec.; 1909, part 1–3.
— — Transactions, vol. 19, part 1.
— Zeitschrift „Nature“:
— — Nature, No. 2045—2096, 4⁰.
— Redaktion der Zeitschrift „Jon“:
— — Jon, vol. 1, fasc. 2–6.
— R. Physical Society:
— — Proceedings, vol. 17, No. 6.
Lüneburg. Museums-Verein für das Fürstentum Lüneburg:
— — Lüneburger Museumsblätter. Bd. 1, Heft 6, 1909.
Lüttich. Société géologique de Belgique:
— — Annales, tom. 35, livr. 4; tom. 36, livr. 1–4.
— Société Royale des Sciences:
— — Mémoires, III[e] sér., tom. 8, Bruxelles 1908.
Lund. Universität:
— — Acta Universitatis Lundensis, N. Ser., afd. I, 1, 1905; 2, 1906; 3, 1907; 4, 1908; afd. II, 4, 1908.
Luxemburg. Section historique de l'Institut Grand-Ducal:
— — Publications, vol. 54, 56, 57; 1909.
Luzern. Historischer Verein der fünf Orte:
— — Der Geschichtsfreund, Bd. 64, Stans 1909.
Lyon. Société d'agriculture, sciences et industrie:
— — Annales, 1907; 1908, gr. 8⁰.
— Société Linnéenne:
— — Annales, tom. 55, 1909.
— Universität:
— — Annales, N. Sér., I. Sciences, Médecine, fasc. 22, 24; II. Droit, Lettres, fasc. 20; 1908.

Madison. Wisconsin Academy of Sciences:
— — Transactions. vol. XVI, part 1, No. 1—6, 1909.
— Washburn Observatory:
— — Publications. vol. XII, 4⁰.
— Astronomical and astrophysical Society of America:
— — Circular respecting Halleys Comet 1910.
— Wisconsin Geological and Natural History Survey:
— — Karten zu Bulletin No. 14 und Bulletin No. 20; 1908.

Madras. Government:
— — Madras District Gazetteers: Malabar and Anjengs, vol. 1. 1908.
— Kodaikanal and Madras Observatories:
— — Annual Report for 1908; 1909, fol.
— — Bulletin, No. 14—18, 1909, 4⁰.

Madrid. R. Academia de ciencias exactas:
— — Revista, tom. 4—7; 10—12; tom. 8, No. 1—3.
— — Anuario, 1909.
— — Memorias, tom. XV; XXVI, fasc. 1, 2.
— R. Academia de la historia:
— — Boletín, tom. 54, cuad. 1—6; tom. 55. cuad. 1-5.

Magdeburg. Museum für Natur- und Heimatkunde:
— — Abhandlungen und Berichte. Bd. 1. Heft 4, 1908.

Mailand. Comitato per le onoranze a Franzesco Brioschi:
— — Opere, tom. V, 1909.
— R. Istituto Lombardo di scienze:
— — Rendiconti, ser. II, vol. 41, fasc. 17—20; vol. 42, fasc. 1—15.
— — Atti della fondazione scientifica Cagnola, vol. 22, 1909.
— Museo storico civico:
— — Raccolta Vinciana, fasc. 5, 1909.
— R. Osservatorio di Brera:
— — Pubblicazioni, No. 45, 1908, 4⁰.
— Società Italiana di scienze naturali:
— — Atti, vol. 47. fasc. 3, 4; vol. 48, fasc. 3; 1909.
— Società Storica Lombarda:
— — Archivio Storico Lombardo, ser. IV, anno 35, fasc. 20, 21; anno 36, fasc. 22, 23, 1908/09.

Mainz. Römisch-germanisches Zentralmuseum:
— — Mainzer Zeitschrift, Jahrg. 4, 1909, 4⁰.

Manchester. Literary and philosophical Society:
— — Memoirs and Proceedings, vol. 53, part 1-3. 1908/09.

Mannheim. Verein für Geschichte:
— — Mannheimer Geschichtsblätter, Jahrg. 10, 1909, No. 1—12, 4⁰.
— Altertumsverein:
— — Katalog der Ausstellung 1909.

Mantua. R. Accademia Virgiliana:
— — Atti e Memorie, N. Ser., vol. I, parte 2; vol. 2, parte 1. 1908/09.
Marburg. Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1908/09 in 4⁰ und 8⁰.
Maredsous. Abbaye:
— — Revue Bénédictine, année 24, Titel und Register; année 26, No. 1—4; 1909.
Marseille. Faculté des sciences:
— — Annales, tom. XVII, fasc. V, 1908, 4⁰.
Medford (Mass.). Tufts College:
— — Studies II, 3.
Meiningen. Hennebergischer altertumsforschender Verein:
— — Neue Beiträge zur Geschichte deutschen Altertums, Lief. 22, 1909.
Meissen. Naturwissenschaftliche Gesellschaft Isis:
— — Mitteilungen, Bd. VII, 4. 1909.
— Fürsten- und Landesschule St. Afra:
— — Jahresbericht für das Jahr 1908/09, 1909, 4⁰.
Melbourne. Royal Society of Victoria:
— — Proceedings, N. Ser., vol. 21, part 2; vol. 22, part 1; 1909.
Metten. K. Humanist. Gymnasium:
— — Jahresbericht 1908/09.
Metz. Académie des sciences:
— — Mémoires, sér. 2, année 87 (1905—06); 1908.
— — Table générale des mémoires. 1819—1903; 1908.
— Gesellschaft für lothringische Geschichte:
— — Jahrbuch, 20. Jahrg., 1908. 4⁰.
— Städtisches Museum:
— — Bericht 1907/08, 1909, 4⁰.
Mexiko. Instituto geológico:
— — Parergones, tom. 2, No. 7—10; tom. 3. No. 1, 2; 1908/09.
— — Boletín, No. 17, 26, 1908, 4⁰.
— Observatorio meteorológico-magnético central:
— — Boletín mensual, 1904 Abril, Novembre, Dicembre; 1905 Enero; 1908 Agosto—Dicembre; 1909 Enero—Abril, 4⁰.
— — Servicio meteorologico, 1909 Enero—Marzo.
— Observatorio astronómico nacional de Tacubaya:
— — Anuario, año 30, 1909.
— Sociedad cientifica „Antonio Alzate":
— — Memorias y revista, tom. 25, No. 4—8; tom. 26, No. 10—12; tom. 27, No. 1—3; 1907/09.
Modena. R. Accademia di scienze, lettere ed arti:
— — Memoire, ser. III, vol. 7, 1908, 4⁰.

Modena. R. Accademia di scienze, lettere ed arti:
— — Atti, ser. IV, vol. 7, 1905; vol. 8, 1906; vol. 9, 1907; vol. 10. 1908; 1906/08.
Monaco. Musée et Institut océanographique:
— — Bulletin, No. 126–153, 1909.
— — Résultats des Campagnes scientifiques accomplies sur son Yacht par Albert, Prince de Monaco, fasc. 34, 1909, 4⁰.
Montevideo. Museo nacional:
— — Anales, vol. VII, tom. 4, entrega 1; 1909, 4⁰.
Montpellier. Académie de sciences et lettres:
— — Bulletin mensuel, 1909, Nr. 1—7.
Montreal. Numismatic and Antiquarian Society:
— — The Canadian Antiquarian and Numismatic Journal, ser. III, vol. 6, No. 1–3; 1909.
Moskau. Öffentliches Museum:
— — Otčet, Jahrg. 1903, 1906, 1908.
— Société Impériale des Naturalistes:
— — Bulletin, année 1907, No. 4; année 1908, No. 1, 2; 1909.
— Mathematische Gesellschaft:
— — Matematitscheskij Sbornik. Bd. 27, Heft 1.
— Universität:
— — Meteorologische Beobachtungen im Jahre 1905, 1906 u. 1907.
— Lazarevsches Institut:
— — Trudy, Lief. 16, 1. 27—29, 1.
— — Leyst, Luftelektrische und meteorologische Beobachtungen. Moskau 1907. S. A.
Mount Hamilton (California). Lick Observatory:
— — Publications, vol. VIII, 1908, 4⁰.
— — Bulletin, No. 98. 145—158, 160—172.
Mülhausen i. E. Historisches Museum:
— — Bulletin I—XXXII (1876—1908).
München. K. Staatsministerium des Innern für Kirchen- und Schulangelegenheiten:
— — Alphabetisches Verzeichnis der blühenden adeligen Familien im Königreich Bayern, 1909.
— K. Staatsministerium für Verkehrsangelegenheiten:
— — Preisverzeichnis der Zeitungen etc. für das Jahr 1910, Abt. I und Nachträge für 1909, fol.
— Statistisches Amt:
— — Einzelschriften, No. 8, 1909.
— — Mitteilungen, Bd. 21, Heft 1; 4, I, II und Anhang zu Bd. 21, 1909, 4⁰.

München. Statistisches Amt:
— — Wahlstatistik für München, 1909.
— K. Generalkonservatorium der Kunstdenkmale und Altertümer Bayerns:
— — Die vorgeschichtlichen Denkmale des Königreichs Bayern, 1. Bd., 1909, 4⁰.
— K. Ludwigs-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1908/09 mit Programm von M. Offner.
— K. Luitpold-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1908/09 mit Programm von H. Morin.
— K. Maximilians-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1908/09 mit Programm von H. Stadler.
— K. Theresien-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1908/09 mit Programm von Martin Vogt.
— K. Wilhelms-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1908/09 mit Programm von Joachimsen.
— K. Wittelsbacher Gymnasium:
— — Jahresbericht 1908/09 mit Programm von H. Weber.
— K. Hof- und Staatsbibliothek:
— — Alphabetisches Zeitschriftenverzeichnis, 1909.
— — Catalogus Codicum Manuscriptorum. tom. I, p. 5, 1909.
— K. Realgymnasium:
— — Jahresbericht 45. 1908/09.
— Hydrotechnisches Bureau:
— — Jahrbuch, IX. Jahrg., Heft 4; X. Jahrg., Heft 1 und 2.
— — Veröffentlichungen: Ergebnisse der Wassermessungen im [1] Rhein- und Elbegebiet und [2] im Donaugebiet. 1899—1909.
— Bayerischer Landtag:
— — Stenographische Berichte und Beilagen.
— K. Luitpold-Kreisoberrealschule:
— — Jahresbericht 2, 1908/09 mit Programm von Dröber.
— K. Ludwigs-Kreisrealschule:
— — Jahresbericht 76, 1908/09 mit Programm v. E. Amson.
— K. Maria Theresia-Kreisrealschule:
— — Jahresbericht 1908/09.
— K. Bayerische Technische Hochschule:
— — Bericht über das Studienjahr 1907/08; 1909, 4⁰.
— — Programm für das Studienjahr 1908/09 und 1909/10; 1909.
— — Personalstand im W.-S. 1908/09 nnd S.-S. 1909,
— — Schriften aus dem Jahre 1907/08; 1909.
— — v. Dyck (Walter), Die neuen chemischen Institute der K. Technischen Hochschule, München 1909.

München. Metropolitan-Kapitel München-Freising:
— — Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1909.
— — Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising, 1909, Nr. 1—36 und Register.
— Universität:
— — Personalstand, S.-S. 1909 und W.-S. 1909/10.
— — Schriften aus dem Jahre 1908/09 in 4⁰ und 8⁰.
— — Verzeichnis der Vorlesungen, S.-S. 1909 und W.-S. 1909/10; 1909, 4⁰.
— Ärztlicher Verein:
— — Sitzungsberichte, Bd. 18, 1908; 1909.
— Historischer Verein von Oberbayern in München:
— — Oberbayerisches Archiv, Bd. 53, Heft 1.
— — Altbayerische Monatschrift, Jahrg. 7, No. 3—6; Jahrg. 8, No. 1—6; Jahrg. 9, No. 1—4.
— Kaufmännischer Verein:
— — 35. Jahresbericht, 1909.
— Ornithologische Gesellschaft in Bayern:
— — Verhandlungen, 1908, Bd. IX, 1909.
— Meteorologische Zentralstation:
— — Übersicht über die Witterungsverhältnisse im Königreich Bayern während der Monate November und Dezember 1908, Januar bis Oktober 1909, 4⁰.
— — Veröffentlichungen: Deutsches meteorologisches Jahrbuch (Bayern), 1904—1907.

Münster. Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens:
— — Zeitschrift für vaterländische Geschichte, Bd. 66, Abt. 2, 1908.
— Provinzialverein für Wissenschaft und Kunst:
— — 28.—37. Jahresbericht.

Nancy. Académie de Stanislas:
— — Mémoires, 6ᵉ sér., tom. 5, 1907/08.

Neapel. R. Istituto d'incorragiamento:
— — Atti 1907 und 1908, 4⁰.
— Società Reale:
— — Rendiconto della R. Accademia di scienze fisiche, ser. III, vol. 14, fasc. 8—12; vol. 15, fasc. 1—7; 1908/09; gr. 8⁰.
— Zoologische Station:
— — Mitteilungen, Bd. 19, Heft 2 und 3, Berlin 1909.

Neisse. Gesellschaft Philomatie:
— — 34. Bericht, 1906/08,

Neuburg a. D. Historischer Verein:
— — Neuburger Kollektaneen-Blatt, 70. Jahrg., 1906.

Neuchâtel. Académie:
— — Recueil des travaux, publ. par la faculté des lettres, fasc. 1—4, (1905—1908).
— Société des sciences naturelles:
— — Bulletin, tom. 35, 1907/08; 1909.

New-Castle (upon-Tyne). Institute of Engineers:
— — Transactions, vol. 58, No. 7; vol. 59, No. 1—8; 1909.
— — Annual Report for the year 1907/08; 1908.
— — Reports of accounts for the year 1908/09.

New-Haven. American Oriental Society:
— — Journal, vol. 29; vol. 30, part 1; 1909.
— Yale University:
— — Transactions of the Connecticut Academy etc., vol. XIV, pag. 59—290; vol. XV; 1908/09.
— — Yale Review, vol. 17, No. 4; vol. 18, No. 1—3; 1909.
— — American Journal of Science, ser. 4, No. 157—168, 1909.
— — Bulletin, ser. III, No. 10, 1907; ser. V, No. 9.

New-York. Academy of Sciences:
— — Annals, vol. XVIII, part 3.
— American Museum of Natural History:
— — Guide Leafled, No. 28—30, 1909,
— — Anthropological Papers, vol. I, part 5; vol. II, part 2 und 3; vol. III; 1908/09.
— — Journal, vol. IX, No. 1—8, 1909.
— — Bulletin, vol. XXIV, 1908.
— — Memoirs, vol. IV, part 7; vol. IX, part 5, 6; vol. XI; 1909, 4⁰.
— — William L, W., The anatomy of the common squid, 1909.
— American Geographical Society:
— — Bulletin, vol. 41, No. 1—11, 1908/09.
— Geological Society of America:
— — Bulletin, vol. 19, 1908.
— Jewish Historical Society:
— — Publications, No. 17, 18, 1909.

Nijmegen. Nederlandsche botanische Vereeniging:
— — Recueil des travaux botaniques Néerlandais, vol. IV, livr. 3, 4; vol. V, livr. 1; 1908.

Norwood (Mass.). Archaeological Institut of America:
— — American Journal of Archaeology, ser. II, vol. XII, No. 4 und Suppl.; vol. XIII, No. 2, 3; 1909.
— — Bulletin, vol. 1, No. 1, 2, 1909.

Nürnberg. K. Neues Gymnasium:
— — Jahresbericht 1908/09, mit Programm von H. Blaufuß.

Nürnberg. Germanisches Nationalmuseum:
— — Anzeiger, 1908, Heft 1—4; 1909, 4°.
— Verein für Geschichte der Stadt:
— — Jahresbericht, 1908.
— Stadtbibliothek.
— — Katalog der Stadtbibliothek, I, 1, 1909.

Oberlin (Ohio). Wilson Ornithological Club:
— — The Wilson Bulletin, No. 65, 66; 1908.
— — Laboratory Bulletin, No. 14, 15.

Odessa. Neurussische Naturforscher-Gesellschaft:
— — Sapiski, 30 (1907), 31 (1908).

Offenbach a. M. Verein für Naturkunde:
— — Bericht, 43—50, 1901/09 und Nachtrag hiezu (2 Tafeln und Nekrolog für Spandel).

Osnabrück. Verein für Geschichte und Landeskunde:
— — Mitteilungen, 33. Bd., 1908; 1909.

Ottawa. Geological Survey of Canada:
— — Geologische Karten, No. 565, 592, 607, 624, 634, 700, 807, 826, 908, 985, 1005, 1019, 1025, 1036, 1037, 1043 und Nos 51/52 (= Nova Scotia).
— — Report on the mining and metallurgical industries of Canada 1907/08,
— — Preliminary Report on Gewganda Mining Division District of Nippissing, 1909, 8° und gr. 2°.
— Royal Society of Canada:
— — Proceedings and Transactions, ser. III, tom. 2.
— Department of mines (Geological Survey):
— — Summary report on explorations in Nova Scotia by Fletcher, 1908.
— — The geology and mineral resources of New-Brunswick by Ells, 1908.
— — Contributions to Canadian Palaeontology, vol. 3, 1908.
— — Report on tertiary plants of British Columbia, 1908.
— — Annual report for 1906; 1909.
— — Summary report of the geological survey of department of mines, 1908; 1909.
— — No. 1073, 1035, 980, 1081, 1050 (mit 7 Karten), 1085.

Oxford. University:
— — Transactions of the third International Congress for the History of Religions, vol. I, II, 1908.

Padua. Accademia scientifica Veneto-Trentino-Istriana:
— — Atti, Terza Serie. Anno II.
— Redaktion der Zeitschrift „Rivista di storia antica“:
— — Rivista, N. Ser., anno 12, fasc. 3, 4; anno 13, fasc. 1; 1908/09.
Palermo. Circolo matematico:
— — Annuario 1909.
— — Rendiconti, tom. XXVII, fasc. 1—3; tom. XXVIII, fasc. 1—3 und Supplemento, vol. 3, No, 5, 6; vol. 4. No. 1—4; 1909, 4⁰.
— — Indici delle Pubblicazioni, No. 2.
— Società di scienze naturali e economiche:
— — Giornale, vol. 26, 27, 1908/09, 4⁰.
Paris. Académie de médecine:
— — Bulletin, 3ᵉ sér., No. 1—43, 1909.
— Académie des Sciences:
— — Comptes rendus, tom. 148, No. 1—26; tom. 149, No. 1—26 und tables zu tom. 147.
— — Viceadmiral Paris: Souvenirs de Marine, 6ᵉ partie, Paris 1908, fol.
— Bureaux de la Revue des questions historiques:
— — Revue, année 43, livr. 169, 170; année 44, livr. 171, 172; 1909.
— Institut de France:
— — Annuaire pour 1909.
— Ministère de l'instruction publ. et des beaux-arts:
— — Bulletin de la commission archéologique de l'Indochine. Année 1908, livr. 1.
— Moniteur Scientifique:
— — Moniteur, livr. 805—815, 1909, 4⁰.
— Musée Guimet:
— — Annales, tom. XXX, 1, 2, 1907/08, 4⁰.
— — Annales, Bibliothèque d'études, tom. 25, 1909.
— — Revue de l'histoire des réligions, année 18, tom. 57, No. 2, 3; tom. 58, No. 1—3; 1908/09.
— Muséum d'histoire naturelle:
— — Bulletin, année 1908, No. 5—7; 1909, No. 1—3.
— — Nouvelles Archives, sér. IV, tom. X, 2, 1908.
— Société d'anthropologie:
— — Bulletins et mémoires, sér. V, tom. 9, No. 1—5, 1908.
— Société des études historiques:
— — Revue, année 74, 1908, Sept.—Déc.; année 75, 1909, Janv.—Avril.
— Société de géographie:
— — La Géographie, année 17, 1908, No. 6; année 18, 1908, No. 1—6; année 19, 1909, No. 1—5.
— Société mathématique de France:
— — Bulletin, No. 37, fasc. 1—4, 1909.

Paris. Société zoologique de France:
— — Bulletin, tom. 33, 1908.
— — Mémoires, année 20, 1907.
— Université de Paris, Fondation Bischofsheim:
— — Annales de l'observatoire de Nice, tom. XI und XIII, 1.

Passau. K. Lyzeum:
— — Jahresbericht 1908/09; 1909.

Perth. Western Australia Geological Survey:
— — Bulletin, No. 31, 32, 34, 35; 1908/09.
— Western Australia Department of Mines:
— — Report on the Kanowna Mines, 1908.
— — Report on the Mines of the Yilgarn Goldfield, 1908.
— — Report on the Northampton Mineral Field, 1908.

St. Petersburg. Académie Impériale des sciences:
— — Travaux du Musée botanique, tom. 6, 1909.
— — Travaux du Musée géologique, tom. II, livr. 3—7; tom. III, 1.
— — Bulletin, sér. VI, 1909, No. 1—18.
— — Comptes rendus de la commission sismique, tom. III, livr. 1, 2, 1.
— — Mémoires,
a) Classe historico-philologique, sér. VIII, No. 10—12, 1908, 4⁰.
b) „ physico-mathémat., sér. VIII, vol. 18, No. 7, 10—13; vol. 21, No. 3; vol. 23, No. 2—6; 1908/09, 4⁰.
— — Annuaire du Musée zoologique, tom. XIII, No. 4; tom. XIV, No. 1, 2; 1908/09.
— — Byzantina Chronika, Bd. XIV, Teil 2, 3 (1907); 1908, gr. 8⁰.
— — Izvěstija, tom. XIII, No. 3; tom. XIV, No. 1; 1908.
— Comité géologique:
— — Bulletins, 1908, 4—10.
— — Mémoires, N. Sér., No. 36, 43—50.
— — Explorations géologiques dans les régions aurifères de la Sibérie, Région aurifère de l'Amour, livr. 9.
— — Explorations géologiques dans les régions aurifères de la Sibérie, Carte géologique de la région aurifère d'Jénisséi. Description de la feuille I; Karte zu 8.
— — Explorations géologiques dans les régions aurifères de la Sibérie, Carte géologique de la région de la Zeïra, Description de la feuille 4.
— Section géologique du cabinet de Sa Majesté:
— — Travaux, vol. VII, 1909.
— Kais. Botanischer Garten:
— — Acta horti Petropolitani, vol. 28, fasc. 2; vol. 29, fasc. 2; vol. 30, fasc. 1, 1908/09.

St. Petersburg. Kais. Russische Archäologische Gesellschaft:
— — Zapiski, Klassische Abteilung, Bd. V. 1908.
— — „ Orientalische Abteilung, Bd. XVIII Liefg. 2, 3; 1908, 4⁰.
— — Kratkij. Katalog Muzeja, 1908.
— Kais. Mineralogische Gesellschaft:
— — Verhandluugen, II. Ser., Bd. 45. 46 Liefg. 1; 1907/08.
— — Materialien zur Geologie Rußlands, Bd. 23 Liefg. 2; Bd. 24; 1908/09.
— Physikalisch-chemische Gesellschaft an der Kais. Universität:
— — Schurnal. Physikalische Abteilung, tom. 41. Heft 1—9.
— — „ Chemische Abteilung, Bd. 39—41.
— Société Imp. des Naturalistes:
— — Travaux, vol. 32, livr. 3. No. 2. 3; vol. 33, livr. 5; vol. 34, fasc. 3; vol. 35, livr. 3, No. 7, 8; vol. 36, livr. 3, No. 5—8; vol. 37, fasc. 2 (Sect. de Zool.), fasc. 3, No. 1, 4—6; vol. 38, fasc. 2 (Sect. de Zool.). vol. 38, livr. 1, No. 7, 8; vol. 39, livr. 1, No. 1—8.
— Observatoire physique central Nicolas:
— — Missions scientifiques pour la mesure d'un arc de méridian au Spitzberg; mission russe, tom. 2, 1908, 4⁰.
— — Mission russe, tom. I, Géodesie, 2e section, B. 1. 1909.
— — Annales, année 1905, part I et II, 1, 2, 1908. 4⁰.
— Histor.-philol. Facultät der Kais. Universität:
— — Zapiski, Bd. 88. 90.
— Kais. Universität:
— — Otcet, 1908, 1909.
— — Protokoly zasědanij, No. 63. 1907; No. 64, 1908; (1908/09).

Philadelphia. Academy of natural Sciences:
— — Proceedings, vol. 60, part 3; vol. 61, part 1, 1909.
— Historical Society of Pennsylvania:
— — The Penusylvania Magazine of History, vol. 33, No. 129—132, 1909.
— American Philosophical Society:
— — Proceedings, vol. 47, No. 190; vol. 48, No. 191, 192; 1908/09.
— — Record of the Celebration of the Two Hundreth Anniversary of the Birth of B. Franklin. vol. 2—6, 1908.

Pisa. R. Scuola Normale Superiore:
— — Annali. Filos. e Filologia, vol. 21; Scienze fisiche-matematiche. vol. 10. 1908.
— Società Toscana di scienze naturali:
— — Atti. Processi verbali, vol. 18. No. 1—4. 1908.
— — Atti e Memorie, vol. 24, 1908.
— Società Italiana di fisica:
— — Il nuovo Cimento, ser. V, vol. 16. Novembre—Dicembre 1908; vol. 17. Gennaio—Giugno 1909; vol. 18, Luglio—Ottobre 1909.

Plauen. Altertumsverein:
— — Jahresbericht 1908/09, mit wiss. Beilage, 1909. 4⁰.

Portici. Laboratorio di zoologia:
— — Bollettino, vol. III, 1908.

Porto (Portugal). Academia polytechnica:
— — Annaes scientificos, vol. III, No. 4; vol. IV, No. 1—4, Coimbra 1908/09.
— — Obras sobre matematica do F. Gomes Teixeira, vol. 2 4, Coimbra 1906/08, 4⁰.

Posen. Historische Gesellschaft:
— — Zeitschrift, 23, Jahrg., 1. und 2. Halbband, 1908.
— — Historische Monatsblätter, IX, Jahrg. 1908, No. 1—12.

Potsdam. Geodätisches Institut:
— — Veröffentlichung, N. F., No. 40.
— Astrophysikalisches Observatorium:
— — Publikationen, Bd. XV, Stück 2; Bd. XIX, Stück 2—4 mit Titelblatt.
— — Photographische Himmelskarte. Ergänzungen zu Bd. 1—4 des Katalogs, 1908, 4⁰.

Prag. Böhmische Kaiser Franz Joseph-Akademie:
— — Sbírka pramenů, Skupina I, číslo 7; Skupina II, číslo 9 (1908); 10 (2, 3), 11, 12.
— — Památky Archaeologické, a Mistopisné, Bd. XXIII, Heft 4, 6.
— — Věstník, Ročník, 17, 1908.
— — Bulletin international, Classe des sciences mathématiques, année 12, 13; 1907 08.
— — Almanach, Ročník 19, 1909.
— — Bibliografie České Historie, díl IV, svazek 2, 1908; 3, 1909.
— — Rozpravy, Třída I, číslo 38; Třída II, číslo 17; Třída III, číslo 23—28.
— — Filosoficka Biblioteka, Rada I, číslo 2, (1908).
— — Historicky Archiv, číslo 30—34.
— — B. Němec, Anatomie a fisiologie rostlin, 1908, p. 233—654.
— — Starožitnosti země české, díl III, 1909, 4⁰.
— — Biblioteka Klassika, číslo 15—17.
— — Winter Zickmund, Řemeslnictoo a živnosti, XVI věku včechack (1526—1620), 1909.
— — Groh Frant., Topografie starých Athen Bd. 1, Prag 1909.
— — Velflik Alb., Život a pusobení I presedente Cesk. Akad. Jos. Hlavky, 1908.
— — Truhlár Ant., Rukovět k. pisemn. human. 1, 1908.
— Landesarchiv des Königreichs Böhmen:
— — Mitteilungen, II. Bd., 1909.

Prag. Landesarchiv des Königreichs Böhmen:
— — Archiv Český, díl 26, 1909.
— — Acta regum Bohemiae selecta phot. dep., fasc. 1, 1908, gr. fol.
— K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Sitzungsberichte, a) Klasse der Philosophie, Geschichte und Philologie 1908; b) mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse 1908.
— — Jahresbericht für das Jahr 1908; 1909.
— Lese- und Redehalle der deutschen Studenten:
— — 60. Bericht über das Jahr 1908; 1909.
— — K. Böhmisches Museum:
— — Bericht für das Jahr 1908; 1909.
— — Časopis, Bd. 83, No. 1—4, 1909.
— — Památky archaeologické, Bd. 23, Heft 5, 1909.
— K. K. Sternwarte:
— — Magnetische und meteorologische Beobachtungen, 69. Jahrg., 1908; 1909, fol.
— Deutsche Karl Ferdinands-Universität:
— — Die feierliche Inauguration des Rektors für das Jahr 1908/09.
— — Ordnung der Vorlesungen, S.-S. 1909; W.-S. 1909/10; 1909.
— — Personalstand 1908/09.
— Verein böhmischer Mathematiker:
— — Časopis, Bd. 38, No. 1–5, (1908/09).
— Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen:
— — Mitteilungen, Jahrg. 47, No. 1–4, 1908.
— Deutscher naturwiss.-medizin. Verein für Böhmen „Lotos":
— — Lotos, Naturwissenschaftliche Zeitschrift, Bd. 56, No. 1—10, 1908.
— Export-Verein für Böhmen:
— — 17. Jahresbericht, 1908.

Pressburg. Verein für Natur- und Heilkunde:
— — Verhandlungen, N. F., Bd. 18, 19, 1906/07.
— — Festschrift des Vereins 1856—1906; 1907.

Pusa (Bengal). Agricultural Research Institute:
— — Memoirs (Chemical Series), vol. 1, No. 7.
— — Memoirs (Botanical Series), vol. II, No. 6—8.
— — Memoirs (Entomological Series), vol. II, No. 7, 1908, 4°.

Regensburg. K. B. Botanische Gesellschaft:
— — Denkschriften, Bd. 9 (= N. F. 4), 1908.

Reno. University of Nevada:
— — Bulletin, vol. II, No. 4, 1908.

Riga. Naturforscher-Verein:
— — Korrespondenzblatt, Bd. 51 und 52, 1908/09.
— — Katalog der Bibliothek, I. Bd., 1908.

Rio de Janeiro. Bibliothèque nationale:
— — Annales, vol 28, 1906; 1908, 4⁰.
— — Commissão Central de Bibliographie Brazileira, Convolut von 11 Schriften von den Jahren 1896—1908.
— Observatorio:
— — Boletim mensal, Julho—Dezembro 1907; 1908, 4⁰.
— Servicio Geologico e Mineralogico do Brasil:
— — Final-Report, by J. C. White, 1908.

Rom. Reale Accademia dei Lincei:
— — Annuario, 1909.
— — Atti, ser. V, Notizie degli scavi di antichità, vol. V, fasc. 9—12; vol. VI, fasc. 1—8.
— — Atti, ser. V, Rendiconti, Classe di scienze fisiche, vol. 18, fasc. 1—12, 4⁰.
— — Atti, Rendiconti, Classe di scienze morali, ser. V, vol. 17, fasc. 7—12; vol. 18, fasc. 1—3.
— — Memorie, Classe di scienze fisiche, ser. V, vol. 7, fasc 1—10, 1908/09, 4⁰.
— — Memorie, Classe di scienze morali, ser. V, vol. 12, fasc. 1—8; vol. 14, fasc. 1, 2.
— — Atti, Rendiconto dell'adunanza solenne del 7 Giugno, 1909, vol. 2.
— Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei:
— — Atti, anno 62, sessione 1—7, 1909, 4⁰.
— Kais. Deutsches Archäologisches Institut:
— — Mitteilungen, Bd. 23, No. 2—4, 1908/09.
— — Jahresbericht für 1908; Berlin 1909.
— Ministero di agricultura, industria e commercio:
— — Annuario statistico 1905—07, vol. 1, 2.
— R. Comitato geologico d' Italia:
— — Bollettino, anno 1908, No. 3, 4; 1909, Nr. 1.
— R. Ufficio centrale meteorologico italiano:
— — Annali, ser. II, vol. XVIII, 3; XIX, 1; XXVII, 1; XXVIII, 1.
— Società italiana per il Progresso delle Scienze:
— — Atti, Riunione II, 1908; 1909, 4⁰.
— R. Società Romana di storia patria:
— — Archivio, tom. 31, fasc. 3, 4; tom. 32, fasc. 1, 2; 1908/09.
— — Le Cronache Italiane nel medio evo. Descr. da Ugo Balzani. Milano 1909.

Rossleben. Klosterschule:
— — Jahresbericht 1908/09; 1909, 4⁰.

Rostock. Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1908/09 in 4⁰ und 8⁰.

Rouen. Académie des sciences:
— — Précis analytique des travaux, année 1907/08; 1909.
Rovereto. R. Accademia di scienze degli Agiati:
— — Atti, ser. III, vol. 14, fasc. 3, 4; vol. 15, fasc. 1, 2; 1908/09.
— Biblioteca Civica:
— — Chiesa Gust., Regesta del archivio communale, fasc. 2, 1909.

Saargemünd. Gymnasium mit Realabteilung:
— — 38. Jahresbericht 1908/09; 1909, 4⁰.
Salatiga (Java). Allgemeen Proefstation:
— — Verslag omtrent den staat, 1908; 1909.
Salzburg. K. K. Staatsgymnasium:
— — Programm für das Jahr 1908/09; 1909.
St. Gallen. Naturwissenschaftliche Gesellschaft:
— — Jahrbuch für das Jahr 1907; 1908.
— Historischer Verein:
— — Mitteilungen, Bd. XXX, 2. Hälfte, 1908.
— — Neujahrsblatt 1908 (Hardegger); 1909 (Schlaffer), 4⁰.
— — Urkundenbuch, Teil 5, Liefg. 4.
St. Louis. Missouri Botanical Garden:
— — XIXth annual Report, 1908.
San Fernando. Instituto y Observatorio de marina:
— — Almanaque náutico para el año 1910 und 1911; 1908/09, 4⁰.
San Francisco. California Academy of Sciences:
— — Proceedings, ser. IV, vol. 3, pag. 41—56, 1908/09.
Sao Paulo. Museo Paulista:
— — Catalogos da Fauna Brazileira, vol. II, 1909.
— — Revista, vol. 6, 1906.
Sarajevo. Bosnisch-Herzegovinische Landesregierung:
— — Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1906/07. Wien 1908, 4⁰.
— Landesmuseum:
— — Mitteilungen, Bd. 11, 1909.
Sassari (Sardinien). Universität:
— — Studi Sassaresi, anno VI (1908), Sezione II, fasc. 3, 4; anno VII, 1009, Sezione II, fasc. 1. 2.
Schweinfurt. K. Realschule:
— — Jahresbericht 1908/09; 1909.
Schwerin. Verein für mecklenburgische Geschichte:
— — Jahrbücher und Jahresberichte, Jahrg. 74. 1909.
Sèvres. Bureau des poids et mesures:
— — Comptes rendus de la 4e conférence, 1907.

Shanghai. Nord-China Branch of the Asiatic Society:
— — Journal, vol. 40, 1909.
Siena. R. Accademia dei fisiocritici:
— — Atti, ser. IV, vol. 20, No. 7—10; ser. V, vol. 21, No. 1—6; 1908/09.
Spalato. K. K. Archäologisches Museum:
— — Bullettino di Archeologia e storia Dalmata, anno 31, (1908).
Stettin. Gesellschaft für Pommersche Geschichte und Altertumskunde:
— — Baltische Studien, N. F., Bd. 2—12, 1898—1908.
— — Monatsblätter, 1908, No. 1—12.
Stockholm. K. Akademie der Wissenschaften:
— — Les prix Nobel en 1906.
— — Linné, Skrifter, Bd. IV, 1908.
— — Årsbok for År 1909.
— — Meteorologiska Jakttagelser i Sverige, vol. 50 und 50 b.
— — Handlingar, Bd. 43, No. 7—12.
— — Arkiv för Zoologi, Bd. V, Heft 1—4.
— — Arkiv för Kemi, Bd. III, Heft 3.
— — Arkiv för Botanik, Bd. VIII, Heft 1—4; Bd. IX, Heft 1.
— — Arkiv för Matematik, Bd. V, Heft 1—4.
— — Meddelanden från K. Vetensk akademiens Nobelinstitut, Bd. I, No. 12—15 und Titel.
— — Lefnadsteckningar, 4, 4.
— — Traité analytique des orbites absolues des 8 planètes principales par H. Gylden. Tom. 2, 1908, 4⁰.
— K. Vitterhets Historie och Antikvitets Akademie:
— — Fornwännen Årgangen II und III, 1907; (1908).
— — Antikvarisk Tidskrift för Sverige, del. 18, No. 2—4, 1908.
— K. öffentliche Bibliothek:
— — Sveriges offentliga Bibliothek, Accessions-Katalog 22, 1907.
— Geologiska Förening:
— — Förhandlingar, Bd. 30, No. 7; Bd. 31, No. 1—5; 1909.
— Institut Royal géologique:
— — Årsbock 1908; 1908/09.
— Nordiska Museet:
— — Fataburen, 1908, Heft 1—4.
Stonyhurst. College Observatory:
— — Results of Meteorological and Magnetical Observations, 1908. Liverpool 1909.
Strassburg. Kais. Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1908/09, in 4⁰ und 8⁰.
Stuttgart. K. Staatsarchiv:
— — Württembergisches Urkundenbuch, Bd. 10, 1909.

Stuttgart. Württemberg. Kommission für Landesgeschichte:
— — Vierteljahreshefte für Landesgeschichte, N. F., Jahrg. 18 (1909), Heft 1—4.
— K. Württembergisches Statistisches Landesamt:
— — Württembergische Jahrbücher für Statistik und Landeskunde, Jahrg. 1908, Heft 1, 2, 1908/09, 4⁰.
— — Beschreibung des Oberamts Urach (2. Bearbeitung), 1909.

Sydney. Department of Mines and Agriculture of New-South-Wales:
— — Annual Report for 1908; 1909, fol.
— New-South-Wales Department of Mines, Geological Survey:
— — Mineral Resources, No. 6, 1908.
— — Records, vol. 8, No. 4 und Register zu 4.
— Linnean Society of New-South-Wales:
— — Proceedings, vol. 33, part 4; vol. 34, part 1, 2; 1909.

Teddington. National Physical Laboratory:
— — Report for the year 1908; 1909, 4⁰.

Tiflis. Turkestanische Abteilung der K. russ. Geographischen Gesellschaft:
— — Mitteilungen, Bd. 4, 1908.

Tokyo. Eartquake Investigation Committee:
— — Bulletin, vol. II, Nr. 3; vol. III, No. 1, 2, 4⁰.
— Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens:
— — Mitteilungen, Bd. XI, 4; XII, 1; 1909.
— Kais. Universität:
— — The Journal of the College of Science, vol. XXIII, article 15; vol. XXVI, art. 1, 2; vol. XXVII, art. 1—6; 1908/09, 4.
— — Mitteilungen aus der medizinischen Fakultät, Bd. VIII, No. 1, 2, 1908.
— — The Bulletin of the College of Agriculture, vol. VIII, 1, 2, 1907/08.

Torgau. Altertumsverein:
— — Veröffentlichungen, Heft 21.

Toronto. Canadian Institute:
— — Transactions, vol. VIII, part 3, 1909.
— University:
— — Review of Historical publications, 13, (1908).

Toulouse. Université:
— — Bulletin populaire de la pisciculture, N. Sér., No. 3—4, 1908.
— — Annales du Midi, années 20, No. 79—81.
— — Bibliothèque méridionale, sér. II, tom. 10, fasc. 2, 3.

Trient. Biblioteca e Museo comunale:
— — Archivio Trentino, anno XXIII, fasc. 3, 4; anno XXIV, fasc. 1, 2; 1908/09.

Triest. K. K. Maritimes Observatorium:
— — Rapporto annuale, vol. 22, 1909, 4⁰.

Troppau. Kaiser Franz Joseph-Museum für Kunst und Gewerbe:
— — Zeitschrift für Geschichte und Kulturgeschichte Österreichisch-Schlesiens, Jahrg. 4, 1908/09, Heft 1—4.
— — Jahresbericht für das Jahr 1908.

Trondhjem. Videnskabers Selskab:
— — Skrifter 1908; 1909.

Tübingen. Universität:
— — Richard Garbe, Rede, 1909, 4⁰.

Turin. R. Accademia delle scienze:
— — Atti, vol 44, disp. 1—15, 1909.
— — Memorie, ser. II, tom. 59, 1909, 4⁰.

Ulm. Verein für Kunst und Altertum:
— — Mitteilungen, Heft 13—16, 1908/09.

Upsala. K. Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Nova acta, Ser. IV, vol. 2, fasc. 1.
— Meteorologisches Observatorium der Universität:
— — Bulletin mensuel, vol. 40, 1908; 1908/09, fol.
— K. Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1908/09 in 4⁰ und 8⁰.
— — Årskrift, 1908.
— — Swedisch Explorations in Spitzbergen 1758—1908, Stockholm 1909.
— — Sveriges Jordbruk utarb af W. Flach, H. Jechlin Dannefelt, G. Sundbürg. Göteborg 1909, fol.
— — Bref och skrifvelser af och till C. v. Linné, udg. af Upsala Universitet, afd. I. del 3.
— Redaktion der Zeitschrift „Eranos“:
— — Eranos, vol. VIII, fasc. 4; vol. IX, fasc. 1—3.

Utrecht. Historisch Genootschap:
— — Bijdragen en Mededeelingen, deel XXX, Amsterdam 1909.
— — Werken, ser. III, No. 25 = Brieven van Jan de Witt, 2. deel, 1909; No. 26 = Cunaeus-Journal 1909 mit Tafeln.
— Provincial Utrechtsch Genootschap:
— — Aanteekeningen, 1909.
— — Verslag, 1909.
— — Ruffen, Die diluvialen Säugetiere der Niederlande, 1909, 4⁰.

Utrecht. Institut Royal Météorologique des Pays-Bas:
— — Annuaire, 59e année 1907, Abt. A. Météorologie; Abt. B. Magnetisme; 1908, 4⁰.
— — Mededeelingen en Verhandelingen. VI, VII; 1908/09, 4⁰.
— — Maandl. Overzicht der Weersgesteldheid in Nederland, Jahrg. 5 (1908), December; Jahrg. 6 (1909), Januar—Oktober.
— — Onweders in 1906 und 1907; 1908.
— Physiologisches Laboratorium der Hoogeschool:
— — Onderzoekingen, Reeks V, 10, 1909.

Venedig. Biblioteca du San Marco:
— — Catalogo dei codici Marciani, vol. I, 1909.
— R. Istituto Veneto di scienze:
— — Concorsi a premio, tom. 68, parte 1.
Verona. Accademia di Scienze:
— — Atti e Memorie, ser. IV, vol. 8 und 9 mit Appendice.
— Museo civico:
— — Madonna Verona, I, 2—4; II, 2—4; III, 1, (fasc. 9); fasc. 10—11.
Vicenza. Accademia Olimpica:
— — Atti, N. Ser., vol. 1; annata 1907/08.
— — Franceschini Ant., L'emigrazione italiana nell'America del Sud. Roma 1908.

Warschau. Literarische Gesellschaft:
— — Sitzungberichte, Jahrg. 1, Heft 4—8; Jahrg. 2. Heft 1—7; 1909.
— Mathematisch-physikalische Gesellschaft:
— — Prace, tom. 19, 1908.
Washington. Bureau of American Ethnology:
— — Bulletin, No. 34, 41, 42, 1908/09.
— — 26th Annual Report. 1904/05; 1908, gr. 8⁰.
— Nautical Almanac Office:
— — Star List of the American Ephemeris, 1909. 4⁰.
— Bureau of Education:
— — Report of the Commissioner for the year 1906/07, 1 und 2; 1907/08, 1, 2; 1908/09, 1, 2.
— U. S. Department of Agriculture:
— — Yearbook 1908; (1909).
— — Talman, List of meteorolog. textbooks, 1909.
— Department of commerce and labor:
— — Hayford (John F.), The figure of the earth and isostasy, 1909.
— — Hayford and Pike, Hypsometrie, 1909, 4⁰.
— Archaeological Institut of Amerika:
— — American Journal of Archaeology, ser. II, vol. 13, No. 1, 1909.

Washington. Smithsonian Institution:
— — Becker G. F., Hyperbolic functions. 1909.
— — Miscellaneous Collections, No. 1812, 1813, 1860.
— — Annual Report for the year ending June 30. 1907; 1908.
— U. S. National-Museum:
— — Contributions to the U. S. National Herbarium, part 5—9 und Register.
— — Proceedings, vol. 34—36, 1909.
— — Bulletin, vol. 62, 64, 67; 1909.
— — Report for the year 1907/08.
— Carnegie Institution:
— — List of Publications, October 1909 and Publications relating to to experimental Evolution.
— U. S. Naval Observatory:
— — Synopsis of the Report for the 1907/08; 1908.
— Philosophical Society:
— — Bulletin, vol. XV, pag. 103—131. 1908.
— U. S. Coast and Geodetic Survey Office:
— — Report of the Superintendent 1907/08.
— U. S. Geological Survey:
— — Bulletins, No. 341, 347, 349, 351, 357, 360, 362—384; 1908/09.
— — Professional Paper, No. 58—61, 63; 1908/09. 4⁰.
— — Mineral Resources, 1907; 1908.
— — Water-Supply Paper, No. 219—226, 228—231, 234; 1908/09.

Weihenstephan. K. Akademie für Landwirtschaft und Brauerei:
— — Bericht 1908/09; Freising 1909.

Wernigerode. Harzverein für Geschichte:
— — Zeitschrift, Jahrg. 42, Heft 1, 2.

Wien. Kais. Akademie der Wissenschaften:
— — Sitzungsberichte, a) der philos.-histor. Klasse, Bd. 155, Abh. 1, 2; Bd. 158, 4, 6; Bd. 159, 160, 2—8; Bd. 161, 1—9; Bd. 162, 1; Bd. 163, 1, 2; Schlußheft zu den Bänden 155—161 und Register zu den Bänden 151—160:
b) der mathem.-naturwiss. Klasse, 117. Bd., Abt. I, Heft 5—10; Abt. II^a, Heft 7—10; Abt. II^b, Heft 7—10; Abt. III, Heft 6—10; 118. Bd., I, 1—6; II^a, 1—5; II^b, 1—7; III, 1, 2.
— — Denkschriften der philos.-histor. Klasse, Bd. 53, I, II; der mathem.-naturwiss. Klasse, Bd. 81 und 84.
— — Anzeiger der mathem.-naturwiss. Klasse, 1909, No. I—XXVII und Register.
— — Fontes rerum Austriacarum, Abt. 2, Bd. LXI; Abt. 2, Bd. LXII.

Wien. Kais. Akademie der Wissenschaften:
— — Archiv für österreichische Geschichte, Bd. 97, Heft 1, 2; Bd. 98, Heft 2: Bd. 99, Heft 1.
— — Almanach, Jahr. 58, 1908.
— — Mitteilungen der Erdbebenkommission, N.F., No. XXXII—XXXIV.
— K. K. Geologische Reichsanstalt:
— — Verhandlungen, 1908, No 15—18; 1909, No. 1 - 9.
— — Abhandlungen, Bd. XXI, Heft 1, 1908.
— — Jahrbuch, Jahrg. 1908, Bd. 58, Heft 4; Jahrg. 1909, Bd. 59, Heft 1, 2.
— K. K. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik:
— — Jahrbücher, Jahrg. 1907, N. F., Bd. 44; 1909, 4⁰.
— — Allgemeiner Bericht und Chronik der im Jahre 1907 in Österreich beobachteten Erdbeben, No. IV. 1909.
— — Klimatographie von Österreich, II—IV, 1908/09.
— Österreichische Kommission für internationale Erdmessung:
— — Verhandlungen (Protokolle 1907), 1908.
— K. K. Gesellschaft der Ärzte:
— — Wiener klinische Wochenschrift, 1909, No. 1—52, 4⁰.
— Zoologisch-botanische Gesellschaft:
— — Verhandlungen, Bd. 58, Heft 8—10; Bd. 59, Heft 1—8; 1908/09.
— — Abhandlungen, Bd. 4, Heft 5, Jena 1909.
— K. K. Naturhistorisches Hofmuseum:
— — Annalen, Bd. XXII No. 2—4; Bd, XXIII, No. 1, 2.
— K. K. Militärgeographisches Institut:
— — Arbeiten, Bd. 22, 1908.
— v. Kuffnersche Sternwarte:
— — Publikationen, Bd. VI, Teil 6.
— K. K. Universitäts-Sternwarte:
— — Annalen, 19, 20.
— K. K. Universität:
— — 7 akademische Schriften, 1909.
— Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse:
— — Schriften, Bd. 49, 1908/09 (mit Beilage).

Wiesbaden. Verein für Nassauische Altertumskunde:
— — Annalen, 38. Bd., 1908; 1909, 4⁰.
— — Mitteilungen, Jahrg. 22, No. 1—4, 1909.
— Nassauischer Verein für Naturkunde:
— — Jahrbücher, Jahrg. 62, 1909.

Williams Bay. Yerkes Observatory:
— — The Yerkes Observatory, 1909.

Wolfenbüttel. Geschichtsverein für das Herzogtum Braunschweig:
— — Jahrbuch, 7. Jahrg., 1908.
— — Braunschweigisches Magazin, Bd. XIV, Jahrg. 1908, 4⁰.

Würzburg. Physikalisch-medizinische Gesellschaft:
— — Verhandlungen, N. F., Bd. 40, No. 2—5, 1909.
— — Sitzungberichte, 1907, Heft 8; 1908, Heft 1—5.
— Historischer Verein von Unterfranken:
— — Archiv, Bd. 50, 1909.
— — Jahresbericht für 1907; 1908.
— K. Altes Gymnasium:
— — Jahresbericht 1908/09 mit Programm von Herm. Wiehl.
— K. Neues Gymnasium:
— — Jahresbericht 1908/09 mit Programm von Ulrich.

Zürich. Schweizerische Meteorologische Zentralanstalt:
— — Annalen, 44. Jahrg., 1907, 4⁰.
— Allgem. geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz:
— — Jahrbuch für Schweizerische Geschichte, Bd. 34, 1907.
— Antiquarische Gesellschaft:
— — Mitteilungen, Bd. 27, Heft 1, 1909, 4⁰.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Neujahrsblatt auf das Jahr 1909, 4⁰.
— — Vierteljahrsschrift, 53. Jahrg., Heft 1—4; 54. Jahrg., Heft 1, 2; 1908/09.
— Schweizerische Geologische Kommission:
— — Beiträge zur Geologischen Karte der Schweiz. Spezialkarte No. 45 und Erläuterung No. 8; No. 49 und Erläuterung No. 7; No. 52.
— Schweizerisches Landesmuseum:
— — Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde, N. F., Bd. X, No. 3, 4; Bd. XI. No. 1, 2 (mit Beilage); 1908/09.
— — 17. Jahresbericht, 1908.
— Sternwarte:
— — Publikationen, Bd. IV, 1909, 4⁰.
— Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1908/09 in 4⁰ und 8⁰.

Zweibrücken. K. Humanist. Gymnasium:
— — Jahresbericht 1908/09 mit Programm von Buttmann.
— — Festschrift zum 350jährigen Jubiläum des Zweibrückener Gymnasiums, 1909.

Geschenke von Privatpersonen, Geschäftsfirmen und Redaktionen.

Verlagsbuchhandlung von Joh. Ambr. Barth in Leipzig:
Beiblätter zu den Annalen der Physik, 1908, No. 24; 1909, No. 1—23.
Journal für praktische Chemie. N. F., Bd. 78, 1908, No. 12; Bd. 79, 1909, No. 1—23

Franz Bayberger in München:
Zum Problem des Wellheimer Trockentals, 1909.

Lazare Belléli in Casale Montferrat:
Interpretations erronées, 1909.

Meta Benloew in Paris:
Theodor Benfey. Zum Andenken an seine Kinder und Enkel (als Manuskript gedruckt), 1909.

Karl Bezold in Heidelberg:
Zeitschrift für Assyriologie und verwandte Gebiete, Bd. 23, Heft 1—4, Straßburg 1909.

A. Biddlecombe in Newcastle-upon-Tyne:
Thoughts on natural philosophy and the Origin of Life, 1909.

H. Böhlaus Nachfolger in Weimar:
Zeitschrift der Savignystiftung, 30. Bd. (= germanistische Abteilung); 30. Bd. (= romanistische Abteilung).

F. O. Bower in Glasgow:
Studies in the morphology of sporeproducing members. No. 1—5, 1894—1903.

A. Brill in Tübingen:
Vorlesungen zur Einführung in die Mechanik raumerfüllender Massen. Leipzig 1909.

G. K. Cherrie in Brooklyn:
New birds from the Orinocco, 1909.

Theodor Curtius in Heidelberg:
Die Enthüllung des Bunsen-Denkmales 1908.

Verlagsbuchhandlung Gustav Fischer in Jena:
Naturwissenschaftliche Wochenschrift. 1909, No. 1—52.

Hermann Fischer in Tübingen:
Schwäbisches Wörterbuch, Lief. 25—28. 1909. 4°.

H. Fritsche in Riga:
Die mittlere Temperatur der Luft im Meeresniveau, dargestellt als Funktion der geographischen Breite. Meteorolog. Publikation I.

G. K. Gilbert in Washington:
The California Earthquake of 1906; New Haven 1909.

Ph. A. Guye in Genf:
La fixation industrielle de l'azote, 1909.

Georg Helmreich in Ansbach:
Galeni de usu partium libri XVII, vol. 2. Leipzig 1909.

Charlos A. Hesse in Iquique:
Proyecto de reforma del Calendario, Iquique 1909.

Friedrich Hirth in New York:
The Ancient History of China. 1908.

M. Th. Houtsma in Utrecht und A. Schade in Leiden:
Enzyklopädie des Islam, Liefg. 4, 1909.

Miss C. Amy Hutton in London:
Catalogue of the Wyndham F. Cook Collection, forwarded by Mrs. Wyndham Cook. By Cecil H. Smith and C. Amy Hutton, 1908, 4⁰.

Charles Janet in Beauvais:
1. Anatomie du corselet et hystolyse des muscles vibrateurs après le vol nuptial chez la reine de la Fourmi. Texte. Planches, Limoges 1907.
2. Remplacement des muscles vibrateurs du vol . . . chez les Fourmis, Paris 1906, 4⁰.
3. Sur un Organe non décoit du thorax des Fourmis. Paris 1906, 4⁰.
4. Histolyse . . . des muscles vibrateurs du vol chez les reines des Fourmis, Paris 1907, 4⁰.
5. Histogénèse du Tissu adipeux remplaçant les muscles vibrateurs . . . chez les reines des Fourmis, Paris 1907, 4⁰.
6. Histolyse des muscles de mise en place des ailes après le vol nuptial chez les reines de Fourmis, Paris 1907, 4⁰.

J. Franklin Jameson in Washington:
The Meeting of the American Historical at Washington and Richemond, 1909.

F. Jousseaume in Paris:
Réflexions sur les volcans et les tremblements de terre, Paris 1909.

Heinrich Kiliani in Freiburg i. Br.:
Dem Andenken von Emil Erlenmeyer, (S. A.), 1909.

Alb. Mich. Koeniger in München:
Quellen zur Geschichte der Sendgerichte in Deutschland, München 1909.

Karl Krumbacher in München:
Byzantinische Zeitschrift, Bd. 18, Heft 1—4, Leipzig 1909.

J, V. Kull in München:
Bildnisse von fürstlichen und anderen hervorragenden deutschen Frauen des XVI. bis XIX. Jahrhunderts, Wien 1909.

V. V. Kusnecov in St. Petersburg:
Posobie dlja nabljadenij vrasn geh slojach atmosfery pomošč'ju smĕev, 1907.
Instrukcija dlja proisvodstva podemov pesinovych carovsondov, 1907.

Haton de La Gonpilière:
Mémoires divers, 2e édition, Paris 1909.

Spyridon Lambros in Athen:
Νέος Ἑλληνομνήμων, Bd. 5, 1—4.

Charles R. Lanman in Cambrige, Mass.:
Pali book-titles and their brief designations, 1909.

Ed. Loewenthal in Berlin:
Im Zeichen der Fulgurogenesis-Theorie, 1909.
Entropiegesetz, 1909.

Emil Meins in Konstantinopel:
Tende ad aeterna, No. 1, 1909.

Gabriel Monod in Versailles:
Revue historique, Bd. 100—102.

Felix Müller in Dresden:
Führer durch die mathematische Literatur, Leipzig und Berlin 1909.

R. Pavon in Córdoba:
Locomoción Moderna, Córdoba 1907.

Dem. Pappageorgios in Athen:
Τὰ φραστικὰ τοῦ Ἀττικοῦ λόγου. Athen 1909.

Daniele Rosa in Florenz:
Il valore filogenetico delle neotenia, 1909.

H. Rosenbusch in Heidelberg:
Elemente der Gesteinslehre, Stuttgart 1910.

K. Rudel in Nürnberg:
Grundlagen der Klimatologie Nürnbergs II, III, 1904/08, 4⁰.

G. V. Schiaparelli in Mailand:
I primordî dell' astronomia presso i Babilonesi, Bologna, 1908.
I progressi „ „ „ „ „ 1908.
Orbite cometari, correnti cosmiche, meteoriti, Pavia 1908.
Di alcune macchie osservate al Mercurio, Torino 1909.

Siemens-Schuckert-Werke in Berlin:
Nachrichten 1908, Heft 15 und 16.

Ernst Stahl in Jena:
Zur Biologie des Chlorophylls, 1909.

Bernhard Suphan in Weimar:
Herders Ideen zur Philosophie der Geschichte der Menschheit. Berlin 1909, 2 Bände.
Meine Herder-Ausgabe, 1906.
Herders sämtliche Werke, I. und II. Bd., Berlin 1887 und 1909.

Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig:

Thesaurus linguae Latinae, vol. III, fasc. 4 und 5 und Suppl. fasc. 1; vol. IV, fasc. 6, 7; 4°.

Archiv der Mathematik und Physik, III. Reihe, Bd. 14, Heft 3, 4; Bd. 15, Heft 1—3.

Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. II, 3. Heft 1; Bd. III, 1, Heft 3; Bd. III, 2, Heft 4; Bd. V, 3, Heft 1.

— französische Ausgabe, tom. II, vol. 1, fasc. 1; tom. I, vol. 4, fasc. 3; Paris 1909.

Deutsches Statistisches Zentralblatt, Jahrg. 1; 1909, No. 1.

August Weiler in Karlsruhe:

Die säkularen Störungen des Parameters, III, Karlsruhe 1909.

A. Wolfer in Zürich:

Astronomische Mitteilungen, (1909).

Anton von Velics in Budapest:

Onomatopöie und Algebra (eine etymologische und sprachphilosophische Studie), 1909.



Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 1. Abhandlung

Über
die Temperaturveränderungen von Luft beim Strömen durch eine Drosselstelle

von

Emil Vogel

Vorläufige Mitteilung

Vorgelegt am 9. Januar 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Die von Thomson und Joule[1]) in der Mitte des vergangenen Jahrhunderts ausgeführten Versuche über die Abkühlung, welche verdichtete Gase beim Strömen durch eine Drosselstelle erfahren, haben durch die Benützung solcher Abkühlung für die Zwecke der Verflüssigung schwer coërcibler Gase erneutes Interesse gewonnen. Die Beobachtungen von Thomson und Joule wurden bei mäßigen Temperaturen (von 4^0 bis 100^0 C.) und geringen Drücken (bis etwa 6 Atm.) ausgeführt.

Es erscheint wünschenswert durch systematische Untersuchungen die Abhängigkeit der auftretenden Temperaturveränderungen von Druck und Temperatur innerhalb weiterer Grenzen festzustellen, weil die Erscheinung nicht nur eine technische Bedeutung gewonnen hat, sondern auch ein sehr großes wissenschaftliches Interesse besitzt. Da nämlich die Temperaturveränderungen wesentlich durch die zwischen den Molekülen wirkenden inneren Kräfte hervorgerufen werden, so gestatten sie einen direkten Einblick in die Wirkungsweise dieser Kräfte, und es ist daher möglich, mit ihrer Hilfe die Abweichungen in dem Verhalten der Gase von den Gesetzen idealer Gase sehr genau festzustellen und in ihrer Zustandsgleichung zum Ausdruck zu bringen.

Mit dankenswerter Unterstützung der Jubiläumsstiftung der deutschen Industrie und der Gesellschaft für Linde's Eismaschinen sind daher im Laboratorium für technische Physik der K. Technischen Hochschule München umfassende Unter-

---

[1]) Thomson-Joule, Phil. Trans. 1853, S. 357 bis 365; 1854, S. 321 bis 364; 1862, S. 579 bis 589.

suchungen über diese Temperaturveränderungen in Angriff genommen worden. Im nachstehenden sollen zunächst die Ergebnisse mitgeteilt werden, welche über die Abhängigkeit der Abkühlung der Luft vom Druck zwischen 1 und 150 Atm. bei Zimmertemperatur erzielt wurden.

Durchführung der Versuche: Der konstruktive Entwurf der Apparate sowie die Disposition der Druckluftanlage und die Ausführung der Versuche wurde vom Leiter des Laboratoriums Prof. Dr. O. Knoblauch dem Diplomingenieur Dr. ing. Julius Adam übertragen, der sich der Aufgabe mit größter Hingabe widmete. Leider war es ihm nicht mehr vergönnt die Versuche auszuführen, da ihn ein plötzlicher Tod seiner Tätigkeit entriß. An seiner Stelle unternahm der Verfasser die Versuche.

Als Grundplan wurde angenommen: die Einhaltung einer konstanten Druckdifferenz (6 Atm.) bei wechselnder Höhe des absoluten Druckes (bis zu 200 Atm.) und der absoluten Temperaturen. Zur Zuführung der nötigen Druckluft in den Kreislauf diente ein Whiteheadscher Kompressor, der mit zwei Druckstufen arbeitete. Ein dritter Zylinder förderte die Luft von der Niederdruckseite auf die um 6 Atm. höher liegende Hochdruckseite. Im Beharrungszustand müssen die beiden zuerst erwähnten Druckstufen des Kompressors nur die Verluste ersetzen, die durch Undichtheiten der Anlage auftreten. Um Luftdruckschwankungen möglichst zu vermeiden, wurden sowohl auf der Hochdruckseite als auch auf der Niederdruckseite des Apparates je sechs Stahlflaschen à 30 Liter Inhalt als Puffer eingeschaltet. Zum Trocknen der Luft dienten ein Wasserabscheider und zwei Trockenflaschen mit Chlorcalcium. Um die Luft auf einer bestimmten konstanten Temperatur (12° C.) zu halten, wurde sie durch eine Rohrspirale von etwa 12 m Länge und 9 mm lichter Weite geführt, welche in einem Wasserbade mit Rührwerk hing. Nach Durchströmen dieser Spirale gelangte die Luft in den Durchströmapparat, der von der Spirale umgeben gegen Wärmeaustausch gut isoliert ebenfalls

im Thermostaten hing. Die Temperatur des Bades wurde mit einem Beckmannthermometer beobachtet und bis auf Schwankungen von 0,02° konstant gehalten, indem die Zuflußmenge des durch den Thermostaten fließenden Wassers durch einen Quetschhahn geregelt wurde.

Zur Bestimmung der Lufttemperatur im Durchströmapparat wurden Quecksilberthermometer benützt. Die Temperaturmessung geschah sowohl auf der Niederdruck- als auch auf der Hochdruckseite, während Thomson und Joule nur die Niederdrucktemperatur direkt maßen und für die Hochdruckseite die Annahme machten, daß ihre Temperatur gleich der des Bades sei, durch welches die Luft in Kupferschlangen geführt wurde.

Bei den vorliegenden Versuchen wurden Beckmannthermometer in 0,01° geteilt verwendet, welche 0,001° zu schätzen gestatteten. Wegen der hohen Drücke waren Thermometerrohre notwendig; das auf der Niederdruckseite wurde durch Hartgummi von den Eisenteilen des Apparates gut isoliert.

Als Drosselstelle zwischen Hochdruck- und Niederdruckseite diente ein Asbestpfropf in einer Hartgummi- oder Holzdüse. Auf der Niederdruckseite wurde die Luft sorgfältigst von den Eisenteilen des Apparates mit Hilfe von Holz isoliert. Dieses hatte nur den Druckunterschied zwischen Hochdruck- und Niederdruckseite auszuhalten, während die Hartgummiisolierung des Thermometerrohrs dem vollen Druck bis 150 Atm. widerstehen mußte.

Die Druckdifferenz vor und hinter der Drosselstelle wurde durch ein Differentialquecksilbermanometer gemessen. Die Höhe der Quecksilbersäule zeigte ein elektrischer Kontakt an. Die Druckschwankungen konnten durch Regulierhähne in sehr engen Grenzen gehalten werden.

Es zeigte sich, daß der Beharrungszustand sich nur sehr langsam einstellt und daß größere Temperaturschwankungen des Bades vermieden werden müssen. Es genügte nicht, die Konstanz der drei Beckmannthermometer für einige Minuten beobachtet zu haben, sondern es mußten die Ablesungen auf eine halbe Stunde, in manchen Fällen auf eine ganze Stunde,

ausgedehnt werden, während welcher Zeit keine größeren Schwankungen als 0,02 bis 0,03° C. zugelassen wurden.

Die Ablesungen erfolgten alle fünf Minuten. Jeder Versuch wurde zur Kontrolle wiederholt.

Versuchsergebnisse.

Die Resultate sind in der beigegebenen Tabelle numerisch angegeben und in nebenstehender Figur 1 graphisch aufgetragen.

Tabelle 1.

	Temper.	Absoluter Druck in kg/cm²	Druckdifferenz	α
1.	11,2°	1,08 Atm.	5,95	0,269
2.	12,1°	22,5 „	5,88	0,261
3.	12,3°	51,0 „	6,00	0,233
4.	12,4°	99,0 „	6,01	0,187
5.	12,9°	153,0 „	6,05	0,135

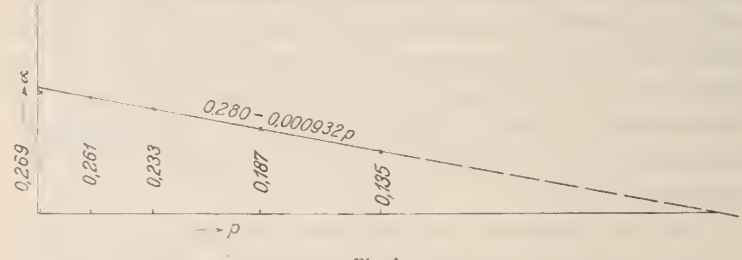


Fig. 1.

Die Versuche wurden bei Temperaturen von etwa 12° C. vorgenommen. Um sie miteinander zu vergleichen, benützte man als Reduktionsformel auf 0° C. und auf 1 Atm. Druckdifferenz die Thomson-Joulesche Formel:

$$d T = \alpha \left(\frac{273}{T}\right)^2 d p . \qquad 1)$$

worin dp den Druckunterschied vor und hinter der Drosselstelle in Atmosphären (kg/cm²) bedeutet. Die als Konstante ein-

geführte Größe α stellt den auf 0° C. reduzierten Kühleffekt dar pro 1 Atm. Druckunterschied. Die in der Tabelle 1 mitgeteilten Versuchszahlen lassen erkennen, daß α in Wirklichkeit keine Konstante, sondern eine Funktion des Druckes ist, die mit zunehmendem Drucke abnimmt.

Trägt man, s. Fig. 1, den abs. Druck auf der Niederdruckseite als Abszisse, den Wert von α als Ordinate auf, so liefert diese graphische Darstellung innerhalb des beobachteten Druckbereiches sehr genau eine lineare Abhängigkeit des α von p.

Setzt man

$$\alpha = a - bp$$

und mißt p in kg/cm², so findet man:

$$a = 0{,}280, \quad b = -0{,}000932,$$

so daß

$$\alpha = 0{,}280 - 0{,}000932\, p. \qquad 2)$$

Für $p = 1$ folgt

$$\alpha = 0{,}279^0,$$

während Thomson-Joule 0,0176° pro engl. Pfd./Qu. Z. bei 17,1° fanden, oder

$$\alpha = 0{,}283^0 \text{ bei } 0^0 \text{ C. und 1 (neue) Atm.}$$

Zum Vergleich seien die nach dieser Gleichung berechneten Werte mit den beobachteten Resultaten zusammengestellt.

Tabelle 2.

p. Atm.	α berechnet	α beobachtet
1,08	0,279	0,269
22,5	0,259	0,261
51	0,233	0,233
99	0,188	0,187
153	0,137	0,135

Die Abweichungen sind also nur gering und betragen im Maximum etwa 3,5 % beim kleinsten Druck. Nach den bisherigen Versuchserfahrungen ist den Resultaten bei höherem

Druck größere Genauigkeit zuzuschreiben, weil mit größeren Luftmengen gearbeitet wird.

Eine ähnliche Gesetzmäßigkeit wie die für Luft gefundene (Gl. 1) ist auch bei Kohlensäure festgestellt worden, und zwar zuerst von Thomson-Joule. Späterhin wurden die Versuche 1887 von Natanson[1]) bei verschiedenen Drücken bis 25 Atm. wiederholt.

Die Messung geschah mit Quecksilberthermometern, der einzelne Versuch dauerte nur wenige Minuten. Wenn das Thermometer 7 bis 10 Minuten dieselbe Temperatur unverändert angab, brach man den Versuch ab. Natanson fand eine Zunahme des Kühleffektes mit dem Druck, darstellbar durch die Gleichung:

$$\frac{\Delta T}{\Delta p} = 1{,}18 + 0{,}0126\, p.$$

Aber eine ganz andere Gesetzmäßigkeit wurde von Kester,[2]) welcher 1903 ebenfalls mit Kohlensäure Versuche im Druckbereich von 5 bis 40 Atm. vornahm, gefunden. Kester beobachtete eine Abnahme der Abkühlung bei zunehmendem Druck und gibt die Gleichung an:

$$\frac{\Delta T}{\Delta p} = 1{,}19 - 0.0015\, p.$$

Die Temperaturmessung geschah auf elektrischem Weg mit Thermoelementen.

Die letztere Formel stimmt der Form nach mit der für Luft hier aufgestellten gut überein.

Thermodynamische Betrachtungen:

Es drängt sich nun die Frage auf, ob nicht auf Grund theoretischer Betrachtungen vorausgesagt werden kann, wie sich die Abkühlung von Gasen abhängig vom Druck verhalten muß.

Porter[3]) hat darüber eine wertvolle Abhandlung ver-

---

[1]) Natanson, Über die Abkühlung der Kohlensäure etc. Annalen der Physik und Chemie, 1887, Bd. 31, S. 502–526.

[2]) Kester, Physikalische Zeitschrift, 6. Jahrgang, Nr. 2, S. 44–50.

[3]) Porter, On the Inversion points etc. Phil. Mag., 1906, Bd. XI, S. 554.

öffentlicht. Er geht dabei von der allgemein charakteristischen Gleichung für den Kühleffekt aus:

$$T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v = c_p\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right),$$

welche den Kühleffekt aus der Zustandsgleichung zu berechnen gestattet. Wird bei Änderung des Druckes im besonderen Falle:

$$T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v = 0,$$

so findet bei einer Druckänderung keine Temperaturänderung statt.

Diese Gleichung gibt in Verbindung mit der Zustandsgleichung des durchströmenden Gases die Gleichung der sog. Umkehrpunkte.

Porter behandelt weiter sowohl die Gleichung von van der Waals als eine von Dieterici, und zwar, um unabhängig von der Natur des Gases zu sein in ihrer reduzierten Form. Die Gleichung von van der Waals[1]) lautet dann:

$$\left(\alpha + \frac{3}{\beta^2}\right)(3\beta - 1) = 8\gamma \ldots \qquad 3)$$

worin

$$\alpha = \frac{p}{p_0}; \quad \beta = \frac{v}{v_0}; \quad \gamma = \frac{T}{T_0}$$

und p_0, v_0, T_0 die kritischen Daten sind. Druck, Volumen und Temperatur sind also ausgedrückt in Bruchteilen des kritischen Druckes, des kritischen Volumens, der kritischen Temperatur.

Die charakteristische Gleichung für den Inversionspunkt nimmt ihrerseits die Form an:

$$\gamma\left(\frac{\partial\beta}{\partial\gamma}\right) - \beta = 0$$

oder in Verbindung mit Gleichung 3)

$$\frac{-8\gamma}{3\beta - 1} + \frac{6}{\beta^2}(3\beta - 1) = 0$$

---

[1]) Nernst, Theoretische Chemie, 1903, 4. Aufl., S. 228.

*

und nach γ aufgelöst:

$$\gamma = \frac{3\,(3\,\beta - 1)^2}{4\,\beta^2} \quad \ldots 4;$$

aus 3 und 4 folgt weiter

$$\alpha = \frac{9}{\beta^2}\,(2\,\beta - 1) \cdots 5$$

und aus 4 und 5:

$$\gamma = \frac{3}{4}\,\frac{\left(3\,\frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot \alpha \cdot 9}}{2\,\alpha} - 1\right)^2}{\left(\frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot \alpha \cdot 9}}{2\,\alpha}\right)^2}$$

Diese Abhängigkeit zwischen Druck und Temperatur ist nach Porter in Fig. 2 aufgezeichnet und für Luft die absoluten Daten eingetragen; als kritischer Druck wurde nach Olzewski 40 Atm. und als kritische Temperatur — 140° angenommen.

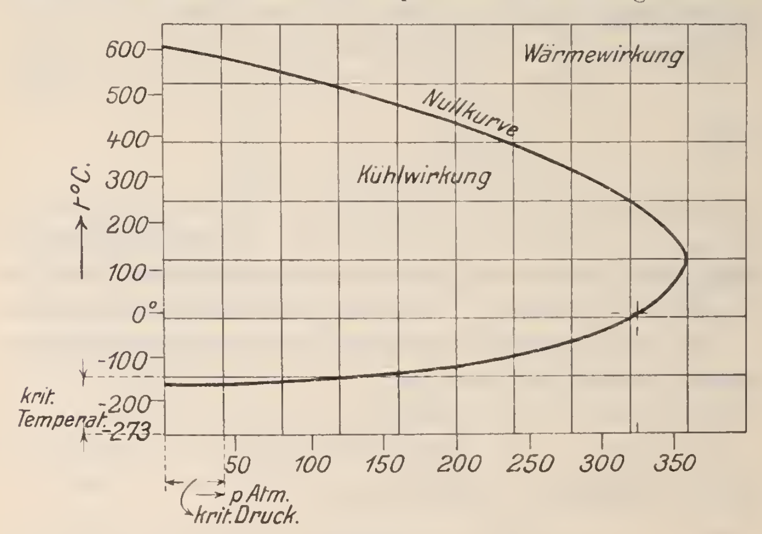


Fig. 2.

Die Kurve scheidet die Ebene in zwei Zonen, in der einen findet Abkühlung statt, in der anderen Erwärmung. Die Zone

der Abkühlung ist nur klein und entspricht den positiven Werten von:

$$\left(T\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v$$

Aus der Kurvenform ist ersichtlich, daß es im allgemeinen für einen bestimmten gegebenen Druck zwei Temperaturen gibt, bei denen weder Abkühlung noch Erwärmung auftritt. Dagegen entspricht einer gegebenen Temperatur nur ein Druckwert für die Nullwirkung.

Beispielsweise findet für 0° C. bei 320 Atm. keine Abkühlung statt.

Nach der Formel, die den mitgeteilten Versuchen entspricht,

$$\alpha = 0{,}280 - 0{,}000932\,p$$

würde die Nullwirkung bei 300 Atm. eintreten. Diese Zahl stimmt also gut überein.

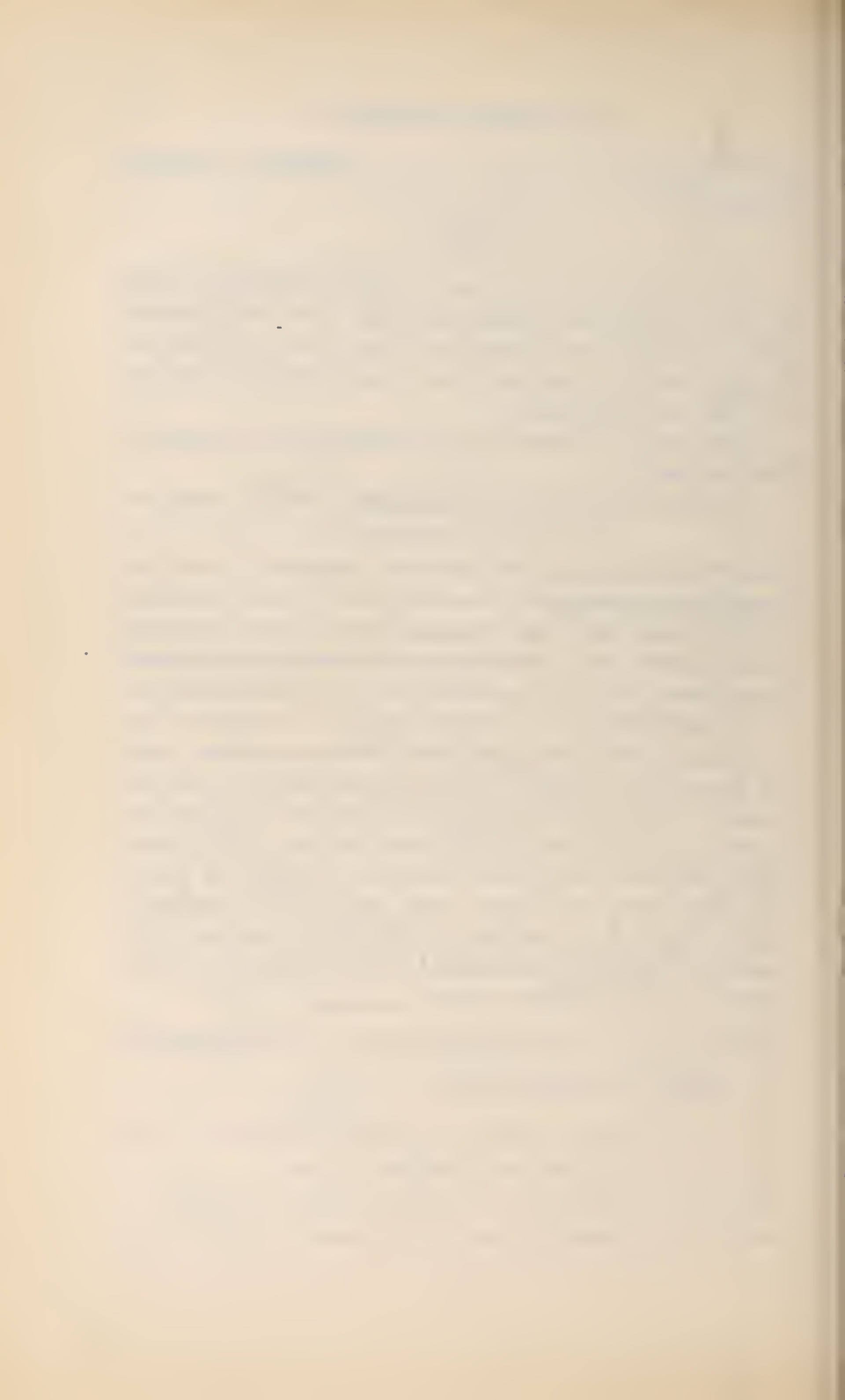
Es wurde hier zum Vergleiche die van der Waalsche Formel gewählt, weil diese für tiefe Temperaturen auch sonst Werte liefert, die mit Beobachtungen[1]) gut übereinstimmen.

Anschließend an die obigen Versuche soll zunächst das Verhalten des Sauerstoffs untersucht werden und sodann sollen die Beobachtungen auch auf höhere Temperaturen ausgedehnt werden. Dieselben können dann Aufschluß geben, welche Form die Nullkurve haben wird. Denn wenn es auch nicht gelingen dürfte, die Kurve selbst experimentell zu erhalten, da, wie die Rechnung zeigt, die Drücke recht große Werte annehmen, so wird man doch Kurven gleichen Kühleffektes und eine Kurve maximalen Effektes finden können. Hieraus lassen sich dann Schlüsse auf die Nullkurve ziehen.

Laboratorium für technische Physik der K. Techn. Hochschule.

München im Januar 1909.

[1]) Peter Paul Koch, Über das Verhältnis der spezifischen Wärmen $\frac{c_p}{c_v} = K$ etc. Annalen der Physik, 1908, Bd. 27, S. 311.



Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 2. Abhandlung

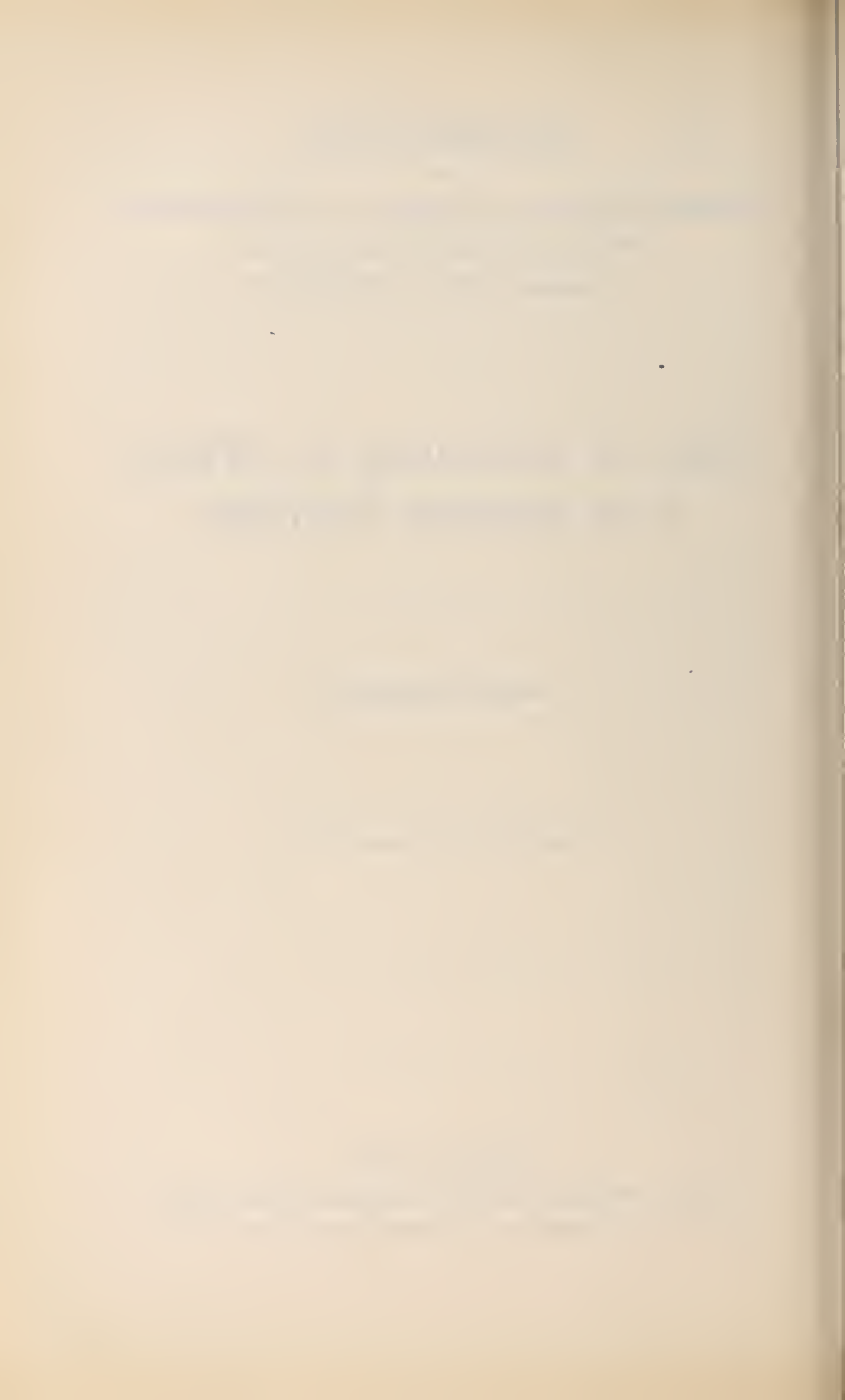
Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie

von

Arnold Sommerfeld

Vorgelegt am 9. Januar 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Während sich die weitaus größte Mehrzahl der praktischen und theoretischen Arbeiten über drahtlose Telegraphie mit den Verhältnissen beim Sender und Empfänger beschäftigt, hat die Frage nach der Ausbreitung der Wellen zwischen Sender und Empfänger, insbesondere nach der Rolle, die die Erde hierbei spielt, verhältnismäßig wenig Beachtung gefunden. Mit gutem Grunde: Jene Verhältnisse sind es allein, die der Experimentator kontrollieren kann; dagegen muß er den Mechanismus der Ausbreitung als etwas Gegebenes hinnehmen.

Ein mehr formaler Grund mag hinzukommen: Während sich die Theorie des Senders und Empfängers verhältnismäßig einfach gestaltet und mit praktisch genügender Annäherung (man denke an die gekoppelten Systeme) durch totale Differentialgleichungen beherrscht wird, führt uns die Frage nach der Ausbreitung der Wellen unausbleiblich in das Gebiet der partiellen Differentialgleichungen und stellt uns vor nicht ganz einfache Randwertaufgaben.

Zwei Auffassungen stehen sich hier gegenüber, die — wenigstens in allgemeinen Umrissen — durch den Gegensatz „Raumwellen" und „Oberflächenwellen" gekennzeichnet werden. Mit Raumwellen haben wir es in der Akustik und bei der überwiegenden Mehrzahl der optischen Erscheinungen zu tun. Ebenfalls zu den Raumwellen gehören die Hertzschen Wellen der Elektrodynamik. Das klassische Beispiel von Oberflächenwellen sind diejenigen der Hydrodynamik. In der Optik treten bei der Totalreflexion im optisch dünneren Medium Oberflächen-

*) Auszug aus einer umfangreicheren Arbeit, welche in den Annalen der Physik erscheinen wird.

wellen auf, die namentlich von Voigt theoretisch und experimentell untersucht sind. Ferner sind die elektrodynamischen Drahtwellen typische Oberflächenwellen. Endlich sei auf die Elastizitätstheorie hingewiesen, wo sich in den neueren seismischen Beobachtungen die Wellen vom Raum- und Oberflächentyp deutlich voneinander sondern lassen.

Welchem Typus sind nun die Wellen der drahtlosen Telegraphie zuzuzählen? Sind sie den Hertzschen Wellen in Luft zu vergleichen oder den Hertzschen Drahtwellen?

Die erste Ansicht dürfte die vorherrschende sein. Sie stützt sich in quantitativer Hinsicht auf eine Untersuchung von M. Abraham, dem es unter Annahme einer vollkommen leitenden ebenen Erdoberfläche gelang, aus der Hertzschen Funktion des Dipols Gesetze für die Ausbreitung der elektrischen und magnetischen Kraft, ihre Abhängigkeit von Entfernung und Azimut etc. zu entwickeln und damit zu einer ersten Klärung unseres Gebietes wesentlich beizutragen.

Die Hertzsche Funktion des Dipols lautet bekanntlich:

$$\Pi = \frac{e^{ikR}}{R},$$

wo R den Abstand des Aufpunktes vom Dipol, k eine Materialkonstante des umgebenden Mediums (s. u.) bedeutet (im reinen Äther ist $\frac{k}{2\pi}$ die reziproke Wellenlänge der Hertzschen Schwingung). In Gedanken ist bei Π der Zeitfaktor e^{-int} (n = Frequenz der Schwingung) und der Übergang zum reellen Teil zu ergänzen. Aus diesem Π läßt sich das elektromagnetische Feld durch einen einfachen Differentiationsprozeß ableiten; insbesondere wird für die Umgebung der Erregungsstelle ($R = 0$) das elektrische Feld gleich dem Gradienten von $\frac{\partial \Pi}{\partial z}$, wenn z die Achse des Erregers ist, was eben der Differenzwirkung einer punktförmigen positiven und negativen oszillierenden Ladung, d. h. einem Dipol, entspricht.

Die Kraftlinien dieses Feldes stehen auf der Äquatorebene ($z = 0$) des Dipols senkrecht. An ihre Stelle tritt bei der

Abrahamschen Anwendung der Hertzschen Funktion die Erdoberfläche, auf der ja unter der Annahme unendlich guter Leitfähigkeit die Kraftlinien ebenfalls senkrecht endigen müssen. Die Erde würde unter dieser Annahme keine andere Rolle spielen, als daß sie den vom Sender ausgehenden Raumwellen den Eintritt verwehrt.

Übrigens tritt die Hertzsche Lösung in der Optik schon viel früher auf zur Charakterisierung einer einfachsten optischen Punktquelle, von der sich kugelförmige Raumwellen ausbreiten. Wir werden daher Π auch vielfach als Funktion des leuchtenden Punktes bezeichnen.

Die umgekehrte Ansicht, daß es sich bei der drahtlosen Telegraphie um ein Analogon zu den Drahtwellen handle und daß die Erde die Wellenfortpflanzung wesentlich mitbestimme, ist verschiedentlich geäußert worden. Eine quantitative Unterlage erhielt sie durch Arbeiten von Uller[1]) und Zenneck.[2]) Uller untersucht eine bestimmte Art ebener — in der Bezeichnung von Voigt „inhomogener ebener“ — Wellen, welche auf die Grenze der beiden Medien Erde und Luft mehr oder minder konzentriert sind. Zenneck zieht unter Voraussetzung dieser Wellenform eine Reihe bemerkenswerter Schlüsse über das Verhalten elektrischer Wellen bei verschiedener Bodenbeschaffenheit und über die Wirkung der Empfänger und Sender für gerichtete Telegraphie.

Als Oberflächenwellen werden diese Wellen namentlich durch den Wert von Fortpflanzung und Dämpfung gekennzeichnet. Sind ε, μ, σ Dielektrizitätskonstante, Permeabilität und Leitfähigkeit des ersten oder zweiten Mediums (Luft und Erde), so kommt es wesentlich auf die Größe

$$k^2 = \frac{\varepsilon \mu n^2 + i \mu \sigma n}{c^2}$$

---

[1]) K. Uller, Beiträge zur Theorie der elektromagnetischen Strahlung. Dissertation, Rostock 1903.

[2]) J. Zenneck, Ann. der Physik 23, p. 846, 1907, sowie Physik. Zeitschrift 9, p. 50 und 553, 1908.

an, die wir für Luft und Erde als k_1^2 und k_2^2 unterscheiden. Aus beiden Größen baut sich, wenn die Permeabilität von Luft und Erde gleich eins gesetzt wird, (ein Fall, auf den wir uns in dieser Übersicht durchweg beschränken dürfen), diejenige komplexe Größe

$$s = \sqrt{\frac{k_1^2 k_2^2}{k_1^2 + k_2^2}}$$

auf, welche Fortpflanzung und Dämpfung durch ihren reellen und imaginären Teil bestimmt. Dabei ist die Bezeichnung als Oberflächenwelle nicht so aufzufassen, daß wie bei den Wasserwellen oder den seismischen Störungen der Sitz der Wellen wesentlich das zweite Medium sei. Im Gegenteil findet sich der Hauptteil der Energie im ersten Medium Luft, ebenso wie bei den Drahtwellen. Die Amplitude nimmt von der Erdoberfläche nach oben hin langsam, nach unten hin schnell ab (Skineffekt).

Dieser interessante Wellentyp war aber bisher durchaus hypothetisch. Daß er sich wirklich aus den vom Sender ausgehenden Wellen in größerer Entfernung vorzugsweise herausbildet, dafür fehlte sozusagen der Existenzbeweis. Es ist eine Hauptaufgabe unserer Untersuchung, diesen Beweis zu liefern und die Frage: Raumwellen oder Oberflächenwellen? zu entscheiden.

Von vornherein ist zu betonen, daß die Antwort nicht unbedingt und für alle Fälle gleich sein wird, wie denn überhaupt unsere vereinfachten Begriffe und Bezeichnungen meist nur gewisse Grenzfälle richtig treffen, ohne der Komplexität der Erscheinungen im allgemeinen gerecht zu werden. So verliert die Bezeichnung des einfallenden und reflektierten Lichtes bei allgemeinen optischen Problemen ihren präzisen Sinn und geht in den allgemeinen Begriff des optischen Feldes der Beugungserscheinungen über. Ähnlich gibt es in unserem Falle Übergänge zwischen Raum- und Oberflächenwellen und wird eine scharfe Sonderung beider im allgemeinen unmöglich. Immerhin treten genau die Uller-Zenneckschen Oberflächenwellen

als ein wesentlicher und unter gewissen Umständen überwiegender Bestandteil des elektromagnetischen Feldes hervor, begleitet von Raumwellen, welche unter gewissen anderen Umständen ihrerseits überwiegen.

Wir haben zunächst das mathematische Problem zu skizzieren, welches die Grundlage unserer Diskussion bildet. Es handelt sich gewissermaßen darum, den leuchtenden Punkt der Hertzschen Lösung in zwei Teile zu zerspalten, eine dem Medium 1 und eine dem Medium 2 entsprechende Hälfte, und beide vermöge der Grenzbedingungen zwischen 1 und 2 aneinander anzupassen; oder anders ausgedrückt, das Hertzsche Π durch ein Funktionenpaar Π_1, Π_2 zu ersetzen, das durch die Differentialgleichungen

$$\Delta \Pi_1 + k_1^2 \Pi_1 = 0 \text{ für } z > 0, \quad \Delta \Pi_2 + k_2^2 \Pi_2 = 0 \text{ für } z < 0$$

und die Grenzbedingungen an der als eben vorausgesetzten Trennungsfläche

$$\Pi_1 = \Pi_2, \quad \frac{1}{k_1^2} \frac{\partial \Pi_1}{\partial z} = \frac{1}{k_2^2} \frac{\partial \Pi_2}{\partial z} \text{ für } z = 0$$

bestimmt wird und von denen an der Erregungsstelle $R = 0$ sich Π_1 wie eine Hertz'sche Lösung in 1, Π_2 wie eine solche in 2 verhält. Eine so weitgehende Vereinfachung der tatsächlichen Verhältnisse ist natürlich nur für solche Entfernungen zulässig, von denen aus die Antenne als Erregungspunkt erscheint, die also groß gegen die Wellenlänge der Schwingung sind. Wie sich das Feld in der unmittelbaren Umgebung des Senders verhält, kann und will unsere Theorie nicht beschreiben.

Die strenge Lösung dieses Problems, welches durch die soeben genannten und einige ergänzende Bedingungen eindeutig bestimmt ist, lautet, in Polarkoordinaten r, z geschrieben, wobei $R^2 = r^2 + z^2$ wird:

$$\Pi_1 = \int_0^\infty \frac{k_1^2 + k_2^2}{N} J(\lambda r)\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\, z}\, \lambda\, d\lambda,$$

$$\Pi_2 = \int_0^\infty \frac{k_1^2 + k_2^2}{N} J(\lambda r)\, e^{+\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}\, z}\, \lambda\, d\lambda,$$

wo J die Besselsche Funktion vom Index O und N die Abkürzung bedeutet:

$$N = k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + k_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}.$$

Die Quadratwurzeln sind hier und im folgenden stets mit positiv reellem Teil zu nehmen. Für $k_2 = \infty$ (vollkommen leitende Erde) ergibt sich, wie es sein muß, der Abrahamsche Grenzfall:

$$\Pi_1 = \frac{e^{ik_1 R}}{R}, \quad \Pi_2 = 0.$$

Gehen wir zu rechtwinkligen Koordinaten x, y, z über, so daß $r^2 = x^2 + y^2$, und nehmen k_1 als reell an, was dem Falle ungedämpfter Wellen in Luft hinreichend genau entspricht, so läßt sich Π_1 deuten als Superposition eines Bündels gewöhnlicher ebener homogener Wellen Π_h und eines solchen inhomogener Wellen Π_i; ersteres gegeben durch die Integration $0 < \lambda < k_1$, letzteres durch $k_1 < \lambda < \infty$. Wir ersetzen zu dem Zwecke die Besselsche Funktion durch ihre Integraldarstellung

$$J(\lambda r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} d\alpha$$

und führen in dem Teile $0 < \lambda < k_1$ die neue Integrationsvariable β durch die Beziehungen

$$\lambda = k_1 \sin \beta, \quad \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} = i k_1 \cos \beta$$

ein. Dann wird

$$\Pi_h = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\beta \, A \, e^{ik_1(x \cos \alpha \sin \beta + y \sin \alpha \sin \beta - z \cos \beta)}$$

mit der Abkürzung:

$$A = \frac{k_1^2}{2\pi} \frac{k_1^2 + k_2^2}{N} \sin \beta \cos \beta.$$

Hier erscheint Π_h als ein System gewöhnlicher ebener Wellen, die unter dem Winkel β gegen die Normale zur Erd-

oberfläche einfallen, wobei β variiert zwischen senkrechter Inzidenz

$$(\lambda = 0,\ \beta = 0)$$

und streifender Inzidenz:

$$\left(\lambda = k_1,\ \beta = \frac{\pi}{2}\right).$$

Die Einfallsebene wird durch das Azimut α gegeben, welches alle Werte zwischen 0 und 2π annimmt; die Amplitude A hängt in bestimmter Weise von dem Einfallswinkel β ab und ist aus Symmetriegründen von dem Azimut α unabhängig.

In ähnlicher Weise schreibt sich der zweite Bestandteil Π_i unserer Lösung (unter Beibehaltung der ursprünglichen Integrationsvariabeln λ):

$$\Pi_i = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{k_1}^{\infty} \lambda\, d\lambda\, \frac{k_1^2 + k_2^2}{2\pi N}\, e^{i\lambda(x\cos\alpha + y\sin\alpha) - \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\, z}.$$

Auch hier handelt es sich um ein System ebener Wellen, aber nicht gewöhnlicher homogener, sondern inhomogener Wellen: Die Ebenen konstanter Phase sind, da jetzt $\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$ reell ist:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = \text{const},$$

stehen also auf der Erdoberfläche senkrecht, die Ebenen konstanter Amplitude werden:

$$z = \text{const},$$

sind also zur Erdoberfläche parallel. Definieren wir die Inzidenz durch die Normale zu den Ebenen konstanter Phase, so kommt allen diesen inhomogenen Wellen „streifende Inzidenz" zu, so daß sich dieses inhomogene Wellensystem stetig an das vorige homogene anschließt. Unsere inhomogenen Wellen sind durchaus vom Charakter derjenigen Wellen, die sich bei der Totalreflexion im optisch dünneren Medium parallel der Trennungsfläche fortpflanzen. Es liegt daher nahe, das erste Bündel der

oberen, im Medium 1 gelegenen „Hälfte unseres leuchtenden Punktes“, das zweite der unteren, im optisch dichteren Medium 2 enthaltenen „Hälfte“ zuzuschreiben. Indessen muß zu dieser Ausdrucksweise bemerkt werden, daß eine solche Trennung des im Grunde einheitlichen und untrennbaren Vorganges physikalisch nicht zu realisieren ist.

Schwieriger als die Aufstellung der allgemeinen Formeln erweist sich hier wie so häufig, ihre spezielle Diskussion und zahlenmäßige Berechnung. Bei dieser tritt ein besonders wichtiges Element unserer Theorie hervor, das wir die *numerische Entfernung* des Aufpunktes vom Sender nennen. Es zeigt sich nämlich, daß Größe und Charakter der übertragenen Wirkung nicht so sehr von der *absoluten Entfernung* r (diese etwa gemessen gedacht in Einheiten der Wellenlänge) abhängt, als vielmehr von einer reinen Zahl ϱ — eben unserer numerischen Entfernung —, die sich aus r und den Materialkonstanten k_1, k_2 berechnet. In dem Auftreten dieser Größe haben wir eine Art *Ähnlichkeitsgesetz der drahtlosen Telegraphie* zu sehen, welches sich aber hier nicht direkt aus den Differentialgleichungen des Problems, sondern erst aus seinen Integralen entnehmen läßt, wie schon daraus hervorgeht, daß es nicht in Strenge und allgemein, sondern nur mit Annäherung in der Nähe der Erdoberfläche gilt.

Wir definieren:

$$\text{a)}\qquad \varrho = \left| \frac{k_1^4}{k_2^4} \, \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1^2} \, \frac{k_1 r}{2} \right| .$$

In dem besonderen Falle, wo k_1 reell (ungedämpfte Schwingungen in Luft), k_2^2 rein imaginär (εn zu vernachlässigen gegen σ) und k_1^2 klein gegen k_2^2 (Luft gegen Seewasser) ist, kann man für ϱ einfacher schreiben:

$$\text{b)}\qquad \varrho = \frac{k_1^2}{(-i k_2^2)} \, \frac{k_1 r}{2} .$$

Die numerische Entfernung ϱ wächst also mit der absoluten Entfernung r, ist aber bei gleichem r über Seewasser

$$\left(\left|\frac{k_2^2}{k_1^2}\right| \text{ groß}\right)$$

viel kleiner als über Land und Süßwasser.

Wir berichten zunächst kurz über den mathematischen Gedankengang unserer Diskussion der allgemeinen Lösung. Diese wird zum Teil in der komplexen Ebene der Integrationsvariabeln λ, zum Teil durch Reihenentwickelung bewerkstelligt.

In der λ-Ebene gibt es einen ausgezeichneten Punkt, wo der Nenner N verschwindet. Dieser „Pol" liegt genau bei dem oben angegebenen Werte $\lambda = s$. Das zugehörige mit $2\pi i$ multiplizierte Residuum des Integranden, welches nach dem Cauchyschen Satz den Wert des Integrals bei einem Umgang um den Pol bestimmt, lautet bei großem r:

$$P = \frac{A}{\sqrt{r}} e^{isr - \sqrt{s^2 - k_1^2}\, z} \ldots z > 0,$$

$$P = \frac{A}{\sqrt{r}} e^{isr + \sqrt{s^2 - k_2^2}\, z} \ldots z < 0,$$

wobei:

$$A = \frac{k_1 k_2}{k_1^2 - k_2^2} \sqrt{2\pi s}\, e^{\frac{-i\pi}{4}}.$$

und liefert bei unbegrenzt wachsendem r eine ebene Welle, welche sich genau mit der von Uller und Zenneck postulierten Oberflächenwelle deckt. Das Vorhandensein jenes Poles in dem der Integration zugänglichen Blatte der λ-Ebene und daher das Auftreten dieser Wellen ist an eine Ungleichung zwischen den Materialkonstanten beider Medien geknüpft. Indem gezeigt wird, daß diese Ungleichung unter den Verhältnissen der drahtlosen Telegraphie stets erfüllt ist, wird der verlangte Existenzbeweis für die Oberflächenwellen erbracht. Zwei weitere Bestandteile Q_1, Q_2 unserer allgemeinen Lösung ergeben sich als Umgänge um zwei in der λ-Ebene wegen des Auftretens der Quadratwurzeln $\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$ und $\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}$ anzubringende Verzweigungsschnitte und haben

den Charakter von Raumwellen des Mediums 1 und 2, da ihre Fortpflanzung in 1 oder 2 allein durch die Materialkonstanten dieses Mediums bestimmt wird. Mit wachsendem r nimmt ihre Amplitude wie $\frac{1}{r^2}$ ab. Übrigens kann Q_2 gegen Q_1 praktisch vernachlässigt werden.

Der auf diesem Wege gefundene Ausdruck für Q_1 ist nur als erste Näherung bei unendlich wachsendem r anzusehen. Indem man in der strengen Lösung

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{k_1^2\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \sum_0^\infty \left(-\frac{k_2^2}{k_1^2}\sqrt{\frac{\lambda^2 - k_1^2}{\lambda^2 - k_2^2}}\right)^\nu$$

entwickelt, fügt man eine unendliche Serie weiterer Glieder hinzu, deren jedes sich bei geeigneten Vernachlässigungen auffassen läßt als Wirkung einer an der Erregungsstelle supponierten höheren Singularität, entstanden durch das Zusammenwirken von zwei oder mehreren Dipolen. Wir schreiben die fragliche Reihe nur für die Erdoberfläche ($z = 0$, $R = r$) und unter den der Formel b) für die numerische Entfernung zu Grunde liegenden Voraussetzungen an:

$$\text{A)} \quad Q_1 = -\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\varrho} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{\varrho^3} + \cdots\right)\frac{e^{ik_1 r}}{r}.$$

Die Reihe schreitet also nach negativen Potenzen der numerischen Entfernung fort und ist nur brauchbar (semikonvergent) für große Werte dieser Größe.

Wichtiger ist eine zweite Reihenentwickelung, welche die beiden Bestandteile P und Q_1 gleichzeitig wiedergibt und bei Vernachlässigung von Q_2 (s. o.) zur Darstellung des vollständigen Wertes von Π im ersten Medium dient. Man erhält sie, wenn man in der strengen Lösung die zu der vorigen reziproke Entwickelung

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{k_2^2\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \sum_0^\infty \left(-\frac{k_1^2}{k_2^2}\sqrt{\frac{\lambda^2 - k_2^2}{\lambda^2 - k_1^2}}\right)^\nu$$

vornimmt. Dadurch entsteht eine Reihe, deren aufeinanderfolgende Glieder sich bei geeigneten Vernachlässigungen deuten lassen als Wirkung eines „leuchtenden Punktes", einer an der Erregungsstelle endigenden „leuchtenden Linie" von gleichmäßiger, von Dreiecks-, Parabel-Belegung u. s. f. Für die Erdoberfläche und die der Formel b) zu Grunde liegenden Voraussetzungen spezialisiert, lautet sie:

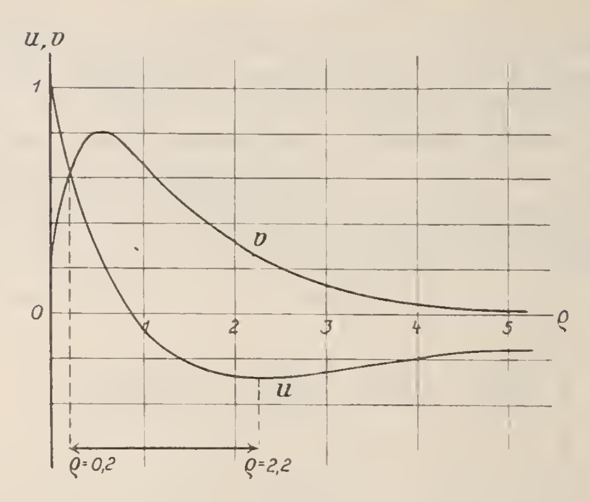
$$\text{B)}\quad \begin{cases} \Pi_1 = (u - i v)\,\dfrac{e^{i k_1 r}}{r} \\[2ex] u = 1 - \dfrac{2}{1}\varrho + \dfrac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\varrho^2 - \dfrac{2\cdot 2\cdot 2}{1\cdot 3\cdot 5}\varrho^3 + \cdots \\[2ex] v = \sqrt{\pi\varrho}\left(1 - \dfrac{\varrho}{1!} + \dfrac{\varrho^2}{2!} - \dfrac{\varrho^3}{3!} + \cdots\right). \end{cases}$$

Diese Reihe schreitet also nach positiven Potenzen der numerischen Entfernung fort und ist für alle Werte von ϱ konvergent, jedoch nur für kleine numerische Entfernungen zweckmäßig. (Die absolute Entfernung r wird natürlich auch hier als groß vorausgesetzt.) Insbesondere dient sie dazu, den Abrahamschen Grenzfall des vollkommenen Leiters ($k_2 = \infty$, $\varrho = 0$) in unsere Theorie einzuordnen.

Für die zahlenmäßige Berechnung und graphische Darstellung ist eine geschlossene Form der letzten Ausdrücke bequem, welche unter denselben Voraussetzungen und Vernachlässigungen gilt und auf welche man auch durch Summation der Reihe A) geführt wird, nämlich:

$$\Pi_1 = \left(1 - 2\sqrt{\varrho}\, e^{-\varrho}\int_{-i\infty}^{\sqrt{\varrho}} e^{\beta^2}\, d\beta\right)\frac{e^{i k_1 r}}{r}.$$

Unsere Figur 1 stellt die reellen Größen u, v der Formel B) dar, welche mit dem reellen und imaginären Teil der Klammer in dem vorstehenden geschlossenen Ausdruck identisch sind. Mit dem Faktor $\dfrac{e^{i k_1 r}}{r}$ multipliziert, erweisen sie sich im wesentlichen gleich den obengenannten Bestandteilen Q_1 und P,



Figur 1.

liefern also die Trennung des Vorganges in eine Raum- und Oberflächenwelle.

Nach dieser allgemeinen Übersicht heben wir einige praktische Konsequenzen unserer Theorie hervor.

1. Die Eindeutigkeit unseres Problems bei vorgegebener axial-symmetrischer Erregung läßt einen allgemeinen Schluß auf den Einfluß zu, den die besondere Anordnung des Senders, seine mehr oder minder innige Erdung, seine Ausbildung als einfaches oder gekoppeltes System etc. haben kann. In unserer Lösung bleibt unbestimmt nur die (bei Dämpfung komplexe) Frequenz n und eine allen unseren Formeln hinzuzufügende multiplikative Konstante C, die die Intensität des Vorganges mißt; ihrem Quadrat ist die aufzuwendende Energie proportional. Nur diese beiden Konstanten n und C können durch die Besonderheiten des Senders beeinflußt werden, während der Ausbreitungsvorgang als solcher davon unabhängig verläuft. Es ist bekannt, daß Frequenz und Dämpfung (also unsere Konstante n) durch Selbstinduktion, Kapazität und Widerstand der Stromkreise des Senders bestimmt werden. Dasselbe gilt von dem Wirkungsgrade der im Sender aufge-

wendeten Energie (also unserer Konstanten C). Was die Erdung betrifft, so fällt die Frage, wie sie Frequenz und Dämpfung, Stromverteilung und Stromamplitude auf der Antenne beeinflußt, außerhalb des Rahmens unseres Problems. Einen Einfluß auf die Form des Wellenvorganges, seine Abnahme mit der Entfernung etc. dagegen müssen wir, eben wegen der Eindeutigkeit unseres Problems, für ausgeschlossen erklären. Insbesondere kann die Erdung nicht, wie man etwa denken könnte, die flächenhafte Ausbreitung der elektrischen Störung auf Kosten der räumlichen Ausbreitung begünstigen. Vielmehr ist das Verhältnis zwischen Oberflächen- und Raumwellenanteil von der Erdung und überhaupt von der Anordnung des Senders unabhängig.

Bei diesen Schlüssen ist allerdings nur die Rede von solchen Antennen, deren Wirkung sich mit einem einfachen, allseitig symmetrischen Dipol identifizieren läßt. Es sind dies höchst wahrscheinlich alle heute gebrauchten symmetrischen Antennen, deren Höhe stets sehr klein gegen die Wellenlänge der Schwingung ist. Bei den früheren Einfach-Antennen, die gleich ein Viertel Wellenlänge oder damit vergleichbar waren, sowie bei den unsymmetrischen geknickten Sendern (vgl. Nr. 8) treten Abweichungen von der Symmetrie des Dipols auf und bedarf unsere Theorie der Ergänzung.

2. Die Größe der numerischen Entfernung und damit zugleich der Charakter der Wellen wird sehr wesentlich bestimmt durch die Bodenbeschaffenheit. Nimmt man beispielsweise die absolute Entfernung gleich $\frac{1}{4}$ Erdquadrant (entsprechend etwa der Marconischen transatlantischen Station) und die Wellenlänge der Schwingung gleich 2 km (entsprechend der deutschen Station Nauen), so ergibt sich nach gewissen runden Angaben von Zenneck über Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante:

Für	Seewasser	Süßwasser	Nassen Boden	Trockenen Boden
	$\varrho = \frac{1}{30}$	$\varrho = 30$	$\varrho = 6{,}5$	$\varrho = 300$

Entsprechend der ganz verschiedenen Größenordnung dieser Zahlen haben wir in diesen Fällen auch eine durchaus verschiedene Größenordnung der telegraphischen Wirkung und ein ganz verschiedenes Bild des Wellenvorgangs zu erwarten.

3. Durch Vergrößerung der Wellenlänge l (Verkleinerung der Frequenz) wird der Wert von ϱ verkleinert, in dem Sonderfalle der Formel b) sogar quadratisch, weil sich k_1 wie $\frac{1}{l}$ und $(-ik_2^2)$ ebenfalls wie $\frac{1}{l}$ verhält. Durch Verkleinerung von ϱ nähern wir uns aber dem idealen Falle des vollkommenen Leiters ($\varrho = 0$). Wir schließen daraus, daß eine Vergrößerung der Wellenlänge für die Überwindung großer Entfernungen günstig sein wird, wie die Praxis längst erkannt hat. Übrigens würde die früher von Marconi angegebene Regel, nach der man bei vertikaler Einfach-Antenne ihre Höhe und damit die Wellenlänge mit der Quadratwurzel aus der zu überwindenden Entfernung wachsen lassen soll, gerade der Forderung entsprechen, trotz wachsender absoluter Entfernung die numerische Entfernung festzuhalten.

4. Auch die Frage nach dem Gültigkeitsbereich der Annahme eines vollkommen leitenden Erdbodens erweist sich im Grunde als eine Frage nach der Größe der numerischen Entfernung, indem sich ja auch aus unserer Theorie für hinreichend kleine numerische Entfernung der Abrahamsche Grenzfall des vollkommenen Leiters ergibt. Behalten wir von der Reihe B) außer jenem Grenzgliede nur noch das nächstfolgende Glied als Korrektion bei, so lautet sie:

$$\Pi_1 = (1 - i\sqrt{\varrho\pi})\frac{e^{ik_1 r}}{r}.$$

Lassen wir beispielsweise 10% Abweichung vom Grenzfall des vollkommenen Leiters zu, so ist zu verlangen:

$$\sqrt{\varrho\pi} < \frac{1}{10}.$$

Hieraus ergibt sich bei Seewasser und

$$l = 2 \text{ km bzw. } l = \frac{1}{3} \text{ km}$$

als absolute Entfernung, in der die Annahme vollkommener Leitfähigkeit hinreichend genau ist:

$$r = 240 \text{ km bzw. } r = 8 \text{ km},$$

während die entsprechende Entfernung bei anderer Bodenbeschaffenheit unterhalb einer Wellenlänge liegt. Die Annahme vollkommener Leitfähigkeit ist also nur bei Seewasser innerhalb eines sehr engen Bereiches erlaubt.

5. Dem Charakter der Oberflächenwellen entspricht es, daß der Bestandteil P unserer Lösung nur wie $\frac{1}{\sqrt{r}}$ mit wachsendem r abnimmt (wenn man von der hinzukommenden radialen Dämpfung absieht). In der Tat wird bei flächenhafter Ausbreitung der Energie diese wie $\frac{1}{r}$ abnehmen, da durch Kreise (oder zugehörige Zylinder), die um den Erregungspunkt mit verschiedenem Radius geschlagen sind, stets dieselbe Energie hindurchgeht. Daraus folgt aber, daß die Amplitude des Feldes sich wie $\frac{1}{\sqrt{r}}$ verhält. Andererseits wird bei räumlicher Energiestrahlung im einfachsten Falle diese wie $\frac{1}{r^2}$, die Amplitude des Feldes also wie $\frac{1}{r}$ abnehmen, wie es u. a. die Abrahamsche Behandlung des vollkommenen Leiters zeigt. Daß unsere Raumwellen Q_1 (s. o.) wie $\frac{1}{r^2}$ abnehmen, hat seinen Grund wohl darin, daß sie nur im Verein mit den Oberflächenwellen P auftreten können, denen sie fortgesetzt Energie nachzuliefern haben.

Offenbar ist die geringe Abnahme der Oberflächenwellen mit r für die Praxis der Zeichenübertragung bedeutsam. Nur ist zu beachten, daß die mit den Oberflächenwellen notwendig verknüpfte Absorption im zweiten Medium (in der obigen Formel

für P bedingt durch die komplexe Natur von s) eine radiale Dämpfung bewirkt, welche exponentiell fortschreitet und die Oberflächenwellen schließlich stärker zu Null gehen läßt, als selbst die Raumwellen.

6. Über die relative Bedeutung des Raum- und Oberflächenwellen-Bestandteils unserer Lösung orientiert die vorstehende Figur, wo in dem oben angegebenen Sinne u die Raumwelle, v die Oberflächenwelle darstellt. Sie zeigt, daß für sehr kleine numerische Entfernungen $\varrho < 0{,}2$ der Raumwellentypus überwiegt (entsprechend Nr. 4), daß für wachsende ϱ der Oberflächentypus vorherrscht (entsprechend Nr. 5 erster Abs.), während von einem gewissen ϱ ab ($\varrho > 2{,}2$) diese wieder hinter jenen zurücktreten (entsprechend Nr. 5 zweiter Abs.).

7. Unsere Theorie setzt eine ebene Trennungsfläche voraus. Es würde nicht schwer sein, unsere strenge Lösung auf den Fall der gekrümmten Erdoberfläche zu erweitern; nur die Diskussion der so entstehenden Reihe nach Kugel- und Zylinderfunktionen würde Weiterungen verursachen. Aber auch ohne Kenntnis dieser Lösung läßt sich wohl so viel sagen, daß durch die Erdkrümmung die Verhältnisse zu Gunsten der Oberflächenwelle verschoben werden, da durch die Erdkrümmung die Raumwellen abgeschirmt werden, soweit sie dieselbe nicht durch einen Beugungsvorgang überwinden, die Oberflächenwellen aber nicht nennenswert behindert werden. Es ist sehr wohl möglich, daß das schließliche Überwiegen der Raumwellen durch die Erdkrümmung aufgehoben und diese nur mehr für sehr kleine numerische Entfernungen vor den Oberflächenwellen vorherrschen.

In den populären Schriften über drahtlose Telegraphie (z. B. Poincaré) scheint übrigens der Einfluß der Beugung sehr überschätzt zu werden. Wenn dort auf die Größe der Wellenlänge hingewiesen wird, mit der die Stärke der Beugung zunimmt, so ist andererseits daran zu erinnern, daß es immer nur auf das Verhältnis der Wellenlänge zum Krümmungsradius des zu überwindenden Hindernisses ankommt und daß dieses

Verhältnis für die Wellen der drahtlosen Telegraphie und die Erdkrümmung nicht günstiger liegt wie für sichtbares Licht und eine mäßig abgerundete Kante.

8. Auch die Möglichkeit der gerichteten Telegraphie im Sinne Marconis (durch einen geknickten Sender) wird sich durch eine Erweiterung unserer Theorie unschwer erklären lassen. Es ist nur nötig, die symmetrische Erregung, die der skalaren Hertzschen Funktion Π entspricht, zu ersetzen durch eine einseitige unsymmetrische, die durch ein vektorielles Potential, einen „Hertzschen Vektor" in der Bezeichnung von Abraham, gegeben wird.



Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 3. Abhandlung

Über die elementare Herleitung des Weierstrass'schen „Vorbereitungssatzes“

von

F. Hartogs

Vorgelegt am 9. Januar 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Eine der wichtigsten Grundlagen für die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen sowie für die Theorie der impliziten (speziell also der algebraischen) Funktionen einer oder mehrerer Veränderlichen bildet der Weierstraßsche „Vorbereitungssatz", welcher über die in der Umgebung der Stelle $x = x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ gelegenen Nullstellen einer Potenzreihe von $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ Auskunft gibt.[1]) Es soll im folgenden für diesen Satz ein elementarer Beweis angegeben werden, welcher, obwohl nur auf Überlegungen einfachster Art beruhend, bisher unbekannt geblieben zu sein scheint. Derselbe gewinnt eine besonders übersichtliche Gestalt, wenn man einen speziellen Fall des Laurentschen Satzes für mehrere Veränderliche zu Hilfe nimmt, nämlich die Entwicklung einer im Gebiete $\varrho_0 < |x| < \varrho$, $|x_i| < \varrho_i$ eindeutigen und regulären Funktion von $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ in eine nach steigenden und fallenden Potenzen von x sowie nach steigenden Potenzen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fortschreitende $(n+1)$-fache Reihe.[2]) Aus diesem Satze ergibt sich dann

[1]) Weierstraß, Einige auf die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze, § 1 (Abhandlungen aus der Funktionenlehre, p. 107 = Werke II, p. 135). Außer dem nur auf elementaren Betrachtungen fußenden Weierstraßschen Beweise ist noch ein Beweis von Simart (siehe Picard, Traité d'analyse II, 1re édit. p. 241—245, 2e édit. p. 261—265 sowie Jordan, Cours d'analyse II, 2e édit. p. 301—306) bekannt geworden, welcher auf der Anwendung von Randintegralen beruht. (Vgl. auch Enzykl. der math. Wiss. II B 1, Osgood, Nr. 45 und Fußnote 181.) Kurz vor der Drucklegung dieses Aufsatzes erschien ein auf Betrachtungen völlig anderer Art beruhender Beweis von Goursat (Bull. soc. math. 36 (1908), p. 209—215), bei welchem von der Theorie der impliziten Funktionen Anwendung gemacht wird.

[2]) Doch kann in der nämlichen Weise wie beim Weierstraßschen Beweise die Anwendung des Laurentschen Satzes auch umgangen werden. (Vgl. p. 8, Fußnote [2]).)

zunächst in bekannter Weise die Darstellung einer im genannten Gebiete regulären und nichtverschwindenden Funktion durch einen gewissen Exponentialausdruck (§ 1); bei Zugrundelegung dieser Darstellung erfordert aber der Beweis des Weierstraßschen Satzes selbst nur noch wenige Bemerkungen (§ 2). Was den Laurentschen Satz betrifft, so läßt sich dieser in der Gestalt, in der er hier benutzt wird, ebenfalls leicht elementar beweisen, worüber einiges Nähere in § 3 hinzugefügt ist.

§ 1.

Darstellung einer in einem gewissen Gebiete regulären und nichtverschwindenden Funktion durch einen Exponentialausdruck.

Es sind hier die folgenden beiden Sätze zu beweisen, von denen der erste als Vorbereitung für den zweiten dient:

1. Ist die Funktion $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ im Gebiete $|x_i| < \varrho_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ eindeutig, regulär und nichtverschwindend, so gibt es eine in diesem Gebiete absolut konvergierende, nach ganzzahligen positiven Potenzen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fortschreitende Reihe $\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ derart, daß:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e^{\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \qquad (|x_i| < \varrho_i).$$

Beweis. Da die Funktion $\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x_1}$ im betrachteten Gebiete eindeutig und regulär ist, so läßt sie sich daselbst durch eine absolut konvergente gewöhnliche Potenzreihe $\bar{\mathfrak{P}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ darstellen, welche nach Potenzen von x_1 geordnet werden möge:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{F} = \bar{\mathfrak{P}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{\mathfrak{P}}_\nu(x_2, x_3, \ldots, x_n) x_1^\nu \qquad (|x_i| < \varrho_i).$$

Daraus folgt:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Psi(x_2, \ldots, x_n)\, e^{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \bar{\mathfrak{P}}_\nu(x_2, x_3, \ldots, x_n) \frac{x_1^{\nu+1}}{\nu+1}} \qquad (|x_i| < \varrho_i),$$

wobei der Exponent offenbar wieder eine im betrachteten Gebiete absolut konvergente Potenzreihe von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ darstellt und $\Psi(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ eine für $|x_i| < \varrho_i \, (i = 2, 3, \ldots, n)$ eindeutig definierte, von x_1 unabhängige Größe bedeutet, welche, wie aus der Gleichung hervorgeht, überdies für jedes derartige Wertsystem regulär und von 0 verschieden ist.

Hieraus ergibt sich zunächst die Richtigkeit des Satzes für den Fall $n = 1$, in welchem Ψ sich auf eine von 0 verschiedene Konstante reduziert. Nimmt man nun ferner den Satz für $n - 1$ Veränderliche als bewiesen an, so hat man

$$\Psi(x_2, x_3, \ldots, x_n) = e^{\mathfrak{P}_0(x_2, x_3, \ldots, x_n)}$$

und somit:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e^{\mathfrak{P}_0(x_2, x_3, \ldots, x_n) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu(x_2, x_3, \ldots, x_n) \frac{x_1^{\nu+1}}{\nu+1}}$$

$$= e^{\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

wo $\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wiederum eine im betrachteten Gebiete absolut konvergente Reihe bezeichnet. Mithin gilt der Satz auch für beliebig viele Veränderliche.

2. Es sei $0 < \varrho_0 < \varrho$. Ist alsdann die Funktion $F(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ im Gebiete $|x| < \varrho$, $|x_i| < \varrho_i \, (i = 1, 2, \ldots, n)$ eindeutig und regulär, und ferner, solange $|x| > \varrho_0$ bleibt, daselbst beständig von Null verschieden, so gibt es eine (nicht negative) ganze Zahl m und eine für $\varrho_0 < |x| < \varrho$, $|x_i| < \varrho_i$ absolut konvergierende, nach steigenden und fallenden Potenzen von x sowie nach steigenden Potenzen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fortschreitende $(n+1)$-fache Reihe $P(x, x_1, \ldots, x_n)$ derart, daß

$$F(x, x_1, \ldots, x_n) = x^m e^{P(x, x_1, \ldots, x_n)}$$

für:

$$\varrho_0 < |x| < \varrho, \quad |x_i| < \varrho_i.$$

Beweis. Da die Funktion $\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x}$ im Gebiete

$$\varrho_0 < |x| < \varrho, \quad |x_i| < \varrho_i$$

eindeutig und regulär ist, so gilt nach dem Laurentschen Satze (vgl. § 3) für dieses Gebiet:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{F} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{P}_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, x^\nu.$$

Dabei bedeuten die $\mathfrak{P}_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gewöhnliche Potenzreihen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und der rechtsstehende Ausdruck ist, auch wenn er als $(n+1)$-fache Reihe aufgefaßt wird, im betrachteten Gebiete absolut konvergent. Denkt man sich nun den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ irgend ein spezielles (den Bedingungen $|x_i| < \varrho_i$ genügendes) Wertsystem beigelegt, so bezeichnet nach einem bekannten Satze der Koeffizient von x^{-1} die Anzahl der dem Gebiete $|x| \leqq \varrho_0$ angehörenden Elementarnullstellen von $F(x, x_1, \ldots, x_n)$. Es ist also $\mathfrak{P}_{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ für jedes derartige Wertsystem gleich einer (nicht negativen) ganzen Zahl und somit konstant:

$$\mathfrak{P}_{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m.$$

Hieraus folgt:

$$F(x, x_1, \ldots, x_n) = \Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot x^m e^{\sum\limits_{(\nu \gtrless -1)} \mathfrak{P}_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}},$$

wobei der Exponent offenbar wiederum eine im betrachteten Gebiete absolut konvergente $(n+1)$-fache Reihe darstellt und $\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine für $|x_i| < \varrho_i$ eindeutig definierte, von x unabhängige Größe bedeutet, welche, wie aus der Gleichung hervorgeht, überdies für jedes derartige Wertsystem regulär und von 0 verschieden ist. Nach dem vorigen Satze gilt also:

$$\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e^{\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \qquad (|x_i| < \varrho_i),$$

wo $\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine für $|x_i| < \varrho_i$ absolut konvergente gewöhnliche Potenzreihe bezeichnet, und durch Einsetzen in die vorige Gleichung folgt daraus die Behauptung.[1])

[1]) Wird von der Funktion $F(x, x_1, \ldots, x_n)$ lediglich vorausgesetzt, daß sie im Gebiete $\varrho_0 < |x| < \varrho$, $|x_i| < \varrho_i$ eindeutig definiert, regulär

§ 2.

Beweis des Weierstrassschen Vorbereitungssatzes.

Es handelt sich um den Beweis des folgenden Satzes:

Ist $F(x, x_1, \ldots, x_n)$ eine für die Umgebung der Stelle $x = x_1 = \cdots = x_n = 0$ eindeutig definierte und reguläre Funktion der Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$ und verschwindet die Funktion $F(x, 0, \ldots, 0)$ von x für $x = 0$ genau von der m^{ten} Ordnung ($m \geq 1$), so gilt für eine gewisse Umgebung

$$|x| < \varrho, \quad |x_i| < \varrho_1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

jener Stelle die Beziehung:

$$F(x, x_1, \ldots, x_n) = (x^m + f_1 x^{m-1} + f_2 x^{m-2} + \cdots + f_m)\, e^{\mathfrak{G}(x, x_1, \ldots, x_n)}.$$

Dabei bedeuten $f_1, f_2, \ldots, f_m$ gewöhnliche Potenzreihen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$, welche sämtlich für $|x_i| < \varrho_1$ absolut konvergieren und für $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ verschwinden; $\mathfrak{G}(x, x_1, \ldots, x_n)$ eine für $|x| < \varrho$, $|x_i| < \varrho_1$ absolut konvergente gewöhnliche Potenzreihe von $x, x_1, \ldots, x_n$.

Durch geeignete Wahl von ϱ_1 kann man es überdies erreichen, daß für $|x_i| < \varrho_1$ die absoluten Beträge der sämtlichen Wurzeln der Gleichung

$$x^m + f_1 x^{m-1} + \cdots + f_m = 0$$

unterhalb einer beliebig vorgeschriebenen positiven Zahl ϱ_0 verbleiben.

Beweis. Da die Funktion $F_0(x) = F(x, 0, \ldots, 0)$ nach Voraussetzung nicht identisch verschwindet, so kann man eine positive Größe ϱ von der Eigenschaft bestimmen, daß $F_0(x)$ für $0 < |x| \leq \varrho$ von 0 verschieden bleibt und daß zugleich

---

und nichtverschwindend sei, so behält auch dann noch der Satz seine Gültigkeit bei, mit dem einzigen Unterschiede, daß m dann auch negativ sein kann. Der Beweis stimmt mit dem des Textes überein, falls der Satz für den Fall einer Variablen als bekannt vorausgesetzt wird.

$F(x, x_1, \ldots, x_n)$ sicher noch regulär ist, solange $|x| \leqq \varrho$ verbleibt und die absoluten Beträge von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine gewisse positive Zahl nicht überschreiten. Wenn ferner eine zweite positive Größe ϱ_0 der Bedingung $0 < \varrho_0 < \varrho$ entsprechend beliebig angenommen wird, so bleibt $F(x, x_1, \ldots, x_n)$ im ganzen Gebiete

$$\varrho_0 < |x| < \varrho, \quad |x_i| < \varrho_1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

durchweg regulär und von Null verschieden, vorausgesetzt, daß die positive Zahl ϱ_1 hinlänglich klein gewählt wird.[1])

Nach § 1 gibt es daher für $F(x, x_1, \ldots, x_n)$ in diesem Gebiete eine Darstellung von der folgenden Art:

$$(1) \qquad F(x, x_1, \ldots, x_n) = x^{\overline{m}} e^{P(x, x_1, \ldots, x_n)} = x^{\overline{m}} e^{\mathfrak{G}(x, x_1, \ldots, x_n) + \frac{1}{x} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}, x_1, \ldots, x_n\right)}.$$

Dabei bezeichnet $\overline{m}$ eine (nicht negative) ganze Zahl, $\mathfrak{G}(x, x_1, \ldots, x_n)$ und $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}, x_1, \ldots, x_n\right)$ gewöhnliche, im betrachteten Gebiete absolut konvergierende Potenzreihen der angegebenen Argumente. Legt man in dieser Gleichung jeder der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ den Wert 0 bei und differentiiert logarithmisch nach x, so ergibt sich:

$$\frac{\frac{d F_0(x)}{dx}}{F_0(x)} = \frac{m}{x} + c_0 + c_1 x + \cdots$$

$$= \frac{\overline{m}}{x} + \frac{d}{dx}\left\{\mathfrak{G}(x, 0, \ldots, 0) + \frac{1}{x} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}, 0, \ldots, 0\right)\right\} \quad (\varrho_0 < |x| < \varrho),$$

woraus noch hervorgeht, daß $\overline{m} = m$ und $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}, 0, \ldots, 0\right) = 0$.[2])

[1]) Die gegenteilige Annahme würde — da in einem Gebiete, in welchem eine analytische Funktion mehrerer Veränderlichen regulär ist, jede Häufungsstelle von Nullstellen wiederum eine solche ist — unmittelbar einen Widerspruch ergeben. (Die Größe ϱ_1 kann auch in der nämlichen Weise bestimmt werden wie zu Anfang des Weierstraß-schen Beweises die dort ebenso bezeichnete Größe.)

[2]) Leitet man auf dem von Weierstraß angegebenen Wege eine Beziehung von der Form

Aus der Gleichung (1) folgt:

$$
(2)\qquad \begin{aligned}
&e^{-\mathfrak{G}(x, x_1, \ldots, x_n)} F(x, x_1, \ldots, x_n) = x^m \cdot e^{\frac{1}{x}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}, x_1, \ldots, x_n\right)} \\
&= x^m \left\{1 + \frac{1}{x}\overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{x}, x_1, \ldots, x_n\right)\right\}, \quad (\varrho_0 < |x| < \varrho, \; |x_i| < \varrho_1),
\end{aligned}
$$

da ja $e^{\frac{1}{x}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}, x_1, \ldots, x_n\right)}$ eine für $\left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{\varrho_0}$, $|x_i| < \varrho_1$ eindeutige und reguläre Funktion von $\frac{1}{x}, x_1, \ldots, x_n$ bezeichnet, welche sich für $\frac{1}{x} = 0$ auf 1 reduziert. Die Größe auf der linken Seite dieser Gleichung nun läßt sich als eine im vollen Gebiete $|x| < \varrho$, $|x_i| < \varrho_1$ eindeutige und reguläre Funktion daselbst durch eine absolut konvergente gewöhnliche Potenzreihe von $x, x_1, \ldots, x_n$ darstellen. Diese letztere aber muß — da eine Funktion in einem und demselben Gebiete nicht auf zwei verschiedene Weisen nach steigenden und fallenden Potenzen von x entwickelt werden kann — mit dem auf der rechten Seite stehenden Ausdrucke identisch sein. Hiernach können rechts (nachdem die Multiplikation mit x^m ausgeführt ist) Potenzen von x mit negativem Exponenten überhaupt nicht auftreten und man erhält nun die für das ganze Gebiet $|x| < \varrho$, $|x_i| < \varrho_1$ gültige Darstellung:

$$
(3)\qquad \begin{aligned}
&F(x, x_1, \ldots, x_n) \\
&= (x^m + f_1 x^{m-1} + f_2 x^{m-2} + \cdots + f_m)\, e^{\mathfrak{G}(x, x_1, \ldots, x_n)},
\end{aligned}
$$

wobei $f_1, f_2, \ldots, f_m$ gewöhnliche, für $|x_i| < \varrho_1$ absolut konvergente Potenzreihen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bedeuten.

Diese Potenzreihen verschwinden sämtlich für $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, wie man erkennt, indem man das Wert-

---

$$
\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{m}{x} + \frac{\partial}{\partial x} P(x, x_1, \ldots, x_n)
$$

und damit die Gleichung (1) des Textes her, so wird die Anwendung des Laurentschen Satzes gänzlich vermieden.

*

system $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ entweder in die Gleichung (3) selbst oder in die folgende Beziehung

$$x^m e^{\frac{1}{x}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}, x_1, \ldots, x_n\right)} = x^m + f_1 x^{m-1} + \cdots + f_m \tag{4}$$
$$(\varrho_0 < |x| < \varrho_1, \quad |x_i| < \varrho_1)$$

einträgt, deren linke Seite sich alsdann auf x^m reduziert.

Da endlich die linke und somit auch die rechte Seite der offenbar auch noch im größeren Gebiete $|x| > \varrho_0$, $|x_i| < \varrho_1$ gültigen Gleichung (4) daselbst beständig von Null verschieden ist, so ist damit auch der letzte Teil der Behauptung erwiesen.

§ 3.

Beweis des Laurentschen Satzes.

Im § 1 wird folgender Spezialfall des Laurentschen Satzes für Funktionen mehrerer Veränderlichen benutzt:

Eine für $\varrho_0 < |x| < \varrho$, $|x_i| < \varrho_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ eindeutige und reguläre Funktion $f(x, x_1, \ldots, x_n)$ der Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$ kann in diesem Gebiete durch eine absolut konvergierende, nach ganzzahligen positiven und negativen Potenzen von x sowie nach ganzzahligen positiven Potenzen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fortschreitende $(n+1)$-fache Reihe dargestellt werden.

Der Beweis hierfür (wie auch für den Laurentschen Satz in seiner allgemeinsten Gestalt) kann, ähnlich wie bei den Funktionen einer Veränderlichen, sowohl nach der Cauchyschen Methode der Randintegrale als auch nach der von Herrn Pringsheim angegebenen Methode der Mittelwerte geführt werden.[1]) Ein dritter Weg, welcher sich darbietet, wenn man den Laurentschen Satz für Funktionen einer Variablen als bekannt voraussetzt, soll hier noch kurz besprochen werden.[2])

[1]) Über die Anwendung dieser letzteren Methode siehe des Verf. I.-D. (München 1903), Kap. V.

[2]) Durch wiederholte Anwendung des im folgenden angegebenen

Genügt der Wert $x = \xi$ der Bedingung $\varrho_0 < |\xi| < \varrho$, so ist $f(\xi, x_1, \ldots, x_n)$ eine für $|x_i| < \varrho_i$ eindeutige und reguläre Funktion von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und kann daher durch eine in diesem Gebiete absolut konvergierende gewöhnliche Potenzreihe von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dargestellt werden[1]),

$$f(\xi, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n} f_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n}(\xi)\, x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n},$$

deren Koeffizienten $f_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n}(\xi)$ für jeden der angegebenen Werte von ξ eindeutig definiert sind. Die Funktion $f_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n}(x)$ ist aber zugleich für jeden solchen Wert $x = \xi$ regulär. Man kann nämlich, da die Funktion $f(x, x_1, \ldots, x_n)$ bei geeigneter Wahl der positiven Größe σ im Gebiete $|x - \xi| < \sigma$, $|x_i| < \varrho_i$ regulär ist, dieselbe dort durch eine absolut konvergente gewöhnliche Potenzreihe von $x - \xi, x_1, \ldots, x_n$ darstellen und erhält, wenn man diese letztere nach Potenzen von $x_1, \ldots, x_n$ ordnet:

$$f(x, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\mu_1, \ldots, \mu_n} \mathfrak{P}_{\mu_1, \ldots, \mu_n}(x - \xi)\, x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n},$$

wobei die $\mathfrak{P}_{\mu_1, \ldots, \mu_n}(x - \xi)$ gewöhnliche Potenzreihen von $x - \xi$ bedeuten, welche für $|x - \xi| < \sigma$ konvergieren. Der Vergleich beider Darstellungen ergibt:

$$f_{\mu_1, \ldots, \mu_n}(x) = \mathfrak{P}_{\mu_1, \ldots, \mu_n}(x - \xi) \qquad (|x - \xi| < \sigma).$$

$f_{\mu_1, \ldots, \mu_n}(x)$ ist demnach in der Tat für jedes $x = \xi$ regulär und kann also für $\varrho_0 < |x| < \varrho$ durch eine Laurentsche Reihe dargestellt werden:

$$f_{\mu_1, \ldots, \mu_n}(x) = \sum_{\mu = -\infty}^{+\infty} A^{(\mu)}_{\mu_1, \ldots, \mu_n} x^{\mu}.$$

So ergibt sich:

Verfahrens läßt sich auch der Laurentsche Satz in seiner allgemeinsten Gestalt beweisen.

[1]) Soll dies ebenfalls erst bewiesen werden, so kann man sich dazu eines Schlußverfahrens bedienen, welches dem in diesem Paragraphen auseinandergesetzten völlig analog ist.

$$f(x, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\mu_1, \ldots, \mu_n} f_{\mu_1, \ldots, \mu_n}(x)\, x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n}$$

$$= \sum_{\mu_1, \ldots, \mu_n} \left\{ \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} A^{(\mu)}_{\mu_1, \ldots, \mu_n} x^{\mu} \right\} x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n}$$

$$(\varrho_0 < |x| < \varrho, \quad |x_i| < \varrho_i).$$

Es ist nun lediglich noch zu zeigen, daß der rechts stehende Ausdruck, auch als $(n+1)$-fache Reihe aufgefaßt, absolut konvergiert (woraus dann zugleich folgt, daß die Summation desselben in beliebiger Weise bewerkstelligt werden kann).

Bezeichnet man mit $a, a_1, \ldots, a_n$ positive Zahlen, welche den Bedingungen

$$\varrho_0 < a < \varrho, \quad 0 < a_i < \varrho_i$$

genügen, so verbleibt $|f(x, x_1, \ldots, x_n)|$ für $|x| = a$, $|x_i| = a_i$ unterhalb einer endlichen Schranke M. Die wiederholte Anwendung der Cauchyschen Koeffizientenungleichung ergibt daher

$$|f_{\mu_1, \ldots, \mu_n}(x)| \leqq \frac{M}{a_1^{\mu_1} \ldots a_n^{\mu_n}} \qquad (|x| = a)$$

und weiter:

$$|A^{(\mu)}_{\mu_1, \ldots, \mu_n}| \leqq \frac{M}{a^{\mu}\, a_1^{\mu_1} \ldots a_n^{\mu_n}} \qquad \begin{pmatrix} \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ \mu_1, \ldots, \mu_n = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Hieraus geht aber unmittelbar sowohl die absolute Konvergenz der $(n+1)$-fachen Reihe

$$\sum_{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_n} A^{(\mu)}_{\mu_1, \ldots, \mu_n} x^{\mu} x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n} \qquad (\mu, \mu_1, \ldots, \mu_n = 0, 1, 2, \ldots)$$

für $|x| < a$, $|x_i| < a_i$ (und daher auch für $|x| < \varrho$, $|x_i| < \varrho_i$), als auch die der $(n+1)$-fachen Reihe

$$\sum_{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_n} A^{(\mu)}_{\mu_1, \ldots, \mu_n} x^{\mu} x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n} \qquad \begin{pmatrix} \mu = -1, -2, \ldots \\ \mu_1, \ldots, \mu_n = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

für $|x| > a$, $|x_i| < a_i$ (und daher auch für $|x| > \varrho_0$, $|x_i| < \varrho_i$) hervor.

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 4. Abhandlung

Über die Anwendung der Naturgesetze auf das Universum

von

H. Seeliger.

Vorgetragen am 1. Mai 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



1.

Die Frage, ob die Naturgesetze auch in dem unendlich ausgedehnten Universum Geltung behalten, wird von manchen und zwar auch besonnenen Forschern als gegenstandslos abgelehnt. Es dürfte aber hierbei doch wohl nur eine Verschiedenheit in der Interpretation des Wortes „unendlich" zutage treten. „Das Unendlich existiert für unser Erkennen nie als eine vollziehbare Vorstellung, sondern nur als eine Forderung, nach der die Verknüpfung gegebener Tatsachen fortgesetzt werden soll." Nach diesem treffenden Ausspruch Wundts[1]) muß man zwischen dem etwa als vollendet zu bezeichnenden Unendlich und dem unvollendeten unterscheiden. Insoweit wir das Universum als zu der ersten Klasse gehörend auffassen, können wir ihm allerdings weder Eigenschaften zunoch Gesetze vorschreiben. Denken wir uns aber die räumliche Ausdehnung der uns umgebenden Materie immer größer und größer, so kommen wir zur Auffassung des Universums als Unendlichkeit der zweiten Art. Dieselbe ist nun unserem Erkennen keineswegs in gleicher Weise entrückt, gerade so wenig, wie etwa eine unendliche konvergente Reihe und ähnliche gedankliche Gebilde. Nur in diesem Sinne soll das Unendliche, welcher Art sonst immer, im folgenden aufgefaßt werden.

Das Universum ist dann also ein Grenzbegriff, dem wir uns immer mehr nähern, je größer wir den Umkreis werden lassen, dessen materiellen Inhalt wir naturwissenschaftlich in Betracht ziehen. Es liegt im Begriffe der Grenze, daß dieselbe, strenge genommen, nicht erreichbar ist. Aber es ist nicht einzusehen, warum die Frage unberechtigt sein sollte,

---

[1]) Allgemeine Logik und Erkenntnistheorie, 3. Aufl., Bd. I, S. 404.

ob bei der sukzessiven Annäherung an die Grenze gewisse Naturgesetze einen bestimmten Sinn behalten. Jedenfalls muß diese Frage zuerst beantwortet werden, ehe man den Geltungsbereich eines Naturgesetzes unbegrenzt erweitert und schließlich mit dem Universum identifiziert. Es kann daher sehr wohl vorkommen, daß sehr wichtige Erkenntnisse eine solche Erweiterung nicht vertragen, weil die Voraussetzungen, auf denen sie beruhen, für das unbegrenzt große Universum ihren Sinn verlieren und also nicht erfüllt werden können.

Man hört wohl oft sagen, daß alle Naturgesetze, weil aus der in engem Rahmen gemachten Erfahrung stammend, nur eine näherungsweise Richtigkeit beanspruchen können, wodurch ihre unbegrenzte Anwendbarkeit an sich ausgeschlossen erscheint. Mit der Konstatierung dieser überaus trivialen Wahrheit wäre aber wenig geholfen. Denn es handelt sich hier um etwas anderes, nämlich um sehr weit getriebene Abstraktionen, die unter bestimmten Bedingungen die Möglichkeit einer unbegrenzten Gültigkeit enthalten können, wenn ihre Fassung in genügend scharfer Weise erfolgt ist. Die Aufsuchung dieser Bedingungen ist nicht nur eine durchaus berechtigte sondern auch eine sehr nötige Aufgabe.

Es ist nicht beabsichtigt, diese allgemeine und weitschichtige Aufgabe hier in Angriff zu nehmen, vielmehr sollen nur spezielle Fälle, die allerdings für die Astronomie von erheblicher Wichtigkeit sind, in Betracht gezogen werden. Wenn die Elastizitätstheorie über den Zusammenhang der wirkenden Kräfte und den entstehenden Verschiebungen gewisse einfache Relationen aufstellt, so weiß man von vornherein, daß solche spezielle Annahmen nur als Näherungen anzusehen sind; man wird dann den Anwendungsbereich der Resultate begrenzen und gar nicht versuchen, diesen Bereich beliebig zu vergrößern. Die Newtonsche Formel für die Anziehungskräfte dagegen wird gewöhnlich als ein Resultat so weit getriebener Abstraktion betrachtet, daß man sie für beliebig große Entfernungen noch für ganz genau hält und niemals untersucht, bei welchen Entfernungen sie etwa aufhört, anwendbar zu sein. Ob aber das

Newtonsche Gesetz wirklich ein solches Gesetz von universeller Gültigkeit ist oder sein kann, ist jedenfalls dringend der Überlegung wert. Die beiden Hauptsätze der mechanischen Wärmetheorie scheinen keine Einschränkungen in Bezug auf Raum und Zeit zu erfordern. Eine nähere Überlegung zeigt aber, daß diese so überaus wichtigen Sätze, die fast die ganze Naturlehre beherrschen, die Möglichkeit der unbegrenzten Erweiterung ihres Gültigkeitsbereichs nicht darbieten, da hierbei die Bestimmtheit ihrer Aussage verloren geht.

Nicht einzusehen ist, warum Untersuchungen in der genannten Richtung nicht erfolgreich geführt werden könnten. Es ist natürlich ein sehr einfaches und bequemes Mittel, sich unbequeme Fragen fernzuhalten, indem man jede Ausdehnungsmöglichkeit der Naturgesetze auf das Universum leugnet. Es ist aber auch ein ganz unzulässiges Mittel schon deshalb, weil man astronomische Anwendungen physikalischer Sätze nicht wird hindern können und wollen. Sofort erhebt sich dann aber die Frage: wie groß dürfen die Räume und Zeiten sein, für welche die Gültigkeit beansprucht wird? Sind es Neptuns- oder Siriusweiten oder millionenmal größere Entfernungen? Wollte man an einer Stelle einhalten, so käme das dem Vorhaben gleich, in einer unendlichen konvergenten Reihe die Berücksichtigung der ersten tausend Glieder zu gestatten, den weiteren Fortschritt aber für aussichtslos und unzulässig zu betrachten. Allgemeine Gesetze, und sie brauchen nicht einmal durch einfache mathematische Formeln darstellbar zu sein, dürfen sich aber nicht anders verhalten, wie andere, z. B. rein mathematische Schöpfungen unseres Geistes, sonst sind sie eben keine Universalgesetze in dem hier festgehaltenen Sinne.

Im Grunde kommt es bei solchen Betrachtungen auf die Diskussion der Möglichkeit von Grenzwerten an und man kann versuchen, die Sachlage etwas mehr zu präzisieren.

Die Mehrzahl der physikalischen Gesetze hat gar keinen Bezug auf eine etwaige unbegrenzte Ausdehnung in Raum und Zeit. Fast alles, was die Molekularphysik und Chemie aussagt, bezieht sich auf die Einwirkungen, die in der nächsten Nähe

oder in den betrachteten Körperteilen selbst vor sich gehen; die Gesetze der Beugung und Polarisation des Lichts und viele andere drücken Tatsachen aus, für die es zum Teil gleichgültig, zum Teil ganz unwesentlich ist, ob der Raum, in dem wir forschen, durch die Wände unseres Zimmers begrenzt ist oder bis zu dem nächsten Fixstern reicht. Von solchen Gesetzen ist natürlich nicht die Rede, wenn gesagt wird, ein Naturgesetz hat die Eigenschaft A der Materie in einem beliebigen Punkt eines etwa durch eine geschlossene Fläche S begrenzten Raumes R festzustellen, obwohl in letzter Instanz die allgemeine Forderung überall ähnlich lauten müßte.

Die Eigenschaft A hängt nun, strenge genommen, von allen im Universum vorhandenen Körpern ab und deshalb wird man annehmen müssen, daß eine Vergrößerung von R eine Veränderung von A nach sich ziehen wird. Der gewöhnliche Gang der Untersuchung ist nun der, daß man bei vorausgesetztem S das zugehörige A feststellt, dann sich überzeugt oder ebenfalls voraussetzt, daß eine Vergrößerung von R keine merkbare Veränderung von A nach sich zieht. Das genügt aber offenbar nicht, wenn es sich darum handelt, die Eigenschaft A durch eine Aussage festzustellen, die als Naturgesetz gelten soll. Dieses muß ausdrücken, daß eine unbegrenzte Erweiterung von R die Eigenschaft A einem Grenzwert zuführt, denn sonst gibt es ja keine allgemeine Eigenschaft A, sondern nur eine solche in dem Raume R von gegebener Ausdehnung. Im Sinne des Grenzwertes liegt es zugleich, daß die Körper in überaus großen Entfernungen keinen nennenswerten Einfluß auf A haben können und daß dieser Einfluß für unendlich große Entfernung gegen die Null konvergieren muß. Zudem würde das Gegenteil zu dem unauflöslichen Widerspruch führen, daß wir ein A erforschen wollten, das wesentlich von unendlich entfernten Körpern abhängt, deren physikalische Eigenschaften, deren Existenz selbst niemals unserer Kenntnis näher gerückt werden kann.

Im folgenden werden nun von diesem Gesichtspunkte aus einige speziellere Fragen, wie schon gesagt, in Überlegung

gezogen werden. Es soll zuerst das Newtonsche Gesetz auf seine Eigenschaft als universell gültiges Gesetz untersucht werden. Dann werde ich die von Olbers gestellte Frage, ob die Zahl der leuchtenden Sterne unbegrenzt groß angenommen werden muß, besprechen. Beiden Gegenständen habe ich vor Jahren bereits Erörterungen gewidmet. Schließlich soll die Gültigkeit der Clausiusschen Sätze über die „Energie und die Entropie der Welt“ Gegenstand der Überlegung sein.

2.

Über die allgemeine Gültigkeit des Newtonschen Gravitationsgesetzes habe ich vor Jahren[1]) in zwei Arbeiten Betrachtungen angestellt. Ihren Inhalt hier nochmals wiederzugeben, wäre wohl unnötig, es sollen aber die erhaltenen Resultate kurz zusammengefaßt bzw. in dem hier festgehaltenen Zusammenhang ergänzt werden.

Die in Betracht zu ziehenden kosmischen Massen sollen innerhalb eines Raumes liegen, der den Standpunkt des Sonnensystems schalenförmig umgibt. Die innere Begrenzungsfläche werde durch die Entfernung R_0, die äußere durch R gekennzeichnet, wobei R_0 und R beliebige Funktionen der Polarkoordinaten sein können. In Bezug auf alle innerhalb R_0 gelegenen Punkte kann man auf unendlich viele Weise das Potential der kosmischen Massen ersetzen durch das Potential einer räumlichen Massenbelegung des ganzen Raumes zwischen R_0 und R von der Dichtigkeit δ, was manche Vorteile bietet. Man erreicht das sofort, wenn man sich etwa die kleinsten Teile der Materie kugelförmig denkt und diese Kugeln durch Vergrößerung des Radius auseinanderzieht, so daß aber die Begrenzung R_0 nicht überschritten wird. Die Massenverteilung in diesen Kugeln

---

[1]) Über das Newtonsche Gesetz. Astron. Nachr., Bd. 137 (1894), und unter demselben Titel: Sitzungsberichte der Münchener Akademie, November 1896. Diese Darlegungen hat, wie mir während des Druckes dieser Abhandlung bekannt geworden ist, neuerdings Professor S. Arrhenius (Rivista di Scienza Vol. V, S. 217—229) besprochen. Ich begnüge mich mit der Konstatierung der Tatsache, daß Herr Arrhenius meine Darlegungen total mißverstanden hat.

braucht nicht homogen zu sein, sondern kann aus konzentrischen Schichten gleicher Dichtigkeit bestehen. Wählt man nun diese Dichtigkeitsverteilung so, daß die Dichtigkeit eine stetige Funktion des Abstandes vom Zentrum der betreffenden Kugel ist und am Rande der ausgezogenen Kugel den Wert Null hat, wobei es freisteht, auch eine endliche Zahl ihrer Differentialquotienten gleich Null zu wählen, so wird also so die Masse jeder kleinen Kugel ersetzt durch eine Massenverteilung mit der Dichtigkeit δ, und dieses δ ist eine im ganzen Raum stetige Funktion des Orts. Die Übereinanderlagerung der von allen kleinen Kugeln erzeugten Massenverteilung wird nun ebenfalls eine Dichtigkeit haben, die im ganzen Raum stetige Funktion des Orts ist, und zwar überall positive Werte hat. Auch der Wert $\delta = 0$ läßt sich im allgemeinen bis auf kleine, nicht in Betracht kommende Raumteile vermeiden. Diese einfache Darstellung des Sachverhalts, die keine funktionentheoretische Überlegungen erfordert, genügt für die vorliegenden Zwecke vollkommen.

Schreitet man nun von einem innerhalb R_0 gelegenen Punkt in einer bestimmten Richtung vorwärts, so hängen die Werte des Potentials, seiner nach einer bestimmten Richtung genommenen ersten und zweiten Differentialquotienten (also Anziehungskomponente und der von mir eingeführten „Zerrung“) ab von den drei Integralen

$$\int_{R_0}^{R} \delta\, r\, d\, r, \int_{R_0}^{R} \delta\, d\, r, \int_{R_0}^{R} \frac{\delta}{r}\, d\, r$$

Soll das Newtonsche Gesetz ein Naturgesetz von unbegrenzter Gültigkeit sein, so müssen demnach zum mindesten die beiden letzten Integrale für beliebig große Werte $R = \infty$ bestimmte Grenzwerte haben, was wiederum erfordert, daß

$$\delta \cdot r \text{ und } \delta$$

für unaufhörlich wachsende r dem Grenzwert Null zustreben müssen. Man kann auch sagen, jedenfalls dürfen nicht unendlich große Räume des Weltalls mit Masse von (durchschnitt-

lich) endlicher Dichtigkeit erfüllt sein. Ich will diese Forderungen der Kürze wegen mit (I) bezeichnen. So ergibt sich der Satz, den ich a. a. O. ausgesprochen habe:

Wenn das Newtonsche Gesetz absolut genau sein soll, dann dürfen nicht unendlich große Räume des Weltalls mit Masse von durchschnittlich endlicher Dichtigkeit erfüllt sein.

Die Umkehrung des Satzes hatte ich so ausgesprochen:

„Ist die Gesamtmasse des Weltalls (bei durchschnittlich endlicher Dichtigkeit) unendlich groß, dann kann das Newtonsche Gesetz nicht als mathematisch genauer Ausdruck der herrschenden Anziehungskräfte gelten.“ Hierbei wurden die eingeklammerten Worte nicht ganz korrekter Weise fortgelassen, weil dies in dem ganzen Zusammenhang der Überlegungen unnötig erschien. Es sind aber dadurch in der Tat Mißverständnisse ermöglicht, obwohl es ja selbstverständlich ist, daß aus I nicht die Endlichkeit der Masse, die vom Integral $\int_{R_0}^{R} \delta\, r^2\, dr$ abhängt, folgt. Es ist natürlich leicht, aus der unendlichen Zahl von Massenverteilungen, die eine unendliche Gesamtmasse ergeben und doch die Bedingungen I erfüllen, bestimmte Anordnungen herauszugreifen. Es wird aber wohl schwerlich durch solche Beispiele etwas an der Sachlage geändert. Ordnet man z. B. etwa gleich große Massen äquidistant auf Geraden an, die in endlicher Zahl einen Kegel von sehr kleiner Öffnung, dessen Spitze im angezogenen Punkt liegt, erfüllen, so wird für sehr große r δ proportional mit $\frac{1}{r^2}$, wodurch I erfüllt und die Gesamtmasse unendlich wird. Jedenfalls erfordert die Bedingung I, daß in beliebig großen Räumen die d u r c h s c h n i t t l i c h e D i c h t i g k e i t δ u n e n d l i c h k l e i n w i r d. In meinem ersten Aufsatz habe ich meine Meinung (S. 133) dahin ausgesprochen, „daß ein absolut leerer oder mit unendlich dünner Materie erfüllter (beliebig großer) Raum überhaupt nicht vorstellbar ist“. Hier wie in meinem zweiten Aufsatz habe ich indessen ausdrücklich hervorgehoben, daß in solchen der Metaphysik angehörigen Fragen die Meinungen sehr auseinandergehen. In der Tat findet

man bei ähnlichen Erörterungen die verschiedensten Ansichten mit mehr oder weniger Entschiedenheit vertreten. Dem einen erscheint etwas selbstverständlich, was von einem anderen als unfaßbar erklärt wird. Man braucht z. B. nur den 2. Band von Wundts Logik aufzuschlagen, um diese Tatsache auf das deutlichste bestätigt zu finden. Alle möglichen Kombinationen von Unendlichkeit und Endlichkeit der Dichtigkeit und Masse der vorhandenen Materie, ihrer räumlichen Ausdehnung und selbst der Zeit erscheinen mehr oder weniger diskutabel. Und wenn vereinzelte Mathematiker allen Ernstes behaupten, daß eine fortgesetzte Übung der Vorstellungskraft zu der Vorstellbarkeit vierdimensionaler Raumgebilde führt, so wird unserer Gläubigkeit allerdings etwas viel zugemutet, aber man gewinnt doch die Gewißheit, daß das Subjektive in so entlegenen Teilen der Wissenschaft eine überaus große Rolle spielt. Angesichts solcher Vorkommnisse dürfte eine Diskussion in allen ähnlichen Fragen gänzlich unfruchtbar bleiben. Ich habe dies schon in meinen beiden erwähnten Aufsätzen hervorgehoben, so im ersten (S. 130): „Man mag die vorliegende Frage betrachten wie man will, immer wird es mißlich sein, von ihrer Beantwortung eine Beurteilung der Grundlagen der Mechanik des Himmels abhängig zu machen und vom naturwissenschaftlichen Standpunkt wird ohne Zweifel jene Ansicht als zweckmäßiger, also auch als richtiger zu betrachten sein, welche ganz unabhängig von metaphysischen Spekulationen ist.“ Seitdem ist es mir immer deutlicher geworden, daß diese Auffassung noch mehr in den Vordergrund zu rücken und den Ausschlag zu geben hat, wodurch eine vollkommene Klärung leicht und wohl auch ohne ernstlichen Widerspruch von irgend einer Seite zu erhalten sein dürfte.

Im wesentlichen handelt es sich hier um folgendes: Die Deklarierung des Newtonschen Gesetzes als absolut genaues Naturgesetz muß die Erfüllung der Bedingungen (I) voraussetzen, was einen Schluß von in engem Rahmen gewonnenen Erfahrungssätzen auf Eigenschaften der Materie in unendlich fernen Regionen des Universums bedeutete. Es müßte also die Beschaffenheit der Materie in unserer Nähe w e s e n t l i c h be-

stimmt sein durch die Anordnung der Materie in unendlicher Ferne. Das Widersinnige solcher Konsequenzen, die schließlich auf Voraussetzungen beruhen, welche unserer Erkenntnis für immer und vollständig entrückt sind, braucht wohl kaum weiter besprochen zu werden. Das einzige zulässige Verfahren besteht offenbar darin, daß man das Newtonsche Gesetz, welches doch ein Produkt des Menschengeistes ist, so zu korrigieren hat, daß es allen Beobachtungsresultaten genügt und auch für beliebig große Entfernungen nicht zu Widersprüchen führt, und zwar unter allen Umständen, also nicht bloß für bestimmte herausgesuchte Massenanordnungen, wenn diese auch in unbeschränkter Anzahl zur Disposition stehen. Selbst wenn das Newtonsche Gesetz aus Überlegungen hervorgegangen wäre, die den höchsten Grad der Evidenz für uns besäßen, würde es offenbar angemessener sein, an seiner allgemeinen und exakten Gültigkeit zu zweifeln, statt einer, allerdings im engeren Umkreis, glänzend bewährten Formel zuliebe Voraussetzungen zu machen, die sich auf jeder Erfahrung unzugänglicher Annahmen beziehen. Das letztere Verfahren dürfte wohl kaum als ein wissenschaftlich gerechtfertigtes anzusehen sein. Nun hat aber das Newtonsche Gesetz keineswegs das Aussehen solcher unmittelbaren Evidenz. Wir wissen von ihm nur, daß es innerhalb des Planetensystems sich auf das glänzendste bewährt hat und daß es für Entfernungen vom selben Range, wie die im Planetensystem, mindestens recht angenähert gilt auch in anderen Regionen des Universums. Wir schließen das aus den Bewegungen der Doppelsterne, aber mit einer sehr wenig aussagenden Genauigkeit und mit der Einschränkung, daß über die Größe und die Konstanz des Gaußschen k^2 in allen Gegenden des Fixsternhimmels nichts Zuverlässiges bekannt ist. Wie sich aber die Anziehungskräfte über Strecken hin, die den Entfernungen der Fixsterne voneinander entsprechen, gestalten, darüber fehlt bisher jede Andeutung. Das ist der gegenwärtige Stand der astronomischen Forschung und wenn man der Newtonschen Formel eine größere Bedeutung zuerkennt, überschätzt man die Sicherheit der bisher erreichten astronomischen Kenntnisse.

Man hat vielfach versucht, auf Grund mechanischer Vorstellungen das Zustandekommen der Gravitationswirkung zu erklären. Alle diese Versuche haben bisher zu greifbaren Resultaten nicht geführt, vielmehr nur neue Schwierigkeiten aufgedeckt. Die Newtonsche Formel ergab sich zudem immer nur mit einer gewissen Annäherung. Es ist hier nicht der Ort, auf Einzelheiten einzugehen. Ich möchte hier nur an die sogenannten Ätherstoßtheorien[1]) erinnern. Diese Theorien haben bisher mehr Ablehnung als Zustimmung gefunden, was mit der historischen Entwicklung der physikalischen Theorien zusammenhängen mag, welche lange Zeit solchen molekularen Auffassungen unfreundlich gegenüberstanden. Unserer Zeit liegen ähnliche Vorstellungen wieder viel näher, womit freilich nicht gesagt werden soll, daß nicht bald wieder ein Umschlag in ihrer Bewertung erfolgen wird. Die Entwicklung dieser Theorien, die offenbar noch nicht genügend ausgearbeitet sind, hat aber mit großen äußeren und inneren Schwierigkeiten zu kämpfen und führt nur genähert und unter gewissen Umständen genau genug auf die Newtonsche Formel. Das Dazwischentreten eines dritten Körpers muß die gegenseitige Anziehung der beiden anderen beeinflussen und erzeugt Abweichungen von der Newtonschen Formel, die man vielleicht als „Absorption“ der Gravitation bezeichnen kann. Solche Abweichungen, die an sich recht plausibel erscheinen, haben vielleicht noch am ehesten Aussicht, entdeckt zu werden. Sie würden eventuell in der Mondbewegung und wahrscheinlich nur hier bemerkbar sein können. Da es sich voraussichtlich nur um sehr kleine Abweichungen handeln kann, ist deren Feststellung bzw. der Nachweis ihres Fehlens mit einigen Schwierigkeiten verknüpft und dahingehende Versuche blieben bisher erfolglos.

3.

In formaler Beziehung hängt das viel besprochene sogenannte Cheseaux-Olberssche Problem mit den vorstehenden

[1]) Vgl. u. a. P. Drude, Über Fernwirkungen. Beilage zu den Annalen der Physik und Chemie. Neue Folge, Bd. 62, 1897.

Überlegungen zusammen und ich habe demselben deshalb auch in meiner zweiten oben zitierten Abhandlung eine ausführliche Betrachtung gewidmet. Die ganze Sachlage ist aber meiner Meinung nach sehr viel einfacher und durchsichtiger. An der Richtigkeit des Olbersschen Ausspruches, daß bei Annahme unendlich vieler leuchtender Fixsterne der ganze Himmel in hellem Glanze — man wird sich an den von Olbers gebrauchten Ausdruck „ebenso hell wie die Sonne“ nicht stoßen — erscheinen müßte, ist nicht zu zweifeln. Auch die Erklärung der Tatsache, daß der Himmelsgrund nur schwach erleuchtet erscheint durch die Absorption des Sternlichts „beim Durchdringen des Raumes“, ist, im rechten Sinne genommen, durchaus zulässig. Aber sie ist nicht notwendig und kann auf viel näher liegende Ursachen zurückgeführt werden. Eine etwas eingehendere, im übrigen sehr einfache Überlegung zeigt, daß das Olberssche Phänomen nach keiner Richtung Widersprüche, gedankliche Schwierigkeiten oder dergleichen aufweist. Ich habe a. a. O. darauf hingewiesen, wie mit Hinzuziehung immer weiter entfernter Fixsterne man sich einem Grenzzustand nähert, wo der ganze Himmel schließlich in einer Helligkeit erscheinen muß, die gleich ist einer gewissen mittleren Flächenhelligkeit der einzelnen kosmischen Objekte. Man hat demnach einfach die Tatsache hinzunehmen, daß diese mittlere Flächenhelligkeit eine sehr geringe ist. Immer mehr drängt sich die Tatsache in den Vordergrund, daß im Universum die weniger leuchtenden Massen in ihrer Ausdehnung die hell leuchtenden sternähnlichen überwiegen. Wenn man in dem Olbersschen Phänomen Schwierigkeiten, wie sie etwa bei den Betrachtungen über das Newtonsche Gesetz auftreten, zu finden glaubte, so kann dies wohl kaum anders als durch eine Verwechslung leuchtender sternähnlicher Massen mit Massen überhaupt entstanden sein. Diese Verwechslung geschieht tatsächlich sehr oft und es scheint schwierig zu sein, den in ihr hervortretenden Irrtum zu zerstreuen, wenigstens sind meine Auseinandersetzungen genügend ignoriert worden. Es bedarf keiner näheren Auseinandersetzung und folgt aus allen physikalischen Erkenntnissen

fast in selbstverständlicher Weise, daß das Leuchten der kosmischen Massen ein ephemerer Zustand ist, mag er auch, in den gewöhnlichen Zeitskalen gemessen, sehr lange dauern. Daraus ergibt sich weiter, daß die mittlere Helligkeit der in genügend groß gewählten Raumteilen befindlichen Massen innerhalb eng begrenzter Zeiten eine sehr geringe sein muß, da der Entwicklungszustand der Weltkörper, gleichgültig, welche Vorstellung man sich im einzelnen darüber machen mag, eine Funktion des Orts und der Zeit ist dergestalt, daß die Umstände in Ansehung beider Variablen einem Leuchten überwiegend nicht günstig sind. Ich habe übrigens a. a. O. bereits darauf hingewiesen, daß die Tatsache der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts wohl quantitativ von Einfluß sein kann, im wesentlichen aber das Olberssche Phänomen gar nicht berührt.

Dieser Hinweis hat aber keineswegs verhindert, daß immer wieder in ganz irrtümlicher Weise dieser Gesichtspunkt in die Diskussion gezogen wird. Nimmt man, was hierbei zu geschehen scheint, ein fortdauerndes oder durch unermeßlich große Zeiträume bestehendes Leuchten unendlich vieler Himmelskörper an, so kann die Lichtzeit keine Rolle spielen, da man die Zeit der Vergangenheit ebensowenig beschränken darf wie die der Zukunft, und wenn man dies doch tun wollte, würde die Helligkeit des Himmelsgrundes, sich einem Grenzwerte nähernd, fortwährend ansteigen. Sieht man aber von dieser in der Tat ganz unphysikalischen Annahme ab, so hängt der Einfluß der endlichen Lichtgeschwindigkeit mit der Beschaffenheit der oben erwähnten Funktion von Ort und Zeit in untrennbarer Weise zusammen. Es ist also nicht ersichtlich, wie auf diesem Wege eine Veränderung der Sachlage erzielt werden könnte.

Die Stellung zur vorliegenden Frage wird nicht von der Vorstellung abhängen, die man sich im einzelnen von der Art der Absorption machen mag, die also durch die Vorlagerung dunkler oder wenig leuchtender Körper hervorgerufen wird. Mir schienen die beobachteten Erscheinungen am besten mit

der Ansicht sich vereinigen zu lassen, daß unser Fixsternsystem, zu dem in der Hauptsache alles gehört, was wir am Himmel sehen, durch weite Räume von anderen leuchtenden Weltkörpern getrennt ist und diese Trennung infolge der durch Vorlagerung dunkler Massen unser System zu einem optisch abgeschlossenen macht. Innerhalb des Fixsternsystems brauchen solche Absorptionen aber keineswegs zu fehlen. Viele Stellen, namentlich in der Milchstraße, deuten fast mit Sicherheit auf solche Vorlagerungen von Massen hin. Spielen doch meiner Ansicht nach ausgedehnte kosmische Staubwolken in der Stellarastronomie eine weit größere Rolle, als früher gemutmaßt worden ist. Vielfach ist man gerade in der allerletzten Zeit durch die Betrachtung photographischer Aufnahmen auf diese und ähnliche Ansichten geführt worden, womit freilich nichts Neues ausgesprochen wurde, da ich seit vielen Jahren in meinen Arbeiten einen gleichen Standpunkt einnehme.

Für die Beurteilung des Olbersschen Phänomens kommt indessen all dies weniger in Betracht: die auftretenden Schwierigkeiten sind nur scheinbare und zum großen Teil, wie auseinandergesetzt worden ist, durch offenbare Mißverständnisse entstanden. Wie solche ziemlich unmotiviert auftreten können, dafür gibt eine Stelle in dem sonst so gedankenreichen Buche von Stallo[1]) Zeugnis, dessen Lektüre trotz aller Meinungsverschiedenheit im einzelnen hohen und belehrenden Genuß gewährt. Ich kann mir nicht versagen, diese Stelle wörtlich anzuführen:

„Im Jahre 1826 bemerkte Olbers, daß, wenn die Zahl der im Weltraum Wärme und Licht ausstrahlenden Körper unendlich ist, jeder Punkt des Raumes eine unendliche Zahl von Licht- und Wärmestrahlen empfangen und somit unendlich heiß und glänzend sein müßte — wobei er allerdings hinzufügte, daß diese Folge durch die Annahme einer Absorption des größten Teils dieser Strahlen durch die dunklen und kalten

---

[1]) Die Begriffe und Theorien der modernen Physik von J. B. Stallo. Übersetzt von Kleinpeter. Leipzig 1901.

Körper im Raume vermieden werden könnte. Doch diese Rettung erschien mit einemmale fraglich durch die Überlegung, daß die zwischen den leuchtenden Sternen verstreuten dunklen und kalten Körper rasch die Glühhitze erreichen müßten und das Absorptionsvermögen bald erschöpft sein müßte.“ Kann man die Meinung von Olbers unzutreffender und das Phänomen unrichtiger darstellen? Und kann man bei der Zurückweisung der keineswegs von Olbers herangezogenen Absorption durch dunkle Körper unphysikalischer verfahren?

4.

Clausius hat die beiden Hauptsätze der mechanischen Wärmetheorie auf das Universum angewandt und ist so zu der Formulierung gelangt:[1]) 1. Die Energie der Welt ist konstant. 2. Die Entropie der Welt strebt einem Maximum zu. Bei späteren Zusammenfassungen hat Clausius, soweit ich sehe, niemals mehr die Sätze in dieser Fassung ausgesprochen, woraus vielleicht geschlossen werden kann, daß er selbst sie als zu weitgehend erkannte. In der Tat ist kein Zweifel darüber möglich, daß so allgemeine Sätze über die „Welt“ einen greifbaren Sinn nicht ohne weiteres besitzen, wo die Welt als eine nicht näher charakterisierte vollendete Unendlichkeit erscheint, die überhaupt keine Eigenschaften haben kann. Indessen ist mit einer solchen einfachen Zurückweisung, die schon oft genug geübt worden ist, eine so wichtige Sache nicht abgetan. Man muß zuerst feststellen, ob die beiden Wärmesätze überhaupt allgemein gültige Gesetze darstellen, die eine Anwendung auf das unbegrenzt große Universum vertragen und dann gegebenenfalls die Clausiusschen Sätze anders zu fassen suchen.

Der Energiesatz ist selbstverständlich an sich nichts anderes als ein rein empirischer Satz. Aber zu seiner Stütze

---

[1]) Über verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie. Poggendorfs Annalen CXXV, 1865. Abgedruckt in den Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie als Abhandlung IX, 1867.

liegt ein so überwältigendes Material an Erfahrungstatsachen bereit, daß kein Bedenken dagegen zu erheben ist, wenn er als Prinzip an die Spitze aller physikalischen Erklärungsversuche gestellt wird. Aber man wird, wie gesagt, sich hüten müssen, ihm eine über alle Empirie hinausreichende Bedeutung zuzumessen, denn die Überschätzung eines jeden Prinzips liegt nahe und wird oft genug ausgeführt. Von der von H. Poincaré[1]) hervorgehobenen Dehnbarkeit, die das Prinzip in seiner Anwendung und Interpretation besitzt, soll hier ganz abgesehen werden. Denn wenn auch alle Energiearten unzweifelhaft festständen und in jedem Falle ihre vollständige und eindeutige Feststellung erfolgen könnte, würden die logischen Schwierigkeiten, die sich einer unbegrenzten Ausdehnung seines Gültigkeitsbereichs entgegenstellen, dieselben bleiben. Wie groß auch die Ausdehnung der in Betracht gezogenen Körperkomplexe sein mag, immer bleiben noch ausgedehntere übrig, die mit jenen in Wechselwirkung stehen und Energiewerte von einer für immer unbekannt bleibenden Größe austauschen. Deshalb existiert ein völlig abgeschlossenes System, für welches die Konstanz des Energieeinhaltes festgesetzt werden könnte, nicht. Wenn wir uns aber, dem Begriff einer unvollendbaren Unendlichkeit entsprechend, das Universum als Grenzbegriff auffassen, dem wir uns durch fortgesetzte Vergrößerung des Raumes um uns beliebig nähern könnten, so könnte man annehmen, daß man so auch einem Grenzbegriff, der dem völlig nach außen abgeschlossenen System gleichkäme, asymptotisch immer näher käme. Nur, wenn dies möglich wäre, würde der Energiesatz einen bestimmten Sinn behalten und seine Anwendung auf das unbegrenzt große Universum wäre als zulässig erwiesen. Tatsächlich wurde allen Ernstes diese Möglichkeit behauptet und sie sollte daraus hervorgehen, daß sich bei zunehmender Vergrößerung eines Raumes das Verhältnis des Flächeninhalts einer geschlossenen Fläche zu dem Inhalt des eingeschlossenen

---

[1]) Wissenschaft und Hypothese. Übersetzt von Lindemann. Leipzig 1906.

Raumes immer mehr verkleinert und schließlich zur Null konvergiert. Das setzt aber voraus, daß die Wirkung aller äußeren Massen auf die innerhalb der Fläche liegenden nur von der Größe dieser Fläche abhängt, während die Massen dreidimensional angeordnet sind, wobei, von speziellen Fällen abgesehen, ihre Einwirkungen durchaus eine andere Abhängigkeit zeigen. Diese passieren allerdings sozusagen die Fläche. Das ist aber auch das einzige, was man sagen kann. Außerdem ergibt sich als selbstverständlich, daß durch eine beliebige Vergrößerung der Zeit, eine beliebig große Energiemenge zum Austausch an der Grenzfläche gebracht werden kann. Das ganze Raisonnement ist also als ganz verfehlt abzuweisen. Das tatsächliche Auftauchen solcher sonst unbegreiflicher Irrtümer hängt vielleicht mit der richtigen Auffassung zusammen, daß bei sehr weit entfernten Grenzflächen der Energieumsatz in den innersten Teilen des Raumes annähernd so erfolgt, als ob ein abgeschlossenes System vorläge. Abgesehen davon, daß in der Nähe der Grenzfläche diese Annäherung ganz verloren geht, werden, zum mindesten mit beliebig zunehmender Zeit, auch die innersten Raumteile dieses einfache Verhalten nicht mehr zeigen. Im übrigen ist es bei solchen Überlegungen ganz gleichgültig, ob man mehr oder weniger große Annäherungen erzielt.

Danach verliert das Energieprinzip bei einem Versuch seiner Anwendung auf das Universum jeden Inhalt und es wird ein eitles Bemühen sein, ihm einen bestimmten Sinn etwa dadurch zu geben, daß man den ersten der beiden Clausiusschen Sätze anders faßt.

Noch viel bedenklicher wäre es, den zweiten Clausiusschen Satz aufrecht erhalten zu wollen. Vor allem kommt, gegenüber dem Energieprinzip, noch hinzu, daß der Entropiesatz in der älteren Form, auch abgesehen von einer etwaigen Anwendung auf das Universum, kaum als ein ganz vollständiger Ausdruck der tatsächlichen Verhältnisse angesehen werden kann. Es ist darüber so viel geschrieben und gesprochen worden, daß an dieser Stelle wenige Bemerkungen genügen werden. Man kann unmöglich leugnen, daß seit Clausius Vorgänge auf-

gefunden oder erdacht worden sind, die dem zweiten Satze der mechanischen Wärmetheorie, dem auch der Entropiesatz entsprungen ist, widersprechen, indem Wärme aus einem kälteren in einen wärmeren Körper ohne Arbeitskompensation übertreten kann. Ob man die Maxwellschen Dämonen als ein besonders glücklich gewähltes Bild bezeichnen darf, bleibe dahingestellt, da sie eine überflüssige Ausmalung der Verhältnisse bedeuten. Sicher zeigt die kinetische Gastheorie die Möglichkeit der vorübergehenden Erhöhung der Molekulargeschwindigkeit in einem wärmeren Gase durch Übertritt von schneller bewegten Molekülen aus einem kälteren Gase in einer ein gewisses Mittelmaß übersteigenden Anzahl. Man hat dann weiter dieselben Verhältnisse im großen konstruiert, indem man den Austausch der Moleküle der Gashüllen von Weltkörpern in Betracht zog und so einen länger andauernden Strom schneller bewegter Moleküle erhielt, die von dem kälteren zu dem wärmeren Körper in überwiegender Anzahl herüberziehen und so seinen Wärmeinhalt noch mehr vergrößern können. Jetzt werden die Abweichungen vom zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie nicht auf äußerst kleine Raum- und Zeitteile beschränkt bleiben müssen, sondern in beiden Richtungen in durchaus bemerkbaren Quantitäten sich äußern. Für die Beurteilung der Frage, ob der zweite Hauptsatz ein exaktes Naturgesetz darstellt, ist dieser Unterschied zwar nicht von prinzipieller, aber doch von erheblicher sachlicher Bedeutung. Nun gibt es freilich auch jetzt noch einige Physiker, welche die kinetische Theorie der Materie nicht in allen Einzelheiten als so fest begründet ansehen, daß einzelne Widersprüche gegen sonst wohl begründet erscheinende Sätze von entscheidender Bedeutung sein müßten. Die Kurzlebigkeit physikalischer Theorien muß allerdings zur Vorsicht und Bescheidenheit mahnen, auch ist der eben erwähnte Standpunkt wenigstens ein solcher, welcher zunächst konsequent eingenommen werden kann, ohne zu logischen Widersprüchen zu führen. Andererseits sind die von der kinetischen Theorie herkommenden Einwände nicht leicht zu nehmen, da gerade diese Theorie die glänzendsten Erfolge

aufzuweisen hat. Und so haben auch die größten Physiker wie Maxwell, Clausius, Helmholtz, Boltzmann, trotzdem sie in Einzelheiten keineswegs übereinstimmten, die aus den kinetischen Betrachtungen hervorgegangenen Einwände gegen den zweiten Wärmesatz als sehr ernst zu nehmende anerkannt. Schließlich haben diese namentlich durch Boltzmann zu einer veränderten Auffassung des zweiten Hauptsatzes geführt, indem man ihn als einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung betrachtete: Die gewöhnlich in der Natur vorkommenden Vorgänge geschehen mit überwiegender Wahrscheinlichkeit nach einer Richtung, welche durch die Vergrößerung der Entropie in einem abgeschlossenen System gekennzeichnet wird. Diese überaus ansprechende Auffassung läßt also nach Boltzmann die Möglichkeit von Naturvorgängen zu, die dem Entropiesatz nicht entsprechen. Denn wenn man von einer Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E spricht, so hat das nur dadurch einen Sinn, daß das Nichteintreten von E unter denselben Verhältnissen als möglich vorausgesetzt wird. Leugnet man diese Möglichkeit, so ist die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung höchstens eine Spielerei und zwar unter Umständen eine nicht ungefährliche. Das war auch ohne Zweifel die Ansicht von Boltzmann und ist die einzige logisch zulässige. Definiert man also den Entropiesatz als einen Wahrscheinlichkeitssatz, so ist damit eo ipso ausgesprochen, daß Vorgänge, die ihm widersprechen, möglich sind. Man kann deshalb nicht durch irgendwelche Definitionen nachträglich Ausnahmen von dem Entropiesatz ausschließen und behaupten, daß nun der so in seiner Gültigkeit beschränkte Satz allgemein und ausnahmslos gültig sei und doch auf der Einführung der Wahrscheinlichkeitsbetrachtung beruht und durch sie erwiesen sei. Beides steht in unlösbarem logischen Widerspruch und das ganze ist ein Zirkelschluß der vollkommensten Art. Vielmehr ist die Frage, ob der Entropiesatz ein ausnahmslos geltendes Naturgesetz ist, bereits vollständig in verneinendem Sinne entschieden, sobald man seinen Inhalt als einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung auffaßt. Damit ist auch die Frage,

ob der Entropiesatz auf das unbegrenzte Universum ausgedehnt werden darf, entschieden und gegenstandslos.

Die Boltzmannsche Darstellung gibt aber noch weitere Auskunft. Nicht auf alle Vorgänge sind die Wahrscheinlichkeitssätze ohne weiteres anwendbar und für die, welche hier herausfallen und wirklich vorkommen können, kann man demnach keine bestimmte Angabe machen. Somit muß der Clausiussche Satz auch, abgesehen von seiner Fassung in seiner Anwendung auf das Weltall, als unrichtig angesehen werden.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnungen sind nur auf Ereignisse anwendbar, die als zufällig angesehen werden können und wenn mehrere Ereignisse in Betracht gezogen werden, gelten gewisse, gerade hier in Betracht kommende Sätze nur im Falle ihrer Unabhängigkeit. Bei den Boltzmannschen Betrachtungen, worauf er selbst nachdrücklich aufmerksam macht, kommt es darauf an, daß die Aufeinanderfolge gewisser Vorkommnisse ganz zufällig, d. h. regellos oder wie man auch sagt ungeordnet erfolgt. Damit sind alle Vorgänge überhaupt von der Betrachtung ausgeschlossen, die irgendwie geordneten Bewegungen entsprechen. Für solche läßt sich über den zweiten Wärmesatz überhaupt nichts aussagen. In der Tat scheinen neuerdings gefundene Widersprüche gegen den Wärmesatz auf dieser Basis erklärbar zu sein, sicher gehören die obenerwähnten von der kinetischen Gastheorie ausgehenden Einwände in diese Klasse. Man muß also die Geltung des Entropiesatzes an das Vorhandensein völliger Ungeordnetheit knüpfen und da diese in der Natur sicherlich nicht genau höchstens angenähert vorkommt, hat der Entropiesatz, von unserem Standpunkt aus, den ausgeprägten Charakter eines keinesfalls allgemeinen, sondern nur unter bestimmten Voraussetzungen geltenden Erfahrungssatzes. Damit ist natürlich seine große Bedeutung für viele Teile der Physik in keiner Weise alteriert. Aber von einer unbegrenzten Anwendbarkeit auf das Universum kann keine Rede sein und alle mit dem sogenannten „Wärmetod" zusammenhängenden Perspektiven ruhen nicht auf wohlbegründeter Basis. Wer wollte behaupten, daß das Streben der

Natur, insofern es nicht in einzelnen Wärmeerscheinungen hervortritt, sondern die Entwicklung des Universums bestimmt, nach Herstellung größerer Ungeordnetheit gerichtet ist? Das Gegenteil kann ebensogut, vielleicht mit größerem Recht, angenommen werden. Dann würde aber auf Grund der kinetischen Betrachtung folgen, daß in der Natur mit der Zeit immer mehr die Fälle von Geordnetheit zahlreicher werden und somit immer mehr eine Ungültigkeit des Entropiesatzes hervortreten müßte. Ich glaube, daß diese Mutmaßung viel ansprechender ist als das Gegenteil und nun auch noch andere Widersprüche fortschafft, die sich von selbst aufdrängen.

Es scheint nicht oder nur sehr wenig bekannt zu sein, daß sehr viel Beachtenswertes über den Entropiesatz von einem Nichtphysiker bereits vor 34 Jahren deutlich ausgesprochen worden ist, was viel später von anderen zum Teil in nicht so klarer, zum Teil in übertriebener Weise gesagt wurde.

Im ersten Band der gesammelten Schriften[1]) des hochverdienten Physiologen A. Fick habe ich S. 362—365 einen höchst interessanten und bedeutenden Aufsatz vom Jahre 1874 „Über das Prinzip der Zerstreuung der Energie“ gefunden, zu dessen Lektüre ich durch die Mitteilung einiger Sätze anregen möchte. Fick wendet sich gegen die Zulässigkeit des oben angeführten Clausiusschen Satzes von der Zunahme der Entropie im Weltall. Gleich am Anfang zeigt er, wie die Annahme, die Entwicklung der Welt schreite stets in derselben Richtung, einer Vermehrung der Entropie entsprechend, vorwärts, zu den unbegreiflichsten Konsequenzen führt: „Das würde so viel heißen, als daß vor einer unendlichen Zeit, von jetzt an gerechnet, das Weltsystem noch nicht den jetzt gültigen Gesetzen unterworfen gewesen wäre, oder daß vor unendlicher Zeit unendlich große Geschwindigkeiten oder unendlich große Temperaturdifferenzen vorhanden gewesen wären, was undenkbar ist. Es ist begreiflich, daß ein Satz, der zu so bedenklichen Konsequenzen führt, selbst bedenklich erscheint.“ Hier ist in der Tat eine große unüber-

---

[1]) Würzburg 1903.

windliche Schwierigkeit aufgedeckt, auf welche alle einseitigen Naturentwicklungen, die sich nach Raum und Zeit unumschränkt abspielen sollen, führen. Fick spricht dann über die Clausiusschen Beweise des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie, die sich auf die Annahme stützen, daß Wärme von einem kälteren zu einem wärmeren Körper nicht ohne Kompensation übergehen könne. „Nun ist zwar diese Annahme wahrscheinlich genug, um den ausgedehntesten Gebrauch von ihr zu machen, aber auf die Würde eines eigentlichen Axioms kann sie doch eigentlich nicht Anspruch machen.“ Er kommt dann auf die damals noch wenig bekannte und auch wohl noch nicht ganz entwickelte Auffassung von Boltzmann zu sprechen und gelangt zu dem Ausspruch: „Ich behaupte hiernach, daß dem Satz von der Zerstreuung der Energie keine Gewißheit zukommt, sondern nur ein Grad von Wahrscheinlichkeit, der zwar groß genug ist, um jeden beliebigen praktischen Gebrauch davon zu machen, der aber nicht gestattet, diesen Satz zu einem eigentlichen Prinzip der Naturphilosophie zu machen.“ Schließlich erwähnt Fick auch noch die obenerwähnten Weltkörper mit Atmosphären, die tatsächlich dem Entropiesatz entsprechen: „Ganz ebenso schließt es auch unsere Vorstellung von der Natur des gasförmigen Aggregatzustandes nicht aus, daß einmal zufällig besonders viele Moleküle in gleicher Richtung fliegen. Wenn sich dies aber an der Grenze der Atmosphäre eines Planeten ereignete, so könnten sich frei fortfliegende Molekularaggregate bilden. In einem solchen Falle wäre Wärme ohne Kompensation in Massenbewegung verwandelt worden. Man sieht leicht, daß dieser Gedanke zu ganz artigen kosmischen Phantasien Veranlassung geben kann, die ich aber hier nicht weiter ausspinnen will.“

Jeder, der die kleine Abhandlung von Fick liest, wird lebhaft bedauern, daß sie keine weitere Beachtung gefunden hat und gewiß wäre im andern Fall mancher bedauerliche Irrtum vermieden worden, auch wäre wohl manche Diskussion unterblieben und manche Neuauffindung hätte sich als unnötig erwiesen.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß auch, abgesehen von den früheren Bemerkungen und wenn man sich auch nicht auf den Boden der kinetischen Theorie stellt, vielmehr den Entropiesatz in der ursprünglichen Gestalt betrachtet, die Zulässigkeit seiner Anwendung auf das Weltall abgelehnt werden müßte und zwar aus ähnlichen Gründen, die zur Beurteilung der Gültigkeit des Energieprinzips führten. Der zweite Hauptsatz der Wärmetheorie wird, um einen Machschen Ausdruck zu gebrauchen, durch gewisse „Gedankenexperimente" abgeleitet, die aus verschiedenen Gründen gar nicht wirklich ausgeführt werden können. Ob man auf diesem Wege überhaupt zu ganz streng gültigen Naturgesetzen gelangen kann, ist sicherlich diskutabel, doch soll nicht näher darauf eingegangen werden. Nur darauf soll hingewiesen werden, wie die Schwierigkeiten, die solche Experimente unserem Verständnis darbieten, wachsen, wenn dem betrachteten System eine immer größere Ausdehnung gegeben wird und wenn man, wie hier gefordert wird, andere außerhalb gelegene Körperkomplexe von vorgeschriebenen Eigenschaften heranziehen muß. Wie man solche Experimente, auf denen der Beweis des zweiten Hauptsatzes beruht, etwa sich angeordnet zu denken hat, um seine Gültigkeit für alle Vorgänge innerhalb unseres Fixsternsystems z. B. nachzuweisen, wird wohl schwerlich darzustellen sein. Jedenfalls ergibt sich, daß eine Erweiterung des Raumes, dessen Massen in die Betrachtung einbezogen werden, schon deshalb nicht beliebig fortgesetzt werden kann, weil man immer wieder außerhalb gelegene Körperkomplexe von vergleichbarer Ausdehnung hinzuziehen muß. Einer Grenze nähert man sich bei diesem Vorgang jedenfalls nicht und deshalb ist nach den obigen Auseinandersetzungen eine unbegrenzte Ausdehnung der Gültigkeit der gewonnenen Sätze nicht zulässig. Man könnte zwar annehmen, obwohl nichts dafür spricht, daß vielleicht eine andere Betrachtungsweise aufgefunden werden könnte, die von den erwähnten Schwierigkeiten frei ist. Aber auch damit wäre nichts gewonnen. Denn mehr als den Beweis zu liefern, daß die Entropie in einem vollkommen abgeschlossenen System

zunimmt, und daß dieser Satz für sehr große Systeme solcher Art gültig bleibt, kann nicht gelingen. Wie oben gezeigt worden ist, kann aber nur eine irrtümliche Ansicht über die Wirkungen verschiedener Körper aufeinander auf diesem Wege zum Universum als Grenzbegriff führen.

Wie man also die Sache auch betrachten mag und unabhängig von dem speziellen physikalischen Standpunkt, von dem die Beurteilung erfolgt, immer gelangt man zu dem Resultat, daß ein Beweis für die fortwährende Entropievermehrung im Universum nicht erbracht werden kann, vielmehr der Entropiesatz selber, ganz abgesehen von rein physikalischen Bedenken, eine unbegrenzte Erweiterung seines Gültigkeitsbereichs nicht verträgt.

*



Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 5. Abhandlung

Vereinfachte Herleitung unharmonischer trigonometrischer Reihen

von

Ludwig Berwald

Vorgelegt am 1. Mai 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Cauchy hat im Jahre 1827 mit Hilfe der von ihm begründeten Residuenrechnung eine Beweismethode für die von Fourier und Poisson aufgestellten Reihenentwicklungen für sogenannte willkürliche Funktionen angegeben, die nicht nur die gewöhnlichen harmonischen trigonometrischen Reihen in sich schließt, sondern auch den allgemeineren Fall der unharmonischen, d. h. solcher trigonometrischer Reihen, bei welchen die Parameter Wurzeln irgend einer vorgeschriebenen transzendenten Gleichung sind.[1] Sein Beweis, der im einzelnen einige Irrtümer enthält, wurde von A. Harnack,[2] und namentlich von Herrn É. Picard[3]) entsprechend umgestaltet; beide setzen dabei von der in eine Reihe zu entwickelnden Funktion voraus, daß sie in dem Intervall, welches betrachtet wird, den bekannten Dirichletschen Bedingungen genügt.

Von Herrn Professor H. Burkhardt mündlich darauf aufmerksam gemacht, daß der Picardsche Beweis sich in einzelnen Punkten mittels der Bemerkung vereinfachen lasse, daß nach Herrn C. Jordan jede den Dirichletschen Bedingungen genügende Funktion als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen darstellbar ist, habe ich auf der Grundlage des Cauchyschen Beweisganges einen neuen Beweis für die ganze Klasse von Funktionen, welche eine solche Darstellung gestatten

---

[1] Cauchy, Sur les résidus des fonctions exprimées par des intégrales définies. Exerc. de math. 1827; Oeuvres (2), 7 (393 - 430).

[2] Harnack, Über Cauchys zweiten Beweis für die Konvergenz der Fourierschen Reihen und eine damit verwandte ältere Methode von Poisson. (Febr. 1888.) Math. Ann. 32 (175 - 202).

[3] Picard, Traité d'Analyse II, 1893, Chap. VI, II (167 – 183); 2. éd. 1905 (179 – 195).

(die Funktionen mit beschränkter Schwankung). geführt. Abgesehen von der dadurch erzielten Verallgemeinerung und Vereinfachung erhielt ich so namentlich auch einen Satz über die Summe der unharmonischen trigonometrischen Reihen an den Grenzen ihres Gültigkeitsbereiches, der bisher, wie es scheint, noch nicht bemerkt worden ist.

I. Es sollen die allgemeinen Cauchyschen Betrachtungen[1]) angewendet werden auf den Fall:

$$\mathfrak{F}(z) = \frac{\varphi(z)}{F(z)} \int_{x_0}^{x} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu \qquad (x > x_0), \tag{1}$$

wo

$$z = \varrho(\cos\tau + i\sin\tau)$$

eine komplexe Variable, $\varphi(z)$, $F(z)$ ganze transzendente Funktionen derselben, x ein reeller Parameter, und $f(\mu)$ eine reelle Funktion der reellen Variabeln μ ist. Über diese Funktion soll folgendes vorausgesetzt werden:

$f(\mu)$ soll im Integrationsintervalle $x_0 \leq \mu < x$ eine Funktion mit beschränkter Schwankung[2]) sein. Eine solche Funktion läßt sich dort stets als Differenz zweier monoton zunehmender Funktionen darstellen; sie besitzt höchstens eine abzählbare Menge von Unstetigkeitspunkten erster Art und ist integrabel.

Insbesondere umfaßt diese Voraussetzung auch den Fall, daß $f(\mu)$ im Integrationsintervalle den Dirichletschen Bedingungen genügt.

Damit die allgemeinen Betrachtungen von Cauchy hier anwendbar sind, muß folgendes gezeigt werden:

[1]) Vgl. z. B. Picard, Traité d'Analyse II, Chap. VI, II, Art. 9.

[2]) Diese Funktionen sind behandelt in:

C. Jordan, Sur la série de Fourier. C. R. Ac. sc. Paris 92, 1881 (228–230); Cours d'Analyse I, 1893 (54–61); — und sehr ausführlich in:

E. Study, Über eine besondere Klasse von Funktionen einer reellen Veränderlichen. Math. Ann. 47, 1896 (298—316).

Wächst die komplexe Variable $z = \varrho e^{i\tau}$ so ins Unendliche, daß ihr Modul ϱ in der (passend gewählten) Reihe

$$\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n, \ldots \qquad (\varrho_{\nu+1} > \varrho_\nu)$$

bleibt, so konvergiert der Ausdruck

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} z\frac{\mathfrak{F}(z)-\mathfrak{F}(-z)}{2} &= \frac{1}{2}\frac{\varphi(z)}{F(z)} z\int_{x_0}^{x} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu \\ &\quad - \frac{1}{2}\frac{\varphi(-z)}{F(-z)} z\int_{x_0}^{x} e^{-z(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu \\ &= \frac{1}{2}\frac{\varphi(z)}{F(z)} e^{z(x-x_0)}\cdot z\int_{x_0}^{x} e^{-z(\mu-x_0)} f(\mu)\,d\mu \\ &\quad - \frac{1}{2}\frac{\varphi(-z)}{F(-z)}\cdot z\int_{x_0}^{x} e^{-z(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu \end{aligned}\right.$$

gleichmäßig gegen einen von τ unabhängigen Grenzwert in jedem Bereiche der Variabeln τ, für welches

$$-\frac{\pi}{2} < \tau \leq +\frac{\pi}{2}$$

ist, und welches die Bereiche

$$\tau_0^{(\varkappa)} - \varepsilon < \tau \leq \tau_0^{(\varkappa)} + \varepsilon \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots m)$$

(wo ε eine positive Größe bedeutet, die beliebig klein angenommen werden kann), nicht enthält. Dabei ist unter den $\tau_0^{(\varkappa)}$ eine endliche Anzahl von Richtungen verstanden, in welchen jener Grenzwert nicht zu existieren braucht, falls nur der Ausdruck (2) in den ausgeschlossenen Bereichen überall endlich bleibt.

Für das eben beschriebene Verhalten gebrauche ich (in Übereinstimmung mit Herrn Picard) folgende Abkürzung: der Ausdruck (2) muß „im allgemeinen" gegen einen von τ unabhängigen Grenzwert konvergieren, wenn z (immer in der angegebenen Weise) ins Unendliche wächst.

Den Beweis hierfür will ich in zwei Schritten führen. Zunächst beweise ich folgendes:

1. a) Der Ausdruck

$$z\int_{x_0}^{x} e^{-z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu \qquad (x > x_0) \tag{3}$$

konvergiert gleichmäßig gegen den Grenzwert $f(x-0)$,[1]) wenn z sich so ins Unendliche bewegt, daß sein Argument τ der Ungleichung

$$-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \tau < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

genügt, wo ε eine beliebig klein angenommene positive Größe bedeutet. Ich will dafür im folgenden die abgekürzte Ausdrucksweise gebrauchen: Der Ausdruck (3) konvergiert für wachsende z gegen den Grenzwert $f(x-0)$, wenn z sich nicht gerade auf der imaginären Achse ins Unendliche bewegt.

b) Der Ausdruck

$$z\int_{x_0}^{x} e^{-z(\mu-x_0)} f(\mu)\, d\mu \qquad (x > x_0) \tag{4}$$

konvergiert für wachsende z gegen den Grenzwert $f(x_0+0)$, falls nicht gerade z sich auf der imaginären Achse ins Unendliche bewegt.[2])

2. Die beiden Ausdrücke (3) und (4) bleiben für jedes der Ungleichung

$$-\frac{\pi}{2} \leq \tau < \frac{\pi}{2}$$

genügende τ, also auch in der Umgebung der imaginären Achse und auf derselben endlich.

---

[1]) Falls der Punkt x eine Stetigkeitsstelle der Funktion f ist, ist hierfür einfach $f(x)$ zu schreiben. Analoges gilt weiterhin für $f(x_0+0)$.

[2]) Dieser Teil des Beweises, der bei Picard fehlt, ist wesentlich, wenn man Schlüsse auf das Verhalten der unharmonischen trigonometrischen Reihen an den Gültigkeitsgrenzen ziehen will.

II. Durchführung des Beweises.

1. a) Nach Voraussetzung ist:

$$f(\mu) = f_1(\mu) - f_2(\mu),$$

wo f_1 und f_2 im Integrationsintervall

$$x_0 \leq \mu \leq x$$

monoton wachsende Funktionen sind. Dieselben können immer so gewählt gedacht werden, daß sie in diesem Intervalle beständig größer als Null sind.

Dann ist:

$$z\int_{x_0}^{x} e^{-z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu = z\int_{x_0}^{x} e^{-z(x-\mu)} f_1(\mu)\, d\mu - z\int_{x_0}^{x} e^{-z(x-\mu)} f_2(\mu)\, d\mu;$$

und wenn

$$z e^{-z(x-\mu)} = P + Qi$$

gesetzt wird, so hat man:

$$z\int_{x_0}^{x} e^{-z(x-\mu)} f_\varkappa(\mu)\, d\mu = \int_{x_0}^{x} P f_\varkappa(\mu)\, d\mu + i\int_{x_0}^{x} Q f_\varkappa(\mu)\, d\mu \quad (\varkappa = 1, 2).$$

Da im Integrationsintervalle $f_\varkappa(\mu)$ integrabel, monoton zunehmend und größer als Null ist, kann man auf jedes der beiden reellen Integrale rechts den zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung[1]) in seiner einfachsten Gestalt anwenden, und erhält:

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} \int_{x_0}^{x} P f_\varkappa(\mu)\, d\mu = f_\varkappa(x - 0) \int_{\xi_{1,\varkappa}}^{x} P\, d\mu, \\ \int_{x_0}^{x} Q f_\varkappa(\mu)\, d\mu = f_\varkappa(x - 0) \int_{\xi_{2,\varkappa}}^{x} Q\, d\mu, \end{cases} \qquad (\varkappa = 1, 2)$$

[1]) Cauchy wendet in seinem Beweise an der entsprechenden Stelle den ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung an, was unzulässig ist, da die bei ihm unter dem Integralzeichen verbleibende Funktion innerhalb des Integrationsintervalles ihr Vorzeichen wechselt. Infolgedessen macht er über die Funktion $f(\mu)$ keinerlei Voraussetzungen, während in Wirklichkeit die Resultate, zu denen er gelangt, nur dann gelten, wenn man über die Funktion $f(\mu)$ beschränkende Annahmen macht.

wenn mit $\xi_{1,\varkappa}$ und $\xi_{2,\varkappa}$ Mittelwerte der Variabeln im Integrationsintervalle bezeichnet werden.

Nun sind die Integrale $\int P\,d\mu$, $\int Q\,d\mu$ bezüglich der reelle Teil und der Koeffizient von i im Integrale $\int z\,e^{-z(x-\mu)}\,d\mu$; ferner ist:

$$\int_{\xi_{\lambda,\varkappa}}^{x} z\,e^{-z(x-\mu)}\,d\mu = 1 - e^{-z(x-\xi_{\lambda,\varkappa})} \qquad (\lambda = 1, 2;\ \varkappa = 1, 2).$$

Setzt man also, wie bisher

$$z = \varrho\,(\cos\tau + i\sin\tau)$$

und trennt Reelles und Imaginäres, so folgt:

$$\text{(b)}\quad \left\{\begin{aligned} \int_{\xi_{\lambda,\varkappa}}^{x} P\,d\mu &= 1 - e^{-\varrho(x-\xi_{\lambda,\varkappa})\cos\tau}\cos\left[\varrho\,(x-\xi_{\lambda,\varkappa})\sin\tau\right],\\ \int_{\xi_{\lambda,\varkappa}}^{x} Q\,d\mu &= \qquad e^{-\varrho(x-\xi_{\lambda,\varkappa})\cos\tau}\sin\left[\varrho\,(x-\xi_{\lambda,\varkappa})\sin\tau\right],\end{aligned}\right.$$

$$(\lambda = 1, 2;\ \varkappa = 1, 2).$$

Macht man nun die Voraussetzung, daß z sich nicht auf der imaginären Achse ins Unendliche bewegen soll, daß also

$$|\cos\tau| > 0$$

ist, so hat man:

$$\lim_{\varrho=\infty}\int_{\xi_{\lambda,\varkappa}}^{x} P\,d\mu = 1; \qquad \lim_{\varrho=\infty}\int_{\xi_{\lambda,\varkappa}}^{x} Q\,d\mu = 0 \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2),$$

wobei die Limiten in dem unter I besprochenen Sinn zu verstehen sind.

Es folgt also unmittelbar aus dem zweiten Mittelwertsatz:

$$\lim_{\varrho=\infty}\int_{x_0}^{x} P f_\varkappa(\mu)\,d\mu = f_\varkappa(x-0); \qquad \lim_{\varrho=\infty}\int_{x_0}^{x} Q f_\varkappa(\mu)\,d\mu = 0$$

$$(\varkappa = 1, 2;\ |\cos\tau| > 0)$$

und daraus:

$$\lim_{\varrho=\infty} z\int_{x_0}^{x} e^{-z(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu = f_1(x-0) - f_2(x-0) = f(x-0)$$

$$(|\cos\tau| > 0).$$

b) Seien die Funktionen $f_1(\mu)$ und $f_2(\mu)$ so beschaffen, daß im Integrationsintervall $(x_0 x)$

$$0 < f_1(\mu) < G_1; \quad 0 < f_2(\mu) < G_2$$

(G_1, G_2 feste positive Zahlen) ist; bezeichne ferner G die größere der beiden Zahlen G_1, G_2; endlich sei:

$$f_{\mathrm{I}}(\mu) = f_1(\mu) - G; \quad f_{\mathrm{II}}(\mu) = f_2(\mu) - G.$$

Dann ist auch:

$$f(\mu) = f_{\mathrm{I}}(\mu) - f_{\mathrm{II}}(\mu),$$

wo jetzt die Funktionen $f_{\mathrm{I}}(\mu)$ und $f_{\mathrm{II}}(\mu)$ im Integrationsintervall $(x_0 x)$ monoton wachsend und beständig kleiner als Null sind.

Eine Anwendung der dieser Voraussetzung entsprechenden Form des zweiten Mittelwertsatzes und eine analoge Rechnung, wie die unter a.) durchgeführte, führt unschwer zu dem Resultate:

$$\lim_{\varrho = \infty} z \int_{x_0}^{x} e^{-z(\mu - x_0)} f(\mu)\, d\mu = f(x_0 + 0), \qquad (|\cos\tau| > 0).$$

2. Aus den Formeln (b) folgt sofort, daß sicher

$$\left|\int_{\xi_{\lambda,\varkappa}}^{x} P\, d\mu\right| < 2, \quad \left|\int_{\xi_{\lambda,\varkappa}}^{x} Q\, d\mu\right| < 2 \qquad (\lambda, \varkappa = 1, 2)$$

ist, für jeden Wert von $\cos\tau\,(\geqq 0)$ und jeden Wert von ϱ, also für jedes z, dessen reeller Teil positiv ist.

Demnach folgt aus (a):

$$\left.\begin{aligned} \left|\int_{x_0}^{x} P f_\varkappa(\mu)\, d\mu\right| &< 2 f_\varkappa(x - 0), \\ \left|\int_{x_0}^{x} Q f_\varkappa(\mu)\, d\mu\right| &< 2 f_\varkappa(x - 0), \end{aligned}\right\} \qquad (\varkappa = 1, 2)$$

und daher ist:

$$\left|z \int_{x_0}^{x} e^{-z(x - \mu)} f_\varkappa(\mu)\, d\mu\right| < 2\, |\sqrt{2}|\, f_\varkappa(x - 0),$$

somit schließlich:

$$\left| z \int_{x_0}^{x} e^{-z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu \right| < 2 \left| \sqrt{2} \right| (f_1(x-0) + f_2(x-0)),$$

also endlich.

Analog führt man den entsprechenden Beweis für den Ausdruck:

$$z \int_{x_0}^{x} e^{-z(\mu - x_0)} f(\mu)\, d\mu.$$

III. Nun mache ich außer den bereits in I aufgestellten Voraussetzungen noch folgende weitere Annahmen:

Wenn z (in der unter I angegebenen Weise) ins Unendliche wächst, soll:

A) der Ausdruck

$$\frac{\varphi(z)}{F(z)} e^{z(x-x_0)}$$

im allgemeinen gegen einen konstanten Grenzwert c' konvergieren,[1])

B) der Ausdruck

$$\frac{\varphi(-z)}{F(-z)}$$

im allgemeinen gegen einen konstanten Grenzwert c konvergieren.

Dann bleibt der Ausdruck (1) in der betrachteten komplexen Halbebene endlich und es ist im allgemeinen:

$$\lim_{\varrho=\infty} z \frac{\mathfrak{F}(z) - \mathfrak{F}(-z)}{2} = \frac{1}{2} c' f(x_0+0) - \frac{1}{2} c f(x-0).$$

Die allgemeine Theorie von Cauchy ergibt infolgedessen die Gleichung:

$$(\alpha)\ \frac{1}{2} c' f(x_0+0) - \frac{1}{2} c f(x-0) = \sum_{\lambda} \frac{\varphi(\lambda)}{F'(\lambda)} \int_{x_0}^{x} e^{\lambda(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu,\ (x > x_0),$$

[1]) Diese Voraussetzung ist etwas allgemeiner als die bisher von allen Autoren gemachte, daß dieser Grenzwert gerade Null sein muß.

wo sich die Summation auf der rechten Seite über alle Wurzeln λ der Gleichung

$$F(z) = 0$$

in der Weise erstreckt, daß immer alle diejenigen Wurzeln zusammengenommen werden, deren absoluter Betrag zwischen zwei aufeinanderfolgenden Termen der Reihe $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n, \ldots$ liegt, und vorausgesetzt ist, daß diese Gleichung lauter einfache Wurzeln λ hat,[1]) und die Kreise (ϱ_ν) so gewählt sind, daß sie nicht durch die Punkte λ gehen.

Ganz analog wie dieser Satz ergibt sich auch der folgende: Ist:

$$(5) \qquad \mathfrak{F}(z) = \frac{\chi(z)}{F(z)} \int_x^{x_1} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu \qquad (x_1 > x),$$

wo $z, F(z), \mu, f(\mu)$ dieselbe Bedeutung besitzen, wie bisher, und $\chi(z)$ eine ganze transzendente Funktion von z ist; und setzt man voraus, daß im allgemeinen

$$\text{C)} \qquad \lim_{\varrho=\infty} \frac{\chi(z)}{F(z)} = C,$$

$$\text{D)} \qquad \lim_{\varrho=\infty} \frac{\chi(-z)}{F(-z)} e^{z(x_1-x)} = C'$$ [2])

ist, so gilt die Gleichung:

$$(\beta) \quad \frac{1}{2} C f(x+0) - \frac{1}{2} C' f(x_1 - 0) = \sum_\lambda \frac{\chi(\lambda)}{F'(\lambda)} \int_x^{x_1} e^{\lambda(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu$$
$$(x_1 > x),$$

in welcher die Summation auf der rechten Seite wieder über

---

[1]) Diese Beschränkung ist unwesentlich. Die Cauchysche Residuenrechnung würde eine, obgleich nicht so einfache Darstellung auch für den Fall gestatten, daß $F(z)$ u. a. auch mehrfache Nullstellen besitzt. Doch kommt dieser Fall bei den Problemen, die auf derartige Entwicklungen führen, kaum jemals vor.

[2]) Hier setzten gleichfalls bisher alle Autoren $C' = 0$ voraus.

alle (als einfach vorausgesetzten) Wurzeln λ von $F(z) = 0$ zu erstrecken ist.

IV. Seien nun die Funktionen $\varphi(z)$ und $\chi(z)$ so gewählt, daß außer den Bedingungen B) und C) auch noch die weitere

$$\text{E)} \qquad \varphi(z) + \chi(z) = F(z)$$

erfüllt ist, und sei das Intervall $(x_0 x_1)$ derart angenommen, daß für alle Werte der Variabeln x innerhalb desselben[1]) die Bedingungen A) und D) zugleich bestehen.

Dann folgt aus E):

$$\lim_{\varrho=\infty}\left(\frac{\varphi(z)}{F(z)} + \frac{\chi(z)}{F(z)}\right) = 1; \quad \lim_{\varrho=\infty}\left(\frac{\varphi(-z)}{F(-z)} + \frac{\chi(-z)}{F(-z)}\right) = 1;$$

da die Grenzwerte

$$\lim_{\varrho=\infty}\frac{\chi(z)}{F(z)} \quad \text{und} \quad \lim_{\varrho=\infty}\frac{\varphi(-z)}{F(-z)}$$

nach B) und C) existieren (höchstens gewisse Richtungen ausgenommen), gilt das gleiche auch von den Grenzwerten:

$$\lim_{\varrho=\infty}\frac{\varphi(z)}{F(z)} \quad \text{und} \quad \lim_{\varrho=\infty}\frac{\chi(-z)}{F(-z)};$$

wegen A) und D) sind diese letzten Grenzwerte aber im allgemeinen Null,[2]) also die beiden ersten gleich 1; d. h. die Konstanten c und C sind im vorliegenden Falle gleich 1.

Berücksichtigt man noch, daß (bei gleicher Bezeichnungsweise wie oben)

$$\varphi(\lambda) + \chi(\lambda) = F(\lambda) = 0$$

ist, so erhält man aus den Gleichungen (α) und (β):

$$(\alpha_1) \qquad \begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\, c' f(x_0 + 0) - \tfrac{1}{2} f(x - 0) \\ &= \sum_\lambda \frac{\varphi(\lambda)}{F'(\lambda)} \int_{x_0}^{x} e^{\lambda(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu \qquad (x > x_0); \end{aligned}$$

---

[1]) An den Grenzen x_0, x_1 braucht das nicht mehr der Fall zu sein.

[2]) Die Richtungen $\tau = \pm\frac{\pi}{2}$ sind dabei den auszuschließenden zuzuzählen.

$$(\beta_1)\qquad \begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\,C' f(x_1-0)-\tfrac{1}{2} f(x+0)\\ &=\sum_\lambda \frac{\varphi(\lambda)}{F'(\lambda)}\int_x^{x_1} e^{\lambda(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu \qquad (x_1>x).\end{aligned}$$

Addition ergibt das Resultat:

$$(\gamma)\qquad \begin{aligned}&\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{c'}{2} f(x_0+0)\\ &+\frac{C'}{2} f(x_1-0)-\sum_\lambda \frac{\varphi(\lambda)}{F'(\lambda)}\int_{x_0}^{x_1} e^{\lambda(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu \quad (x_1>x_0),\end{aligned}$$

wo sich die Summation auf der rechten Seite in der unter III angegebenen Weise über alle (als einfach vorausgesetzten) Wurzeln λ der Gleichung

$$F(z)=0$$

zu erstrecken hat.

Ist x insbesondere eine Stetigkeitsstelle der Funktion f, so ist in (α_1), (β_1), (γ) statt $f(x-0)$ und $f(x+0)$ einfach $f(x)$ zu setzen; ebenso, wenn x_0 resp. x_1 Stetigkeitsstellen von f sind, statt $f(x_0+0)$ und $f(x_1-0)$ bezüglich $f(x_0)$ und $f(x_1)$.

In dem speziellen Falle, daß f an der Stelle x stetig, und $c'=C'=0$ ist, erhält man die bei Picard[1]) gegebene Formel:

$$(\gamma_1)\qquad f(x)=-\sum_\lambda \frac{\varphi(\lambda)}{F'(\lambda)}\int_{x_0}^{x_1} e^{\lambda(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu \qquad (x_1>x_0).$$

Die Formeln (γ) und (γ_1) gelten, ihrer Herleitung gemäß, nur für alle x, welche der Ungleichung

$$x_0<x<x_1$$

genügen.

V. Es ist jetzt auf Grund der gegebenen Darstellung leicht, die Werte zu finden, welche die in (γ) rechts stehende Summe

$$\sum_\lambda \frac{\varphi(\lambda)}{F'(\lambda)}\int_{x_0}^{x_1} e^{\lambda(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu \qquad (x_1>x_0)$$

[1]) A. a. O., p. 175. 2. éd. p. 187, Formel (γ).

an den Integrationsgrenzen x_0 und x_1 selbst annimmt, falls nur die Voraussetzungen B), C), E) und zwei den Voraussetzungen A) und D) analoge erfüllt sind.

Ich will dazu zunächst zwei allgemeinere Formeln ableiten, als deren Spezialfälle jene Werte sich ergeben.

1. Für $x = x_0$ reduziert sich die Formel (α) (wie sich auch unschwer aus ihrer Herleitung verifizieren läßt), auf die Identität

$$0 = \sum_\lambda \frac{\varphi(\lambda)}{F'(\lambda)} \int_{x_0}^{x_0} e^{\lambda(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu$$

und Formel (β) ergibt den Satz:

Hat man zwei ganze transzendente Funktionen χ und F der komplexen Variabeln $z = \varrho e^{i\tau}$ so gewählt, daß F lauter einfache Nullstellen hat, und daß im allgemeinen

$$\text{C)} \qquad \lim_{\varrho=\infty} \frac{\chi(z)}{F(z)} = C,$$

$$\text{D}_1\text{)} \qquad \lim_{\varrho=\infty} \frac{\chi(-z)}{F(-z)} e^{z(x_1-x_0)} = C''$$

(C, C'' Konstante) ist, und stellt $f(x)$ im Intervall

$$x_0 \leq x \leq x_1$$

eine Funktion mit beschränkter Schwankung dar, so ist

$$(\delta) \quad \sum_\lambda \frac{\chi(\lambda)}{F'(\lambda)} \int_{x_0}^{x_1} e^{\lambda(x_0-\mu)} f(\mu) d\mu = \frac{1}{2} C f(x_0+0) - \frac{1}{2} C'' f(x_1-0)$$

($x_1 > x_0$), wo die Summe links nach den (wieder als einfach vorausgesetzten) Wurzeln λ von $F(z) = 0$ in der oben ausgeführten Weise fortschreitet.

2. Ebenso folgt:

Haben F, f und z dieselbe Bedeutung wie im letzten Satz und ist $\varphi(z)$ eine ganze transzendente Funktion von z, die so gewählt ist, daß im allgemeinen

A$_1$)
$$\lim_{\varrho=\infty} \frac{\varphi(z)}{F(z)} e^{z(x_1 - x_0)} = c'',$$

B)
$$\lim_{\varrho=\infty} \frac{\varphi(-z)}{F(-z)} = c$$

ist, so gilt die Gleichung:

$$(\varepsilon) \qquad \sum_{\lambda} \frac{\varphi(\lambda)}{F'(\lambda)} \int_{x_0}^{x_1} e^{\lambda(x_1-\mu)} f(\mu)\, d\mu = \frac{1}{2} c'' f(x_0+0) - \frac{1}{2} c f(x_1-0)$$

$(x_1 > x_0)$, die Summe links ebenso verstanden wie im vorigen Satz.

3. Wählt man also jetzt die Funktionen φ und χ so, daß die Bedingungen A$_1$), B), C), D$_1$) und E) zu gleicher Zeit erfüllt sind,[1]) so ist wieder $c = C = 1$, und man erhält die beiden Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
(\delta_1) \quad -\sum_{\lambda} \frac{\varphi(\lambda)}{F'(\lambda)} \int_{x_0}^{x_1} e^{\lambda(x_0-\mu)} f(\mu)\, d\mu &= \frac{1}{2} f(x_0+0) - \frac{1}{2} C'' f(x_1-0) \\
(\varepsilon_1) \quad -\sum_{\lambda} \frac{\varphi(\lambda)}{F'(\lambda)} \int_{x_0}^{x_1} e^{\lambda(x_1-\mu)} f(\mu)\, d\mu &= \frac{1}{2} f(x_1-0) - \frac{1}{2} c'' f(x_0+0)
\end{aligned}\right\} (x_1 > x_0),$$

welche die Werte der in (γ) auftretenden Summe an den Integrationsgrenzen x_0 und x_1 geben. Diese Werte hängen also im allgemeinen von $f(x_1 - 0)$ und $f(x_0 + 0)$ zugleich ab.

---

[1]) Es ist zu bemerken, daß die Konstante C'' der Formel D$_1$) von der Konstanten C' der Formel D), und ebenso die Konstante c'' der Formel A$_1$) von der Konstanten c' der Formel A) im allgemeinen verschieden sein wird, da man doch als Intervall $(x_0\, x_1)$ das größte Intervall wählt, innerhalb dessen noch die Bedingungen D) und A) zugleich erfüllt sind.

VI. Beispiele.

Zur Erläuterung der letzten Entwicklungen sollen schließlich noch zwei Beispiele angegeben werden: der Fall der gewöhnlichen Fourierschen Reihe, und eine in der Theorie der Wärmeleitung mehrfach auftretende Reihenentwicklung.

1. Bei der nach den Sinus und Cosinus der ganzzahligen Vielfachen des Argumentes fortschreitenden Fourierschen Reihe sind die Parameter die Wurzeln der transzendenten Gleichung:

$$\sin \pi y = 0, \tag{6}$$

welche durch die Substitution

$$y i = z \qquad (z = \varrho e^{i\tau})$$

in die determinierende Gleichung

$$F(z) = e^{2\pi z} - 1 = 0 \tag{6*}$$

übergeht. Durch die Annahme

$$\varphi(z) = -1, \quad \chi(z) = e^{2\pi z}$$

erfüllt man die Bedingung E) und erhält, wenn f im Intervalle $(x_0, x_0 + 2\pi)$ eine Funktion mit beschränkter Schwankung ist, aus (γ) unschwer die Entwicklung:

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(\mu)\, d\mu + \frac{1}{\pi} \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(\mu) \cos \nu (x-\mu)\, d\mu, \tag{7}$$

welche für alle

$$x_0 < x < x_0 + 2\pi$$

gültig ist.

Da die Konstanten c'' und C'' in diesem Fall durch

$$c'' = C'' = \lim_{\varrho = \infty} \frac{e^{z(x_0 + 2\pi - x_0 - 2\pi)}}{e^{-2\pi z} - 1} = -1 \qquad (|\cos \tau| > 0)$$

gegeben sind, und der unter dem Limes stehende Ausdruck für alle

$$-\frac{\pi}{2} \leq \tau < +\frac{\pi}{2}$$

endlich bleibt, so erhält man nach (δ_1) und (ε_1) als Wert der Fourierschen Reihe an den beiden Gültigkeitsgrenzen x_0 und $x_0 + 2\pi$:

$$\frac{f(x_0+0) + f(x_0 + 2\pi - 0)}{2}, \tag{8}$$

übrigens ein bekanntes Resultat.

2. In der Theorie der Wärmeleitung tritt mehrfach diejenige unharmonische trigonometrische Reihe auf, deren Parameter die Wurzeln der Gleichung

$$(\omega\,\omega_1 - y^2)\sin a\,y + (\omega + \omega_1)\,y\cos a\,y = 0 \tag{9}$$

sind. Die Substitution

$$y\,i = z$$

führt diese Gleichung in die folgende über:

$$F(z) = e^{az}(z+\omega)(z+\omega_1) - e^{-az}(z-\omega)(z-\omega_1) = 0, \tag{9*}$$

und die Annahme

$$\varphi(z) = -e^{-az}(z-\omega)(z-\omega_1), \quad \chi(z) = e^{az}(z+\omega)(z+\omega_1)$$

erfüllt die Bedingung E). Bedeutet f im Intervalle $(x_0, x_0 + 2a)$ eine Funktion mit beschränkter Schwankung, so ergibt sich aus (γ) nach längerer, jedoch leichter Rechnung die Entwicklung:

$$\begin{aligned} \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} &= \frac{\omega\,\omega_1}{2\,(a\,\omega\,\omega_1 + \omega + \omega_1)} \int\limits_{x_0}^{x_0+2a} f(\mu)\,d\mu \\ &- \sum_{\nu} \frac{2\,(\omega+\omega_1)\,\nu}{(\omega+\omega_1)\sin 2\,a\,\nu - 2\,(\omega+\omega_1)\,a\,\nu - 4\,\nu\sin^2 a\,\nu} \\ &\cdot \int\limits_{x_0}^{x_0+2a} f(\mu)\cos\nu(x-\mu)\,d\mu, \end{aligned} \tag{10}$$

in welcher sich die Summation über alle positiven Wurzeln ν der transzendenten Gleichung (9) erstreckt, und die für alle

$$x_0 < x < x_0 + 2a$$

gültig ist.

Die Konstanten c'' und C'' sind in diesem Falle durch

$$c'' = C'' = \lim_{\varrho = \infty} \frac{1}{e^{-2az} - \frac{(z+\omega)(z+\omega_1)}{(z-\omega)(z-\omega_1)}} = -1 \quad (|\cos\tau| > 0)$$

gegeben, und der unter dem Limes stehende Ausdruck bleibt wieder für alle

$$-\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2}$$

endlich; die erhaltene Reihenentwicklung stellt also nach (δ_1) und (ε_1) an den beiden Gültigkeitsgrenzen x_0 und $x_0 + 2a$ die Funktion

$$(11) \qquad \frac{f(x_0+0) + f(x_0 + 2a - 0)}{2}$$

dar, wie die Fouriersche Reihe, welche man aus ihr durch Grenzübergang zu $\omega = \omega_1 = \infty$ und die Spezialisierung $a = \pi$ erhält.

Dieses Resultat gilt aber nicht mehr für den Grenzfall:

$$\omega_1 = \infty, \quad \omega \text{ endliche Zahl},$$

in welchem die gegebene transzendente Gleichung

$$(12) \qquad \omega \sin a y + y \cos a y = 0$$

und die entsprechende Reihe

$$(13) \frac{\omega}{2(1+a\omega)} \int_{x_0}^{x_0+2a} f(\mu)\, d\mu + \sum_{\nu} \frac{2\nu}{2a\nu - \sin 2a\nu} \int_{x_0}^{x_0+2a} f(\mu) \cos\nu(x-\mu)\, d\mu\,[1]$$

lautet.

[1]) Die Summation ist hier wieder bloß über die positiven Wurzeln ν der transzendenten Gleichung (12) zu erstrecken.

In diesem Fall hat man nämlich:

$$c'' = C'' = \lim_{\varrho=\infty}\left\{\lim_{\omega_1=\infty} \frac{1}{e^{-2az} - \dfrac{(z+\omega)(z+\omega_1)}{(z-\omega)(z-\omega_1)}}\right\} = +1$$

$$(|\cos\tau| > 0);$$

die Reihe (13) stellt daher an der unteren Grenze x_0 die Funktion:

$$\frac{f(x_0+0) - f(x_0+2a-0)}{2}, \tag{14}$$

an der oberen Grenze $x_0 + 2a$ die Funktion

$$-\frac{f(x_0+0) - f(x_0+2a-0)}{2} \tag{15}$$

dar.



Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 6. Abhandlung

Geodätische Netze auf Rotationsflächen

von

M. Lagally

Vorgelegt am 1. Mai 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf Kurvennetze, die von zwei Scharen geodätischer Linien auf einer Rotationsfläche gebildet werden. Die sämtlichen Kurven einer Schar sollen durch Rotation auseinander hervorgehen, während die eine Schar durch Spiegelung an der Ebene eines Meridians in die andere übergeht.

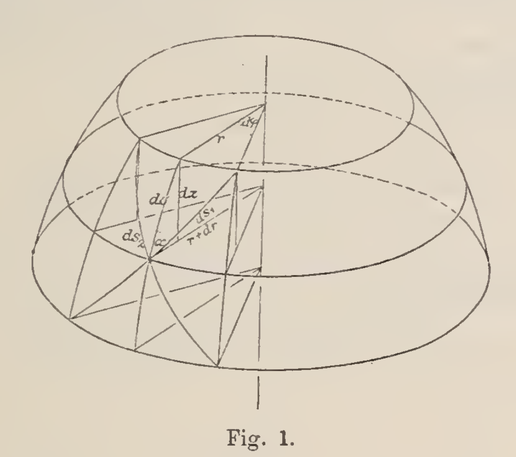


Fig. 1.

Als veränderlicher Parameter der Meridiane sei der Zentriwinkel φ eingeführt. Die Gleichung eines Meridians in Parameterform sei:

$$z = z(w), \quad r = r(w).$$

Bringt man es durch geeignete Wahl des Parameters w dahin, daß die geodätischen Linien Diagonalkurven in dem von den Meridianen und Parallelkreisen gebildeten orthogo-

element der geodätischen Linien eines vollständigen Systems von Biegungsnetzen als Funktion eines Parameters und zweier Konstanten darstellt.

Setzt man

$$ds = \frac{r\sqrt{dr^2 + dz^2}}{\sqrt{r^2 - k^2}} = \frac{r_0\sqrt{dr_0^2 + dz_0^2}}{\sqrt{r_0^2 - k_0^2}} = F(r_0)\, dr_0$$

$$= F\left(r\sqrt{\frac{k_0 c}{k}}\right)\sqrt{\frac{k_0 c}{k}}\, dr,$$

so ist die Meridiankurve des ganzen in einander verbiegbaren Systems geodätischer Netze:

$$z = \int\sqrt{\frac{r^2 - k^2}{r^2}\frac{k_0 c}{k} F^2\left(\sqrt{\frac{k_0 c}{k}}\, r\right) - 1}\quad dr.$$

Dabei kann die Funktion F entweder willkürlich angenommen oder aus einem Ausgangsnetz berechnet sein.

Als Beispiel sei erwähnt, daß die Funktion $F = a =$ const auf Netze mit den Meridiankurven

$$z = \int\sqrt{r^2\left(a^2 c\cdot\frac{k_0}{k} - 1\right) - a^2 k k_0 c}\,\frac{dr}{r}$$

führt; bei ihnen ist die Bogenlänge der geodätischen Linien, von einem geeigneten Punkt aus gerechnet, dem Radiusvektor proportional; einfach wird ferner die Rechnung mit der Funktion

$$F = a\sqrt{\frac{k_0 c}{k}}\, r,$$

die auf die Meridiankurven

$$z = \frac{k_0 c}{k}\, a\int\sqrt{r^2 - k^2}\, dr$$

führt, die leicht diskutierbar sind.

Zwei wichtige Spezialfälle der Verbiegung. Wie schon erwähnt, verläuft nach dem Clairautschen Satz jede geodätische Linie unseres Rotationsnetzes in einem Gebiet der

Fläche, in welchem die Radien der Parallelkreise eine gewisse Größe, eben die Konstante der Clairautschen Gleichung, nicht unterschreiten. Ist k_0 der Radius dieses Endkreises auf dem Ausgangsnetz, so wird er bei der Verbiegung in einen Radius

$$\bar{r} = k_0 \sqrt{\frac{k}{k_0 c}} = \sqrt{\frac{k k_0}{c}}$$

übergehen, also nur dann in den Endradius k des Biegungsnetzes, wenn

$$\sqrt{\frac{k k_0}{c}} = k, \quad \text{also} \quad k c = k_0$$

ist.

Für $c = 1$ folgt $k = k_0$; d. h. ein bis an den Endkreis reichendes geodätisches Rotationsnetz ist starr, wenn man nicht unter Verzicht auf einfache Überdeckung einen etwa längs eines Meridians verlaufenden Schnitt führt; jeder zwischen zwei Meridianen mit dem Zentriwinkel φ_0 liegende Streifen des Netzes kann in einen anderen mit dem Zentriwinkel $\varphi = c\varphi_0$ verbogen werden; hierbei ist

$$c \gtrless 1 \text{ (nicht} = 1); \quad k = \frac{k_0}{c}; \quad \bar{r} = k.$$

Es läßt sich zeigen, daß in diesem 1. Fall der Verbiegung des Netzes auch die Fläche, auf der es liegt, unter Konstanterhaltung des Krümmungsmaßes mitverbogen wird.

Das Krümmungsmaß der Rotationsfläche, auf der das geodätische Netz liegt, ist:

$$K = \frac{z' z''}{r(1 + z'^2)^2};$$

das der Ausgangsfläche:

$$K_0 = \frac{z_0' z_0''}{r_0(1 + z_0'^2)^2}.$$

Dabei bedeuten die Striche (') bei z Differentiationen nach r, bei z_0 nach r_0. Drückt man z und r mittels der Formeln (3) durch z_0 und r_0 aus, und setzt man zur Abkürzung:

$$M = \frac{r_0^2 - k k_0 c}{r_0^2 - k_0^2}, \quad M' = \frac{dM}{dr_0},$$

so ist: $$K = \frac{1}{M} K_0 + \frac{M'}{2 M^2 r_0 (1 + z_0'^2)}.$$

Dieser Ausdruck für das Krümmungsmaß der Flächen, auf denen die Biegungsnetze aufgelegt werden können, vereinfacht sich bei besonderer Wahl von M. Setzt man nämlich die Wurzeln des Zählers und Nenners von M einander gleich, also

$$k c = k_0$$

so folgt:

$$M = 1, \quad M' = 0, \quad K = K_0,$$

d. h. die Verbiegung des Netzes ist verbunden mit flächentreuer Abwicklung der Fläche, wenn der Endkreis des Ausgangsnetzes in den Endkreis des neuen Netzes verbogen wird.

Als zweiter Fall sei die Verbiegung eines geodätischen Rotationsnetzes ohne Änderung der Zentriwinkel betrachtet, die der Bedingung $c = 1$ entspricht. Der dem Endradius k_0 des Ausgangsnetzes entsprechende Radius wird nach (2)

$$\bar{r} = k_0 \sqrt{\frac{k}{k_0}} = \sqrt{k k_0}$$

der Winkel $\bar{a}$, unter dem das neue Netz mit dem Endradius k diesen Kreis mit dem Radius $r = \sqrt{k k_0}$ schneidet, ergibt sich aus

$$\bar{r} \sin \bar{a} = k$$

$$\sin \bar{a} = \frac{k}{r} = \frac{k}{\sqrt{k k_0}} = \sqrt{\frac{k}{k_0}};$$

der neue Endradius k geht aus einem Radius $\sqrt{k k_0}$ des Ausgangsnetzes hervor.

Nun ergeben sich zwei Möglichkeiten:

a) $k > k_0$, also auch $k > \sqrt{k k_0} > k_0$, $\sin a > 1$, a imaginär.

b) $k < k_0$, also auch $k < \sqrt{k k_0} < k_0$, $\sin a < 1$, a reell.

Im Fall (a) wird das ganze Netz gedehnt; jeder Parallelkreis geht in einem $\sqrt{\frac{k}{k_0}}$ mal größeren über. Die zwischen den Kreisen k_0 und $\sqrt{k k_0}$

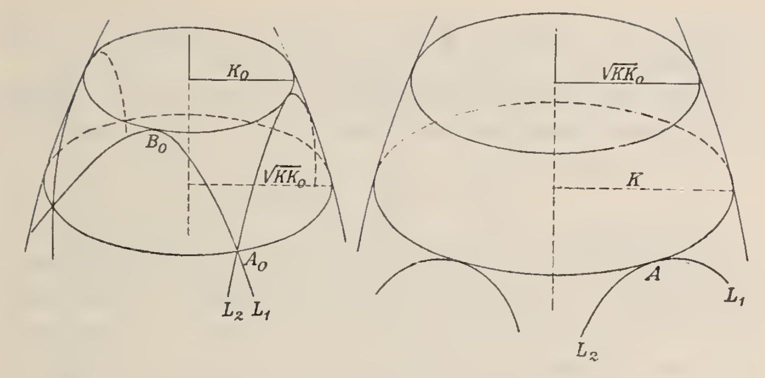


Fig. 3.[1])

liegende Zone geht in eine Zone mit den Begrenzungskreisen $\sqrt{k k_0}$ und k über, in der es bloß imaginäre geodätische Linien des betrachteten Netzes gibt. Am neuen Endkreis fügen sich je zwei geodätische Linien L_1 und L_2, die sich vorher bei A_0 unter dem Winkel 2α geschnitten haten, zu einer einzigen zusammen, welche in dem gemeinsamen Punkt A den neuen Endkreis berührt. Das ermöglicht, das Verschwinden der in der Zone zwischen k_0 und $\sqrt{k k_0}$ liegenden geodätischen Linienstücke, welche die Rechnung bei der Dehnung des Netzes imaginär werden läßt, geometrisch anders zu deuten. Denkt man sich in der fraglichen Zone alle Knotenpunkte des Netzes gelöst und faßt die geodätischen Linien als Streifen von Flächenelementen auf, so kann man das verschwindende Stück $A_0 B_0$ der Linie L_1 auf dem gedehnten Netz von A aus auf die Linie L_2 auflegen, welche dort die Fortsetzung von L_1 bildet. Es wird also dann eine Zone des Dehnungsnetzes noch von einem zweiten Netz geodätischer Linien überdeckt, welches nicht durch eine punktweise Transformation aus dem Ausgangsnetz entstanden ist.

Der Fall (b), ($k < k_0$) ist nichts anderes als die Umkehrung von (a). Das ganze Netz wird zusammengedrückt; jeder Radius

[1]) In Fig. 3 und 2 sind die Buchstaben K und K_0 durch k und k_0 zu ersetzen.

nimmt ab im Verhältnis $\sqrt{\frac{k}{k_0}}$. Aus dem Endkreis k_0 geht ein Kreis mit dem Radius $\sqrt{k k_0}$ hervor, der von den geodätischen Linien unter reellen Winkel

$$\left(\sin\alpha = \sqrt{\frac{k}{k_0}} < 1\right)$$

geschnitten wird. Jede geodätische Linie des Ausgangsnetzes zerfällt hiebei in zwei, die sich an der früheren Berührungsstelle mit dem Endkreis unter dem Winkel 2α schneiden. Der neue Endkreis $k < \sqrt{k k_0}$ geht aus einem Kreis $\sqrt{k k_0} < k_0$ hervor. In der zwischen k und $\sqrt{k k_0}$ liegenden Zone existiert eine reelle Fortsetzung des Biegungsnetzes, der auf der Ausgangsfläche nur imaginäre geodätische Linienstücke entsprechen.

Ein aus Lamellen modelliertes Netz ist folglich starr; durchschneidet man jedoch jede geodätische Linie im Berührpunkt mit dem Endkreis, so kann man das Netz beliebig zusammendrücken. Schneidet man anderseits eine Zone bis zu einem Parallelkreis ab oder löst bis dahin alle Knoten, so kann man das Netz auch soweit dehnen, bis dieser Parallelkreis Endkreis wird.

Ein auf einer hyperbolisch gekrümmten Fläche liegendes Netz, dessen sämtliche Linien den Kehlkreis schneiden, das also keinen reellen Endkreis hat, kann ohne Zerschneidung verbogen werden; und zwar kann es beliebig zusammengedrückt, aber auch soweit gedehnt werden, bis der Kehlkreis Endkreis wird.

Ein auf einem Kreiszylinder liegendes Netz kann auf jeden Kreiszylinder als ganzes aufgelegt werden.

Die allgemeinste Verbiegung eines Netzes kann man nun in zwei Schritte zerlegen: Hat man es unter Konstanterhaltung des Krümmungsmaßes so weit verbogen, daß c den gewünschten Wert hat, so ist nur noch eine Verbiegung unter Konstanterhaltung des Zentriwinkels notwendig, um auch k auf den Endwert zu bringen.

Beispiel.

Es sollen alle geodätischen Rotationsnetze aufgesucht werden, die aus dem von sämtlichen Tangenten eines Kreises gebildeten ebenen Netze durch Verbiegung hervorgehen.

Die Ebene des Kreises sei $z_0 = 0$; sein Radius k_0 ist Endradius des Ausgangsnetzes.

Die Gleichung aller Biegungsnetze ergibt sich aus:

$$\left(\frac{dz}{dr_0}\right)^2 = \frac{r_0^2 - k k_0 c}{r_0^2 - k_0^2} - \frac{k}{k_0 c}.$$

Da

$$r_0 = \sqrt{\frac{k_0 c}{k}}\, r, \quad d r_0 = \sqrt{\frac{k_0 c}{k}}\, d r$$

ist, ist die Meridiankurve des allgemeinsten Biegungsnetzes:

$$(4) \qquad z = \int \sqrt{\frac{r^2 (c^2 k_0 - c k) - (k_0 k^2 c^2 - k_0 k^2)}{r^2 c k - k_0 k^2}}\, d r.$$

Zwei spezielle Fälle verdienen Erwähnung, obwohl sie auf bekannte, zum Teil triviale Tatsachen führen: Bei Verbiegungen des ganzen geschlossenen Netzes ist $c = 1$; das Integral z läßt sich dann durch gewöhnliche Funktionen ausdrücken. Man erhält:

$$\frac{r^2}{k k_0} - \frac{z^2}{(k_0 - k)\, k_0} - 1 = 0,$$

also ∞^1 einschalige Hyperboloide, deren Kehlkreise $\sqrt{k k_0}$ zum Radius haben und folglich aus dem Endkreis des Ausgangsnetzes hervorgehen. Der Winkel λ, unter welchem die Erzeugenden den Kehlkreis schneiden, ist bestimmt durch:

$$\operatorname{tg}^2 \lambda = \frac{k_0 - k}{k}$$

$$\cos \lambda = \sqrt{\frac{k}{k_0}}.$$

Also hat das von den beiden Scharen von Erzeugenden

gebildete geodätische Netz dieselbe Konstante der Clairautschen Gleichung

$$\bar{r} \sin \alpha = \bar{r} \cos \lambda = \sqrt{k k_0} \sqrt{\frac{k}{k_0}} = k$$

wie unser Biegungsnetz und ist folglich mit ihm identisch.

Weiter seien die Verbiegungen betrachtet, bei denen der Endkreis der Länge nach erhalten bleibt, also, wie oben gezeigt, das Krümmungsmaß der Fläche erhalten bleibt. Die Bedingung $k c = k_0$ führt auf die Gleichung:

$$\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = c^2 - 1.$$

Es ergeben sich die Kegel:

$$z = r\sqrt{c^2 - 1},$$

deren Öffnungswinkel durch

$$\operatorname{cotg} \varepsilon = \sqrt{c^2 - 1}, \quad \cos \varepsilon = \frac{1}{c}$$

bestimmt ist, also in einfacher Weise mit der Änderung des Zentriwinkels zusammenhängt. Da sich zu jedem Konstantenpaar c und k eine Konstante $k_0 = c k$ angeben läßt, kann man jedes geodätische Rotationsnetz eines Kreiskegels als Biegungsnetz eines ebenen Netzes auffassen.

Nach den vorausgehenden allgemeinen Entwicklungen ergeben sich nun durch Verbiegung dieser Kegelnetze bei konstantem Zentriwinkel wieder die allgemeinsten Biegungsnetze des ebenen Netzes. Es sei

$$z_0 = r_0 \sqrt{c^2 - 1}$$

die Gleichung des Kegels; $k_0' = \frac{k_0}{c}$ die Clairautsche Konstante des auf ihm betrachteten Netzes. Dann ist die Differentialgleichung aller Biegungsnetze bei Konstanterhaltung des Zentriwinkels:

$$\left(\frac{dz}{dr_0}\right)^2 = (1 + c^2 - 1)\frac{r_0^2 - k k_0'}{r_0^2 - k_0'^2} - \frac{k}{k_0'},$$

oder wenn man r_0 und k_0' durch ihre Werte ersetzt:

$$\text{(4a)} \qquad \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \frac{r^2(k_0 c^2 - k c) - k^2 k_0 (c^2 - 1)}{r^2 k c - k^2 k_0},$$

woraus sich durch Integration in der Tat wieder die Gleichung (4) ergibt.

Die Gleichung (4 a) hat drei wesentliche Konstante; dividiert man Zähler und Nenner mit kc und ändert die Bezeichnung, so ergibt sich:

$$\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \frac{r^2\left(\frac{c k_0}{k} - 1\right) - \left(k k_0 c - \frac{k k_0}{c}\right)}{r^2 - \frac{k k_0}{c}} = \frac{r^2(A-1) - (C-B)}{r^2 - B}.$$

Die Gleichungen

$$A = \frac{c k_0}{k}, \quad B = \frac{k k_0}{c}, \quad C = k k_0 c$$

lassen sich nach k, k_0, c auflösen und zwar (bis auf das Vorzeichen) eindeutig:

$$k = \sqrt{\frac{C}{A}}, \quad k_0 = \sqrt{AB}, \quad c = \sqrt{\frac{C}{B}}.$$

Daraus folgt, daß unter den ∞^1 geodätischen Rotationsnetzen, die auf einer Fläche F liegen, ein einziges aus einem Kegel- oder ebenen Netz durch Verbiegung hervorgeht, und zwar, da nicht nur k, sondern auch k_0 und c eindeutig bestimmt sind, aus einem ganz bestimmten ebenen Netz.

Bevor ich die Gestalt der Flächen F diskutiere, will ich erwähnen, daß eine kurze Rechnung ihr Krümmungsmaß in der einfachen Form

$$K = \frac{C - AB}{(r^2 A - C)^2}$$

ergibt. Es hat dasselbe Vorzeichen wie der Zähler, und zwar,

da r nur im Nenner vorkommt, auf der ganzen Fläche, auch wenn diese aus getrennten Teilen besteht, das gleiche.

Die Flächen F sind transzendent; sie sind aus Schalen und Spindeln zusammengesetzt, die sich längs der Z Achse periodisch wiederholen. Um die Realitätsverhältnisse zu untersuchen, bringe ich die Gleichung (4a) in folgende Form:

$$\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \left(\frac{ck_0}{k} - 1\right) \frac{r^2 - \dfrac{kk_0\left(c - \dfrac{1}{c}\right)}{\dfrac{ck_0}{k} - 1}}{r^2 - \dfrac{kk_0}{c}}.$$

Wenn r von 0 bis ∞ wächst und dabei einen Wurzelwert des Zählers oder Nenners durchwandert, ändert die rechte Seite ihr Vorzeichen; mithin trennt jeder solche Wurzelwert ein reelles und ein imaginäres Gebiet der Meridiankurve. Da die Wurzeln des Nenners immer reell sind (k, k_0 und c sind positiv), die des Zählers aber auch imaginär sein können, können zwei oder drei solche Gebiete zwischen 0 und $+\infty$ liegen. Für die Realität der Zählerwurzeln und das Vorzeichen der rechten Seite sind also nur die Vorzeichen von $c - \frac{1}{c}$ und $\frac{ck_0}{k} - 1$ maßgebend.

$$c - \frac{1}{c} \gtrless 0 \text{ führt auf } c \gtrless 1$$

$$\frac{ck_0}{k} - 1 \gtrless 0 \text{ führt auf } k \lessgtr ck_0.$$

Die vier möglichen Fälle sind nun in folgender Tabelle zusammengestellt, in der das Vorzeichen des konstanten Faktors $\frac{ck_0}{k} - 1$ und die Realität der Zählerwurzeln angegeben ist:

(5)

I.	$c > 1$	$k > ck_0 > k_0$	Faktor < 0	Zählerwurzeln imaginär
II.	$c > 1$	$k < ck_0 [k \gtrless k_0]$	Faktor > 0	„ reell
III.	$c < 1$	$k > ck_0 [k \gtrless k_0]$	Faktor < 0	„ reell
IV.	$c < 1$	$k < ck_0 < k_0$	Faktor > 0	„ imaginär.

Die Fälle II und III zerfallen noch in je zwei Unterfälle a und b, je nach dem die Zähler- oder Nennerwurzeln den größeren Wert haben.

Da $\left(\frac{dz}{dr}\right)^2$ an den Nullstellen des Zählers 0, an denen des Nenners ∞ wird, endet die Meridiankurve an letzterer Stelle mit einer vertikalen Tangente, an ersterer mit einer horizontalen, welche für die Fläche eine Singularität zur Folge hat. Durch Bildung von $\frac{d^2 z}{d r^2}$ erkennt man, daß Wendepunkte fehlen außer an der Stelle $r = 0$, wo sich ein (reeller oder imaginärer) konischer Punkt der Fläche einstellt. Asymptoten in der Richtung $\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \frac{c k_0}{k} - 1$ sind in Fall II. und IV. reell.

Demnach ergeben sich für die Gestalt der Meridiankurve folgende sechs Typen. (Z bedeutet die Nullstellen des Zählers, N die des Nenners.)

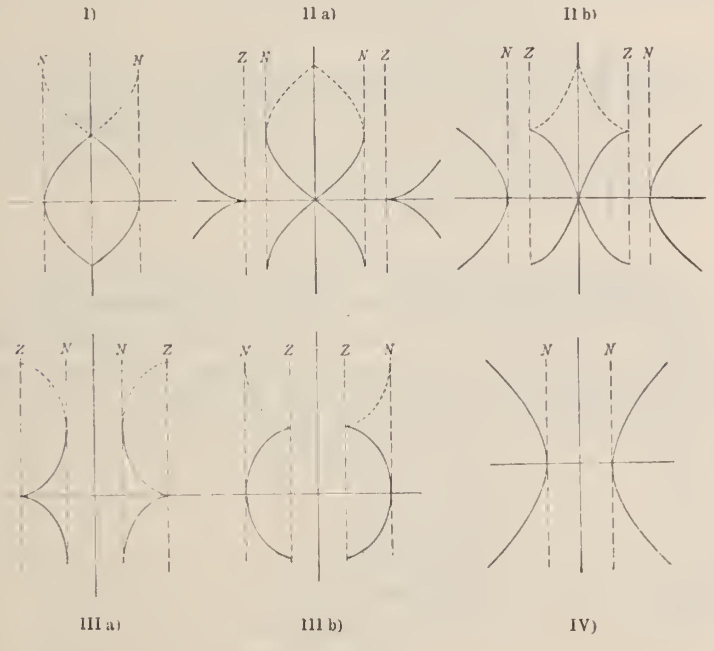


Fig. 4.

Die Frage, ob der absolute Wert der Nennerwurzel $\lessgtr$ ist als der der Zählerwurzel, ist durch folgende Ungleichung ausgedrückt:

$$\frac{k k_0 \left(c - \frac{1}{c}\right)}{\frac{c k_0}{k} - 1} \gtrless \frac{k k_0}{c}.$$

Daraus folgt:

$$\text{(6a)} \qquad \begin{cases} c k \gtrless k_0, & \text{wenn } c > 1 \text{ ist,} \\ c k \lessgtr k_0, & \text{wenn } c < 1 \text{ ist.} \end{cases}$$

Dem Übergangsfall $ck = k_0$ entsprechen die Rotationskegel.

Um nun Aufschluß über die Lage des Endkreises zu erhalten, vergleiche ich seinen Radius k mit den Wurzelwerten des Zählers und Nenners; die Bedingung:

$$\text{(6b)} \quad \begin{aligned} &1)\ k \gtrless \sqrt{\frac{k k_0 \left(c - \frac{1}{c}\right)}{\frac{c k_0}{k} - 1}} \text{ führt auf } \begin{cases} c k \lessgtr k_0, & \text{wenn } c > 1 \text{ ist.} \\ c k \gtrless k_0, & \text{wenn } c < 1 \text{ ist.} \end{cases} \\ &2)\ k \gtrless \sqrt{\frac{k k_0}{c}} \text{ führt auf } c k \gtrless k_0. \end{aligned}$$

Aus diesen Ungleichungen und aus den Ungleichungen (5) ist die Lage des Endkreises auf allen sechs Flächentypen ersichtlich. Bezeichnet man, wie auch in den Figuren, die Zählerwurzel mit Z, die Nennerwurzel mit N, so gibt die folgende Tabelle die sämtlichen Lagebeziehungen.

I)	$N < k$, Z imaginär.
II a)	$N < k < Z$
II b)	$Z < k < N$
III a)	$k < N < Z$
III b)	$Z < N < k$
IV)	$k < N$, Z imaginär.

Die allgemeine Gleichung aller geodätischen Netze auf der durch (4) dargestellten Fläche ergibt sich durch Integration der Clairautschen Gleichung

$$r \sin a = p,$$

wo p eine willkürliche Konstante ist. Führt man

$$\sin a = \frac{r\, d\varphi}{\sqrt{r^2\, d\varphi^2 + d r^2 + d z^2}}$$

ein, so erhält man die Differentialgleichung aller geodätischen Netze der Fläche:

$$\left(\frac{d\varphi}{d r}\right)^2 = \frac{p^2 k_0 c^2 (r^2 - k^2)}{r^2 (r^2 - p^2)(r^2 k c - k^2 k_0)}$$

Diese Gleichung vereinfacht sich wesentlich für $p = k$, also für den Fall des einen, bisher betrachteten Netzes, welches in die Ebene ausbreitbar ist:

$$\left(\frac{d\varphi}{d r}\right)^2 = \frac{k k_0 c}{r^2 \left(r^2 - \frac{k k_0}{c}\right)},$$

daraus folgt durch Integration bei geeigneter Wahl der additiven Konstanten die Gleichung einer Kurve des Netzes und zugleich ihre Projektion in die Ebene $z = 0$ in folgender Form:

$$r \cos \frac{\varphi}{c} = \sqrt{\frac{k k_0}{c}}.$$

Für $c = 1$ bedeutet diese Kurve die geradlinigen Erzeugendes des Hyperboloids. Ist $c = \frac{m}{n}$, wo m und n ganze Zahlen sind, so schließt sie sich nach m Umläufen. In allen Fällen erstreckt sie sich, in symmetrischer Wiederholung, ins Unendliche. Ihr kleinster Radiusvektor, mithin der Radius der Enveloppe aller Netzkurven, ist $\sqrt{\frac{k k_0}{c}}$, also der Wert der Nennerwurzel in der Differentialgleichung der Fläche.

Es sind also die Spindeln der Flächen I, IIa, IIb, IIIb von reellen Kurven des Netzes vollständig frei; vollständig

bedeckt sind die Schalen von IIa, IIb, IIIa, IV. Alle diese Netze schneiden den Kehlkreis der Schale unter reellem, von 0 verschiedenem Winkel, keines reicht an den Endkreis heran mit Ausnahme des ebenen Ausgangsnetzes und der durch den Übergangsfall $k_0 = ck$ charakterisierten Kegelnetze.

Noch ein bemerkenswerter Satz sei erwähnt. Die ∞^1 Hyperboloide und die auf ihnen liegenden Netze von Erzeugenden, die aus demselben ebenen Netz hervorgehen, sind bekanntlich affin. Ebenso kann auch jedes der allgemeineren Netze in ∞^1 affine Netze verbogen werden. Dabei sind, wie sich leicht zeigen läßt, die Biegungsnetze der ebenen Netze die einzigen geodätischen Rotationsnetze, bei denen die Möglichkeit einer solchen punktweisen affinen Deformation vorhanden ist.

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 7. Abhandlung

Eine Bemerkung zum Michelsonschen Versuch

von

J. Lüroth

Vorgelegt am 12. Juni 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Durch den Versuch, von dem hier die Rede ist, wollte Michelson die relative Bewegung der Erde gegen den Äther nachweisen. Der Effekt, der unter der Annahme die Erde bewege sich gegen den Äther berechnet war, blieb bekanntlich aus. Der Schluß, den man hieraus ziehen konnte, daß die Erde den in ihrer Nähe befindlichen Äther mit sich fortführe, brachte andere Schwierigkeiten, so daß Lorentz die Hypothese aufstellte, daß alle Körper durch die Bewegung, in deren Richtung, um den $\frac{1}{2}10^{-8}$ten Teil ihrer Länge verkürzt würden. In neuester Zeit ist die Theorie des Versuchs durch Kohl einer Kritik unterzogen worden, die seine Beweiskraft zweifelhaft gemacht hat. Es kam mir nun vor einiger Zeit der Gedanke, ob nicht vielleicht die durch die Umdrehungs- und Umlaufsbewegung der Erde hervorgerufenen Zentrifugalkräfte eine Änderung der Dimensionen des Michelsonschen Apparates zur Folge hätten, die für das Resultat des Versuchs von Einfluß wäre. Ich will im folgenden über die Rechnungen berichten, die ich darüber angestellt habe. Da es sich um ein verwickelteres Problem der relativen Bewegung eines elastischen Körpers handelt, möchte ich etwas weiter ausholen.

§ 1.

Ein System von materiellen Punkten sei auf ein im Raum ruhendes, rechtwinkeliges Koordinatensystem S' bezogen. Es seien m die Masse, x', y', z', die Koordinaten eines Punktes P des Systems und X', Y', Z' die Komponenten der auf ihn wirkenden äußeren Kraft. Die Gleichungen der Bewegung des Systems können dann in die Gleichung zusammengefaßt werden

$$1)\qquad \sum\left[\left(m\frac{d^2x'}{dt^2}-X'\right)\delta x'+\left(m\frac{d^2y'}{dt^2}-Y'\right)\delta y' + \left(m\frac{d^2z'}{dt^2}-Z'\right)\delta z'\right]=0$$

in der die Summe sich über alle Punkte des Systems erstreckt und $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta x'$ die Komponenten einer, mit den Bedingungen verträglichen, virtuellen Verschiebung des Punktes P sind.

Sei S ein zweites rechtwinkeliges Koordinatensystem, das gegen das System S' in Bewegung begriffen ist. Es seien ξ, η, ζ die Koordinaten des Punktes P, die mit den x', y', z' durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x' &= a + \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta \\ y' &= a_1 + \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta \\ z' &= a_2 + \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta \end{aligned}$$

verbunden sind, in denen die Koeffizienten Funktionen der Zeit sind. Trägt man in die Gleichung 1) ein und ersetzt die Größen $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ durch andere, die mit jenen durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \delta x' &= \alpha\,\delta\xi + \beta\,\delta\eta + \gamma\,\delta\zeta \\ \delta y' &= \alpha_1\delta\xi + \beta_1\delta\eta + \gamma_1\delta\zeta \\ \delta z' &= \alpha_2\delta\xi + \beta_2\delta\eta + \gamma_2\delta\zeta \end{aligned}$$

zusammenhängen, so erhält man eine Gleichung:

$$2)\qquad \sum\left[\left(m\frac{d^2\xi}{dt^2}-X+F\right)\delta\xi+\left(m\frac{d^2\eta}{dt^2}-Y+G\right)\delta\eta + \left(m\frac{d^2\zeta}{dt^2}-Z+H\right)\delta\zeta\right]=0.$$

Hier sind die $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ die in S genommenen Komponenten einer virtuellen Verschiebung von P, die X, Y, Z die Komponenten in S der Kraft, die in S' die Komponenten X', Y', Z' hatte, F aber ist ein Ausdruck, den man mit Anwendung der Abkürzung

$$(l\,m) = l\,m + l_1\,m_1 + l_2\,m_2$$

schreiben kann:

$$F = m\Big\{(\alpha\,\alpha'') + (\alpha\,\alpha'')\,\xi + (\alpha\,\beta'')\,\eta + (\alpha\,\gamma'')\,\zeta$$

$$+ 2\,(\alpha\,\alpha')\frac{d\,\xi}{d\,t} + 2\,(\alpha\,\beta')\frac{d\,\eta}{d\,t} + 2\,(\alpha\,\gamma')\frac{d\,\zeta}{d\,t}\Big\}. \tag{3}$$

Man findet G, H, indem man in den Klammersymbolen $(\alpha\,\alpha'')\ldots(\alpha\,\gamma')$ den ersten Buchstaben α durch β bez. γ ersetzt. Dabei bezeichnen die Akzente einfache oder doppelte Differentiation nach der Zeit. Man kann also, wie bekannt, die relative Bewegung des Systems gegen S so berechnen als ob dieses System ruhte, wenn man zu den äußeren Kräften noch an jeden Punkt, die Kräfte mit den Komponenten $-F$, $-G$, $-H$ beifügt.

Wendet man das an auf die Theorie eines festen elastischen Körpers, so sieht man, daß in den Formeln, wie sie z. B. Kirchhoff in der 11. und 27. seiner Vorlesungen über mathematische Physik gibt, nur für die dort auftretenden X, Y, Z, zu setzen hat $X - \varrho F$, $Y - \varrho G$, $Z - \varrho H$, wo ϱ die Dichte ist, während alle anderen Formeln unverändert bleiben. Doch brauchen wir hier diese allgemeinen Formeln nicht, wir reichen mit einer einfacheren Betrachtung aus.

§ 2.

Das Punktsystem sei ein Teil eines zylindrischen elastischen Stabs, der sich parallel der ξ-Achse erstreckt. Ein Schnitt durch den Stab senkrecht zur ξ-Achse heiße ein Querschnitt. Der Stab sei im Ursprung des Systems S, in einem Orte mit der geographischen Breite φ horizontal befestigt. Die Richtung des Stabs, oder der ξ-Achse, bilde mit den südlichen Meridian das Azimut A. Auf keinen Punkt des Stabs, im Innern oder auf der Oberfläche, sollen äußere Kräfte wirken, wobei wir von dem Luftdruck und der Schwere absehen, da deren Komponente längs der Stabrichtung Null ist, und die durch die Schwere hervorgerufene Biegung durch Vergrößerung des Quer-

schnittes beliebig klein gemacht werden kann. Die Schwerpunkte aller Querschnitte mögen auf der ξ-Achse liegen. Wir wollen die Gleichung (2) auf einen Teil des Stabs anwenden, der von zwei Querschnitten begrenzt ist. Dabei reicht es hin, wenn wir die einzige Gleichung betrachten, die wir erhalten indem wir $\delta\xi$ konstant, und $\delta\eta = \delta\zeta$ gleich Null setzen. So entsteht, weil $(\alpha\alpha')$, $\sum m\eta$, $\sum m\zeta$ Null sind,

$$4) \qquad \sum\left(m\frac{d^2\xi}{dt^2} - X - m(\alpha\alpha'') - m(\alpha\alpha'')\xi\right) = 0,$$

wo sich die Summe über alle Punkte des betrachteten Stabteils erstreckt. Für X ist dabei die in der Richtung der ξ-Achse wirkende elastische Kraft zu setzen, da dies die einzige äußere Kraft ist die an dem Stabteil wirkt.

Als die begrenzenden Querschnitte wählen wir nun die beiden unendlich nahen mit den Abszissen ξ und $\xi + d\xi$. Ist ξ gleich $x + u$, und u die Verschiebung, die alle Punkte des Querschnitts mit der Abszisse ξ erlitten haben, so ist, nach den in der Elastizitätstheorie üblichen Annahmen, die an dem ersten Querschnitt wirkende elastische Zugkraft $-Eq\frac{\partial u}{\partial x}$, und die am zweiten Querschnitt wirkende $Eq\frac{\partial(u+du)}{\partial x}$. Hiebei bezeichnet q den Flächeninhalt des Querschnitts und E den Elastizitätsmodul. Wir machen dabei die erlaubte Annahme (vgl. Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper, Seite 356), daß die elastische Zugkraft in jedem Punkt des Querschnitts die gleiche ist, welche Annahme keinen wesentlichen Fehler mit sich bringen wird. Ist ferner ϱ die überall gleiche Dichte, also $\varrho q\,dx$ die Maße des Stabteils, so ergibt die Gleichung (4):

$$-Eq\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q\varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q\varrho(\alpha\alpha'') - q\varrho x(\alpha\alpha'') = 0.$$

Hier sind jetzt die Koeffizienten $(\alpha\alpha'')$ und $(\alpha\alpha'')$ zu berechnen.

§ 3.

Als ein im Raum festes System S kann man das zu Grunde legen, dessen Ursprung der Sonnenmittelpunkt, dessen $X'\,Y'$-Ebene die mittlere Ekliptik-Ebene einer bestimmten Epoche und dessen X'-Achse die zur Epoche gehörige mittlere Nachtgleichenlinie ist. Bei der Kleinheit der Faktoren, die, wie man sehen wird, die vom Umlauf der Erde um die Sonne herrührenden Glieder haben, kann man ohne Fehler die Breite der Erde inbezug auf dieses System Null setzen und annehmen die Erde beschreibe um die Sonne einen Kreis von Radius R mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω. Die Länge der Erde sei λ. Dann sind die Koordinaten des Erdmittelpunktes:

$$x' = R\cos\lambda \qquad y' = R\sin\lambda \qquad z' = 0.$$

Die Achse der ξ war durch die Lage des Stabs gegeben.

Die Achse der η liege in der Horizontalebene des Beobachtungsortes, die der ζ ist dann dessen Lotlinie. Ist ε die Schiefe der Ekliptik, ϑ die Sternzeit der Beobachtung, so kann man die Ausdrücke der zwölf Koeffizienten in den Beziehungen zwischen den beiden Systemen von Koordinaten berechnen. Man macht zu dem Zweck Gebrauch von den Formeln, die in der sphärischen Astronomie zur Berechnung von Länge und Breite aus Höhe und Azimut gegeben werden (vgl. Brünnow, Sphärische Astronomie, 2. Auflage, Seite 84 ff.). Für die Genauigkeit, die hier nötig ist, genügt es die bei der Bestimmung der Sternzeit benützte Nachtgleichenlinie als parallel mit der Achse der x' anzunehmen, die Schiefe der Ekliptik konstant zu setzen und die geozentrische mit der geographischen Breite zu verwechseln. Ist r der Erdradius, so findet man die Koeffizienten, die allein gebraucht werden.

$$\alpha = \sin A \sin\vartheta + \sin\varphi\cos A\cos\vartheta$$

$$\alpha_1 = -\sin A\cos\varepsilon\cos\vartheta + \sin\varphi\cos A\cos\varepsilon\sin\vartheta - \cos\varphi\cos A\sin\varepsilon$$

$$\alpha_2 = \sin A\sin\varepsilon\cos\vartheta - \sin\varphi\cos A\sin\varepsilon\sin\vartheta - \cos\varphi\cos A\cos\varepsilon$$

$$a = R\cos\lambda + r\cos\varphi\cos\vartheta$$

$$a_1 = R\sin\lambda + r(\cos\varphi\cos\varepsilon\sin\vartheta + \sin\varphi\sin\varepsilon)$$

$$_2 = r(-\cos\varphi\sin\varepsilon\sin\vartheta + \sin\varphi\cos\varepsilon).$$

Damit berechnet sich, wenn das konstante $\dfrac{d\vartheta}{dt} = \omega$ gesetzt wird,

$$(a\,a'') = -\,\Omega^2 R\,(a\cos\lambda + a_1 \sin\lambda) - r\,\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi\cos A$$
$$(a\,a'') = -\,\omega^2 (1 - \cos^2\varphi\cos^2 A).$$

Die partielle Differentialgleichung für u wird dann

$$\varrho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varrho\,\Big\{-\,\Omega^2 R\,a\cos\lambda - \Omega^2 R\,a_1 \sin\lambda$$
$$-\,\frac{r\,\omega^2}{2}\sin 2\varphi\cos A - \omega^2 (1 - \cos^2\varphi\cos^2 A)\,x\Big\}$$

oder, wenn man die Größen Γ, Δ, γ, δ aus den Gleichungen

$$\Gamma\cos\gamma = \sin A \sin^2\frac{\varepsilon}{2} \qquad \Gamma\sin\gamma = \sin\varphi\cos A\sin^2\frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Delta\cos\delta = \sin A \cos^2\frac{\varepsilon}{2} \qquad \Delta\sin\delta = \sin\varphi\cos A\cos^2\frac{\varepsilon}{2}$$
$$P = -\,\cos\varphi\cos A\sin\varepsilon$$

bestimmt,

$$5)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{E}{\varrho}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\,r\,\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi\cos A - x\,\omega^2 (1 - \cos^2\varphi\cos^2 A)$$
$$-\,\Omega^2 R\,\{\Gamma\sin(\gamma + \vartheta + \lambda) + \Delta\sin(\delta + \vartheta - \lambda) + P\sin\lambda\}.$$

Ein partikuläres Integral dieser Gleichung, das bei $x = 0$ beständig Null ist, gibt der Ausdruck:

$$u = \frac{\varrho}{E}\,\frac{r\,\omega^2 x^2}{2}\sin\varphi\cos\varphi\cos A + \frac{\varrho}{E}\,\frac{\omega^2 x^3}{6}(1 - \cos^2\varphi\cos^2 A)$$
$$+\,\frac{\Omega^2 R\,\Gamma}{(\omega + \Omega)^2}\sin(\gamma + \delta + \lambda)\cdot 2\sin^2\frac{\omega + \Omega}{2}\,x\sqrt{\frac{\varrho}{E}}$$
$$+\,\frac{\Omega^2 R\,\Delta}{(\omega - \Omega)^2}\sin(\delta + \vartheta - \lambda)\cdot 2\sin^2\frac{\omega - \Omega}{2}\,x\sqrt{\frac{\varrho}{E}}$$
$$+\,P\,R\sin\lambda\cdot 2\sin^2\frac{\Omega}{2}\,x\sqrt{\frac{\varrho}{E}}.$$

Hat der Stab ursprünglich die Länge l, so wird seine Verlängerung oder Verkürzung u^* gefunden, indem man in diesem Ausdruck $x = l$ setzt.

§ 4.

Bei dem Versuch von Michelson war l ein Meter und, da der Stab von Messing war, ϱ gleich 8,5 und E gleich 10000. Rechnet man im CGS-System, so ist l gleich 100 und E gleich 10^{12} zu setzen. Damit und mit den bekannten Werten der anderen Konstanten wird $(\omega \pm \Omega)\, l \sqrt{\frac{\varrho}{E}}$ kleiner als 10^{-7}. Man kann also in der obigen Formel die Quadrate der Sinus durch die Quadrate der Bogen ersetzen. So entsteht:

$$u^* = \frac{\varrho\, r\, \omega^2 l}{2\,E} \sin\varphi \cos\varphi \cos A + \frac{\varrho\, \omega^2 l^3}{6\,\varepsilon} (1 - \cos^2\varphi \cos^2 A)$$

$$+ \frac{\varrho\, R\, \Omega^2 l^2}{2\,E} \{\Gamma \sin(\gamma + \vartheta + \lambda) + \varDelta \sin(\delta + \vartheta - \lambda) + P \sin\lambda\}.$$

Weiter findet sich:

$$\frac{\varrho\, r\, \omega^2 l^2}{2\,E} = 1{,}44 \cdot 10^{-3}\,\mu, \qquad \frac{\varrho\, \omega^2 l^3}{6\,E} = 10^{-10}\,\mu,$$

$$\frac{\varrho\, R\, \Omega^2 l^2}{2\,E} = 0{,}25 \cdot 10^{-3}\,\mu.$$

Man kann also das sehr kleine zweite Glied fortlassen. Mit dem Wert $23^0\, 27'$ der Schiefe der Ekliptik folgt ferner Γ höchstens gleich 0,04, so daß das Glied welches Γ enthält zu vernachläßigen ist. Weiter ergibt sich

$$\varDelta \sin\delta = 0{,}96 \sin A \qquad \varDelta \cos\delta = 0{,}96 \sin\varphi \cos A$$

und damit endlich in Tausendstel Mikron:

$$u^* = 0{,}72 \sin 2\,\varphi \cos A + 0{,}24 \sin\varphi \cos A \cos(\vartheta - \lambda)$$
$$+ 0{,}24 \sin A \sin(\vartheta - \lambda) - 0{,}10 \cos\varphi \cos A \sin\lambda.$$

Betrachtet man nur das erste Glied das von der Tages-

und Jahreszeit nicht abhängt, so sieht man, daß in der Breite von 45 Grad, wo es seinen größten Wert hat, durch Änderung des Azimuts eine Änderung der Länge von $1{,}4 \cdot 10^{-3}$ Mikron bewirkt wird. Das ist freilich nur etwa der vierte Teil der von den Lorentzschen Hypothese geforderten Verkürzung eines Stabs von einem Meter Länge, die 5.10^{-3} Mikron beträgt. Ob die Genauigkeit des Michelsonschen Versuchs gestattet von den hier berechneten Einflüssen der Zentrifugalkräfte abzusehen, vermag ich nicht zu beurteilen.

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 8. Abhandlung

Untersuchungen über Wackelsteine und damit zusammenhängende Denudationserscheinungen

von

Siegmund Günther

Vorgelegt am 6. März 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Die Tatsache, daß es „Wackelsteine“ gibt, ist zwar eine längst bekannte, aber der Name selbst ist erst vor nicht sehr langer Zeit von der Wissenschaft rezipiert worden. Häufig angewandt scheint er auch jetzt noch nicht zu werden, obwohl er sehr bezeichnend ist; ob er noch anderswo als in den Schriften v. Gümbels[1]) und Loewls[2]) vorkommt, kann zunächst nicht entschieden werden. Wir nennen so einen Felsblock, der auf so schmaler Unterlage aufruht, daß er anscheinend allen Gesetzen der Stabilität Hohn spricht und mit verhältnismäßig geringer Kraftanstrengung zum Wackeln gebracht werden kann oder doch gebracht werden zu können scheint — denn daß in allen Fällen ein leichter Druck diese oszillierende Bewegung

---

[1]) W. v. Gümbel, Geologie von Bayern, Kassel 1880, S. 220. „Wir erwähnen hier gelegentlich jene durch Verwitterung erzeugten, bei verschiedenen Felsformen vorkommenden Ausbildungen, bei welchen ein kopfartiger, großartiger Stein auf einer verhältnismäßig so kleinen Basis aufsitzt, daß er sich bewegen legt (Wackelstein).“ Beiläufig bemerkt, ist die Gümbelsche Abbildung recht wenig überzeugend. Denn der Deckstein hat mit seinem Supporte eine so große Fläche gemeinsam, daß man annehmen muß, er befinde sich in einem recht stabilen Gleichgewichte.

[2]) F. Loewl, Geologie, Leipzig-Wien 1906 (11. Band des Sammelwerkes „Die Erdkunde“), S. 249. „Wenn die Säulen einen Hut aus härterem Gesteine tragen, so pflegen sie sich zu Pilzfelsen zu entwickeln, einer Pfeilerform, die allen Felswüsten eigentümlich ist, und deren Ausbildung dadurch begünstigt wird, daß der Sand auf dem Boden und in geringer Höhe darüber weggetrieben wird, und daß daher die Winderosion am Fuße eines Steinpfeilers an stärksten angreift. „Wackelsteine“ entstehen dadurch, daß einzelne Felspartien durch die Entfernung einer weicheren Lage untergraben werden und schließlich nur noch unsicher auf der Unterlage ruhen.“

auszulösen vermag, steht keineswegs fest. Die Entstehung solcher Formen ist keine so ganz einfache, wie man vielleicht auf den ersten Blick glauben möchte, indem vielmehr verschiedene Ursachen unter Umständen den gleichen Effekt hervorbringen. Zunächst soll davon gesprochen werden, wo man derartige Gebilde wirklich antrifft; sehr zahlreich sind sie nicht, wenn man natürlich die zahlreichen Vorkommnisse ausschließt, welche den Sachverhalt sozusagen nur in Miniatur hervortreten lassen. Unsere Aufzählung kann aus naheliegenden Gründen nicht daran denken, eine vollständige zu sein, aber es dürften wenigstens die bekannteren und interessanteren Vertreter dieser Spezies morphologischer Eigentümlichkeiten ihre Stelle gefunden haben.

Am frühesten vielleicht hat sich damit v. Leonhard beschäftigt, dem überhaupt das wohl zu wenig anerkannte Verdienst zugesprochen werden muß, auf Besonderheiten des Oberflächenbildes ein sehr aufmerksames Auge gerichtet zu haben. Nachdem er ganz allgemein von den Blockmeeren gehandelt und als ein besonders klassisches Beispiel solcher Trümmeranhäufungen die Luisenburg im Fichtelgebirge (bei Wunsiedel) besprochen hat, wo, wie wir von Gümbel erfuhren, dergleichen lose aufliegende Felsen vorkommen, geht er zu dem analogen Phänomen in der englischen Landschaft Cornwall über und spricht sich darüber aus, wie folgt:[1] „Dem Volke in Cornwall gilt seit langer Zeit sein Logan Rock oder Rocking Stone — schwebender Fels — als besondere Merkwürdigkeit. Aber der Gegenstand machte auch die Aufmerksamkeit von Antiquaren und Geologen rege und veranlaßte mehrfache Untersuchungen. Unfern Landsend, beim Dorfe Trereen, auf einem ins Meer hinausragenden Haufwerke granitischer Blöcke, schwebt, wahrhaft schauerlich, ein ungeheure Gesteinmasse. Der sphäroidische Granitblock, wie gesagt wird, über 60 Tonnen (120 000 Pfund) schwer, ist in dem Grade in seinem Gleichgewichte er-

[1]) K. C. v. Leonhard, Geologie oder Naturgeschichte der Erde auf allgemein faßliche Weise abgehandelt, 2. Band, Stuttgart 1838, S. 148 ff.

halten, daß eines Mannes kräftiger Arm ihn hinundherzuwiegen, ihn in schwankende Bewegung zu bringen vermag." Die eine große Dosis altkeltischen Aberglaubens bekundenden Landleute bringen den Fels, der ja (Fig. 1) abenteuerlich genug aussieht, mit alten keltischen Sagen in Verbindung und behaupten, daß es als ein Gottesurteil galt, ob jemand den Schwebestein ins Schwingen versetzen konnte oder nicht. Dann fährt v. Leonhard fort: „Ähnliche Tatsachen sieht man auch noch an einigen anderen Orten, namentlich auf der westindischen Insel Spanish Town" — gemeint ist Jamaika —, „von Columbus als ‚die Große Jungfrau' (‚Virgen gorda') bezeichnet".[1]) Die Übersetzung „Dicke Jungfrau" wäre richtiger.

Einzelne weitere Vorkommnisse dieser Art finden sich in der Literatur, wiewohl nur ziemlich spärlich, angegeben. Ein besonders schönes Exemplar hat Kuntze in Südamerika angetroffen; von ihm gibt er den folgenden Bericht:[2]) „Auf der Sierra de Tandil findet man mächtige Steinblockmeere und pseudoglaziale Rundhöcker, von denen einer mit dem berühmten Rocking Stone, dem schwingenden Stein, nach einem Bilde, das nach einer Photographie gefertigt ward, hier wiedergegeben wird. Diese Gebilde sind auch schon für glazial gehalten worden, aber sicher mit Unrecht, schon weil diese Blockmeere bloß aus anstehendem Gestein bestehen. Santiago Roth führt zur Bekräftigung, daß die Sierren de Tandil und de la Ventana als alte Kuppen früherer großer primärer Gebirgsketten durch heute dort noch wirkende Naturkräfte, nicht aber durch Gletscher oder durch Überschwemmungen verwittert seien, auf, daß Gerölle nur in nächster Nähe, nicht aber in den Lößebenen vorkommen". In Fig. 2 wird dieser besonders merkwürdige Wackelstein dargestellt. Das Lot, welches man sich aus seinem Schwerpunkte auf die Grundfläche gefällt zu denken hat, wird mit dem Fußpunkte vom Rande des winzigen Flächenstückes, das der Block mit der Unterlage gemein hat, nur um wenige

[1]) Nach v. Leonhard gibt unsere Fig. 1 den „Logan Rock" wieder.

[2]) O. Kuntze, Geogenetische Beiträge, Leipzig 1895, S. 15 ff.

Millimeter abweichen können; gleichwohl ruht das eigenartige Naturdenkmal offenbar im stabilen Gleichgewichtszustande.

Die Neue Welt weist noch andere Beispiele für die Existenz charakteristischer Wackelsteine auf. Wohl der größte, den es gibt, der anscheinend seinen Cornwaller Genossen noch an Volumen übertrifft, gehört dem sogenannten „Göttergarten" am Fuße des Pikes Peak in der „Front Range" der Rocky Mountains an; eine imposante Masse aus rotem triassischen Sandstein (Fig. 3), welche zu den „Clous" dieses Naturmuseums sonderbarer Erosionsgebilde[1]) gerechnet wird. Das Gefühl, dieser Riese stehe nur ganz zufällig aufrecht und müsse im nächsten Augenblicke das Gleichgewicht verlieren, wird wohl jedem kommen, der zu seinen Füßen steht und bewundernd zu ihm aufblickt. Durchweg sonst ist auch der Wackelstein umgeben von Blöcken, die einen Vergleich ermöglichen; im „Göttergarten" fehlen derartige Vergleichsobjekte in der näheren Umgebung fast gänzlich, und durch diesen Mangel wird das Massige, Gigantische des Anblickes noch verstärkt.

---

[1]) Die vorhandenen amerikanischen Nachrichten über den Garden of the Gods sind meist nicht erschöpfend. Generell beschäftigen sich mit den Denudationserscheinungen des Westens der Union in G. K. Gilberts großem Sammelwerke (Report on the Geology of Positions of Nevada, Utah, California, and Arizona, examined in the Years 1871 and 1872) die Beiträge von Wheeler-Humphrey (Report upon Geographical and Geological Explorations and Surveys west of the hundredth Meridian, 3. Band, Washington 1875) und J. J. Stevenson (Report of the Geology of the Territory of Colorado, examined in 1873, ebenda). Wir kommen auf einzelne einschlägige Verhältnisse noch zurück. Am meisten darf man erwarten von einer Abhandlung Endlichs (On some striking Products of Erosion in Colorado etc., Geological and Geographical Survey of the Territories, 4. Band, Washington 1878). Die Einteilung der Skulpturformen, die hier gegeben wird, kann man vollkommen billigen, ebenso auch den Hinweis auf gewisse Analogien mit den Erdpyramiden (S. 845); aber im Detail wird auf die Formenmannigfaltigkeit nicht eingegangen, von welcher der Autor selbst (S. 835 ff.) sagt, es sei nicht zu verwundern, daß sie auf die Phantasie des Naturmenschen einen tiefen Eindruck gemacht und ihm das Walten übernatürlicher Kräfte nahe gelegt haben müsse.

Zu den in unserem Sinne bemerkenswertesten Erdstellen sind jedenfalls die Falkland-Inseln zu rechnen. Mit den sogenannten Steinströmen derselben haben sich wohl alle Forscher befaßt,[1]) welche ihr Weg nach dieser entlegenen Küste führte, aber in tiefer eindringender Weise charakterisierte sie zuerst Darwin,[2]) der anläßlich seiner berühmten Erdumseglung sich daselbst etwas länger aufzuhalten in der Lage war. Daß diese groteske Trümmeransammlung, deren Entstehung zu Hypothesen aller Art Veranlassung gegeben hat,[3]) auch einzelne

[1]) Wir verweisen bezüglich der Literatur auf die Monographie von B. Stechele (Die „Steinströme" der Falkland-Inseln, Münch. Geogr. Studien, herausgeg. von S. Günther, 20. Stück, 1906). Der erste Autor, von dem eine Schilderung des in Rede stehenden Steinfeldes herrührt, war Pernetty (Histoire d'un voyage aux Jsles Malouines, 2. Aufl., 2. Band, Paris 1770, S. 1 ff.). Sonst gaben außer Darwin noch selbständige Beschreibungen Wyville Thomson (The Atlantic, 2. Band, London 1877, S. 245 ff.) und R. Vallentin (Notes on the Falkland Islands, Manchester Memoirs, 18. Band, 1903—1904). Andere Reisende, die auch an Ort und Stelle waren, beschränken sich darauf, die Mitteilungen Darwins und Thomsons zu zitieren. Vgl. auch: H. Heß, die Gletscher, Braunschweig 1904, S. 396.

[2]) Ch. Darwin, Journal of Researches into the Natural History and Geology of the Countries visited during the Voyage of H. M. S. Beagle round the World under the Command of Capt. Fitz Roy R. N., London 1860, S. 102 ff.; On the Geology of the Falkland Islands, Quart. Journ. of the Geol. Soc. of London, 2. Band (1846), 1. u. 2. Teil. Im Deutschen geben Darwins Originalbericht wieder die Übersetzung von J. V. Carus (Stuttgart 1875, S. 216 ff.) und (teilweise) Kuntze (Geogenetische Beiträge, Leipzig 1895, S. 15.)

[3]) Nach Stecheles fleißiger Zusammenstellung ist zur Erklärung der „Stone Rivers" an folgende Ursachen appelliert worden: Vulkanausbrüche, Erdbeben, Schollenbrüche, Faltung, Gewölbeaufsprengung, Bergrutsche, Wassertransport, Moränenreste, Lawinenbewegung. Eine bunte Musterkarte, welcher gegenüber Thomsons Vermutung, es möchten durch inneren Gebirgsdruck große Felspartien zertrümmert und in eine sehr langsame Rutschbewegung versetzt worden sein, insofern einen Fortschritt bedeutet, als keine äußeren Kräfte, für deren Auftreten der ganze Oberflächencharakter des Archipels nicht den mindesten Anhaltspunkt bietet, herangezogen werden. Die Originalphotographie von Schulz, die die Zeitschrift „Globus" (60. Band, S. 183) nach dem von jenem Reisenden herausgegebenen Album „Falkland Islands" abbildet, läßt an der scharfen Ausprägung des reinen Blockmeertypus keinen Zweifel.

Felsindividuen in fast unmöglich scheinender Situation aufzuweisen haben würde, war von vornherein zu erwarten. Darwins Schilderung[1]) gibt Belege genug an die Hand.

Die vier Beispiele — Cornwall, Sierra Tandil in Argentinien, Göttergarten und Falkland-Inseln —, deren wir bisher Erwähnung taten, mögen als die klassischen bezeichnet werden; daran, daß noch da und dort ein Sachverhalt wiederkehrt, der ja an und für sich keineswegs ganz unerwartet ist, ist nicht zu zweifeln.[2]) Überall da, wo sich ein Wackelstein findet, kann aber unmöglich der Erdboden jemals auch nur wenig aus seiner Ruhe gebracht worden sein; solche Naturdenkmäler bekunden folglich die Erdbeben-Immunität der fraglichen Gegenden. In der Tat hat man auch von Erderschütterungen in Südwestengland, im östlichen Argentinien, im Colorado-Prairiegebiete[3]) und im Falkland-Archipel kaum je etwas vernommen.

---

[1]) Aus dem, was Darwin über die „Ruinen einer ungeheuren alten Kathedrale" — Pernetty spricht von „Torruinen" — berichtet, geht hervor, daß an der fraglichen Stelle viele größere und kleinere Blöcke in einer anscheinend ganz unmöglichen Anordnung gelagert sind. Der Platz befindet sich auf dem Gipfel eines niedrigen Berges, von dem der „Strom" der Trümmer sich in das benachbarte Tal hinabzieht. Einige von den dort die Oberfläche bedeckenden, meist nach parallelepipedischer Absonderung losgelösten Tafeln können Anspruch auf die Bezeichnung „Wackelstein" erheben.

[2]) Einer Mitteilung von Herrn Prof. Martin (Nürnberg), mit dem der Verfasser bei der Bereisung der Insel Sardinien zusammentraf, ist zu entnehmen, daß dortselbst, nächst dem Städtchen Nuoro, ein Wackelstein sich befindet, der gelegentlich zu Volksbelustigungen Anlaß gibt. Auf einem der Gipfel des Pilatus lagerte nach Herrn Prof. A. Heim (Zürich) ehemals auch ein solcher Fels in Balancierlage, der Gnippstein genannt, der heute jedoch nicht mehr zu sehen ist. Kleinere Erdbeben sind in der Umgebung des Vierwaldstätter-Sees nichts unerhörtes; wahrscheinlich hat ein solches die Bergspitze um die Zierde gebracht, von welcher sie noch den Namen trägt. Herrn Dr. F. Fischer (Fürth) ist eine Nachricht über eine analoge Erscheinung in der von Urgebirgsblöcken übersäeten Umgegend des oberpfälzischen Marktfleckens Regen zu danken.

[3]) In seinem großen, für diesen Teil der Erdbebenwissenschaft bahnbrechenden Werke über seismische Geographie gibt Montessus de

Was nun das Zustandekommen jener eigentümlichen Anordnung von Felsblöcken anlangt, so scheinen zwei Möglichkeiten wohl auseinandergehalten werden zu müssen. Die etwas kurzen Schilderungen v. Gümbels und Loewls, auf welche oben bezug genommen wurde, weisen nur je auf die eine Seite hin, während die andere unberücksichtigt bleibt. Schon aprioristisch betrachtet, wird man in einem Wackelsteine, je nach der besonderen Gestaltung der Verhältnisse, das Endergebnis eines gewöhnlichen Verwitterungsprozesses oder dasjenige eines stetig fortschreitenden Zerstörungsaktes der Winderosion anzusprechen haben. Diese Vorgänge sind, für sich betrachtet, so verschieden, wie überhaupt morphologische Eingriffe in das Gefüge eines geschlossenen Felsmassives nur sein können, aber trotzdem führen sie zu Endzuständen, welche, wenigstens auf den ersten Blick, gar keinen abweichenden Charakter zu haben scheinen.

Betreffs der Entstehung der sogenannten Blockmeere, welche zwar nicht an das Auftreten von Granit und Syenit direkt gebunden sind, im Bereiche dieser Massengesteine aber sicher am häufigsten und bei Sedimentärbildungen jedenfalls in einer weit weniger typischen Ausprägung vorkommen, besteht jetzt kaum noch irgendwelche Meinungsverschiedenheit. Die von Goethe[1]) bereits mit voller Deutlichkeit ausgesprochene

---

Ballore eine dem neuesten Stande unseres Wissens entsprechende Einteilung der Erdoberfläche in Maximal- und Minimalschüttergebiete. Zu den letzteren gehört ein elliptisch geformtes Areal am Ostabhange der Felsengebirge und in der sich östlich anschließenden Prärie. Vgl. hiezu Montessus de Ballore, Les tremblements de terre, géographie sismique, Paris 1906, a. v. St.; Sieberg, Der Erdball, seine Entwicklung und seine Kräfte. Eßlingen-München 1908, S. 335 ff.

[1]) Vgl. Goethes dem Jahre 1820 entstammenden Essay „Die Luisenburg bei Alexandersbad“ (sämtliche Werke in 40 Bänden, 40. Band, Stuttgart 1869, S. 83 ff.). Der wunderbare Anblick dieser anscheinend so gewaltigen Zerstörung mache es wohl begreiflich, daß man, um ein derartiges Chaos zu erklären, „Fluten und Wolkenbrüche, Sturm und Erdbeben, Vulkane und was nur sonst die Natur gewaltsam aufregen mag, hier zu Hilfe ruft“. Getreu seiner ganzen aktualistischen Richtung lehnt der Dichter jede einmalige Kraftwirkung ab und führt die Zustände auf

Ansicht, daß einzig und allein die Verwitterung — und zwar die chemische weit mehr als die mechanische — den Zerfall bedingt, und daß von der Beiziehung katastrophal wirkender Agentien durchaus abzusehen ist, wird allgemein geteilt.

Ein Erklärungsversuch, der zu Goethes Zeit nicht wohl möglich war, obwohl gerade er noch am ersten auf ihn hätte verfallen können,[1]) soll hier nur kurz gestreift werden, weil eine ernsthafte Befürwortung desselben nur selten hervorgetreten ist; es wurde oben erwähnt, daß ein deutsch-argentinischer Forscher solche Möglichkeiten, die also doch wohl von irgend einer Seite geltend gemacht worden sein müssen, zurückweisen zu sollen geglaubt hat. Man könnte nämlich solche Trümmeransammlungen allenfalls auch als diluviale Residuen auffassen, die, je nachdem man die Drift- oder Glazialtheorie bevorzugt, auf eine Hochflut oder auf Moränenbildung zurückzuführen wären. Kenner der Örtlichkeit[2]) stellen beides auf das entschiedenste in Abrede, soweit eben die Sierra Tandil in Betracht kommt. Von Vereisungserscheinungen im Fichtelgebirge kann erst recht nur im bescheidensten Maße die Rede sein. Es bleibt also dabei, daß die Wackelsteinbildung in der Regel die einfachste Konsequenz eines durch Verwitterung herbeigeführten Gesteinzerfalles ist. Ein größerer Block war mutmaßlich lange Zeit von kleineren Fragmenten umgeben, die ihn stützten und

---

langsame und ruhige Veränderungen zurück, indem er darauf hinweist, daß noch mehrere Felspartien, die der Verwitterung besser widerstanden, sich ganz im ursprünglichen Zustande befänden, der aber, weil er nichts Außergewöhnliches darbiete, nicht beachtet werde.

[1]) Man sollte nicht vergessen, daß der große Dichter tatsächlich einer der ersten war, die dem Transporte der Findlinge durch die sich ungewöhnlich stark ausdehnenden Gletscher das Wort redeten, und zwar bereits zu einer Zeit, da die von Venetz gegebenen Aufschlüsse über das Erratikum im Wallis noch nicht die Streitfrage zu einer akuten gemacht hatten. Der Name Goethes muß immer mit denen von Deluc, Esmark und Playfair zusammen genannt werden (Günther, Geschichte der Naturwissenschaften, 2. Band, Leipzig 1909, S. 226).

[2]) Der Verfasser erholte sich diesen Aufschluß persönlich bei Herrn Prof. Dr. Hauthal (früher in La Plata, jetzt in Hildesheim), der die merkwürdige Erdstelle aus eigener Anschauung genau kennt.

in seiner Lage erhielten, bis die natürlichen Denudationsfaktoren eine dieser Stützen nach der anderen entfernten. In hunderten von Fällen mag dann der seiner Pilotierung beraubte Fels umgestürzt sein und sich in eine ungezwungen stabile Lage eingestellt haben; in einigen wenigen dagegen war von Anfang an jene eigenartige Stabilität vorhanden, welche eben das Wesen des Wackelsteines ausmacht, und der Denudationsvorgang hatte daran nichts mehr zu ändern.

Niemals wird natürlich mit voller Sicherheit entschieden werden können, ob nicht neben der langsamen Arbeit der Gesteinsauflösung auch andere erosive Agentien eine gewisse Mitwirkung betätigt haben. Wie wir oben sahen, schreibt diesen u. a. Loewl einen sehr kräftigen Anteil zu, und speziell bei dem Riesenblocke des „Göttergartens“ wird an eine energische Winderosion gedacht werden dürfen. Es ist nicht zu leugnen, daß gegen eine längere Zeit ziemlich allgemein gebilligte Auffassung, welche jenem Momente einen sehr weiten Geltungsbereich zusprach, eine Reaktion eingetreten ist,[1]) so daß vielleicht jetzt, wie man das in der Geschichte der Wissenschaft so oft wahrzunehmen Gelegenheit hat, die Deflation einigermaßen in ihrer Bedeutung unterschätzt zu werden beginnt. So dürfte es sich empfehlen, dieser Frage eine eingehendere Erörterung zu widmen.

Daß zunächst diese Art der Zerstörung, falls wir die

[1]) Bezug genommen wird hier auf die noch nicht in den Druck gekommenen Vorträge von Passarge und Penck über die Probleme der Wüstenbildung. Der 17. Deutsche Geographentag (in Lübeck) bot den genannten beiden Geographen die Möglichkeit, sich über die von ihnen in verschiedenen Erdräumen gewonnenen Anschauungen in öffentlicher Sitzung auszusprechen. Bei manchen Meinungsverschiedenheiten im einzelnen traten auch viele Übereinstimmungen hervor, so insbesondere auch in der Bewertung der der Tätigkeit bewegter Luft zuzusprechenden Leistungsfähigkeit. Es wurde von beiden Seiten betont, daß Walther, auf dessen Arbeiten wir gleich nachher zu sprechen kommen werden, die Windenergie zu hoch eingeschätzt habe, und daß auch in der Wüste die Wassererosion gar nicht die unbedeutende Rolle spiele, an die man vielfach glaubte.

Möglichkeit ihres Vorhandenseins zugeben, die Verwandlung einer isolierten Gesteinsmasse in ein Felsstück von höchst gewagter Lage zuwege bringen kann, ist äußerst wahrscheinlich. Regenfall ist im Staate Colorado verhältnismäßig eine Seltenheit, wogegen „heftige Windstöße und Staubstürme" — von dem Vorkommen der letzteren hatte der Verfasser selbst Gelegenheit sich zu überzeugen — als häufige Ereignisse anzusehen sind. So charakterisiert Hann,[1]) auf das Zeugnis Garnetts hin, die klimatischen Verhältnisse am Fuße der East Range[2]) der Felsengebirge. Eine gewisse Prädisposition des Materiales, welche den Angriff der mit Sand beladenen Luftströmungen erleichtert, scheint gegeben durch die sehr scharfen Temperaturgegensätze, welche hier zu konstastieren sind, und welche, namentlich soweit Tag und Nacht sich entgegenstehen, geradezu an das erinnern, was aus wirklichen Wüsten bekannt ist. „Die tägliche Wärmeschwankung", sagt Hann, „erreicht als Effekt der Wärmeausstrahlung bei Nacht und der Insolation bei Tag hier ein Maximum. Tagesschwankungen von 20° bis 24° im Mittel sind nicht ungewöhnlich, und gelegentlich kommen solche bis zu 30° und darüber vor. Wenn am Morgen strenger Frost herrscht, bringt die Sonne bis zum Nachmittag doch Sommerwärme." Solcher Wechsel der Temperatur lockert das Gefüge auch des festeten

[1]) J. Hann, Handbuch der Klimatologie, 3. Band, Stuttgart 1897, S. 344 ff.

[2]) Gegenden der hier gekennzeichneten Art haben zumeist auch starken Taufall, und dessen Mitwirkung soll nicht unterschätzt werden. An jeder einigermaßen geschützten Stelle des Felsens, wo sich das aus der Luft niedergeschlagene oder nach vorhergegangener Absorption aus dem Steine wieder austretende Wasser einige Zeit halten kann, ohne der sonst überall sich geltend machenden Verdunstung zu unterliegen, hilft der Tau, wie sonst zurückgebliebenes Regenwasser, mit, den Fels zu zersetzen. Es bildet sich allmählich ein anfänglich nur minimaler Hohlraum aus, der jedoch durch die Luft und ihre Geschosse ziemlich rasch ausgetieft werden kann und, indem er mit anderen Miniaturlöchern zusammenwächst, der Entstehung größerer Öffnungen im Gesteine Vorschub leistet.

Körpers und schafft schwache Punkte, an denen jeder Eingriff sich leichter betätigen kann. Die chemische Verwitterung wird infolge der sehr beträchtlichen Lufttrockenheit herabgesetzt, und an ihre Stelle treten die molekularen Spannungszustände, welche die Konsequenz eines unaufhörlich mit großer Amplitude sich vollziehenden Wechselspieles von Ausdehnung und Zusammenziehung sein müssen.

Die Abhobelung durch das Sandgebläse ist durch Walther[1]) und Thoulet[2]) gründlich studiert worden. Auch dann, wenn man, worauf oben verwiesen ward, die Allgemeingültigkeit der auf Deflation zurückgeführten Wirkungen nicht zugesteht, wird zuzugeben sein, daß die Wind- und Sanderosion da, wo alle Voraussetzungen für sie gegeben sind, die Zerstörungsbilder schafft, mit denen uns Walthers lebensvolle Darstellung bekannt macht. Zu allererst wird die Gesteinswand, gegen welche, um mit v. Richthofen[3]) zu sprechen, der anstürmende Wind seine Projektile schleudert, gefurcht und durchlöchert, je nachdem eben die Punkte geringerer Widerstandsfähigkeit mehr eine longitudinale oder flächenhafte Anordnung zeigen. Die Löcherbildung durch äolische Korrasion verdient, weil sie die erste Etappe des die Pilzfelsen und „Monumente" bildenden Prozesses bildet,[4]) noch etwas näher betrachtet zu werden. Gerade bei ihr scheint sich

---

[1]) J. Walther, Die Denudation in der Wüste und ihre geologische Bedeutung; Untersuchungen über die Bildung von Sedimenten in der ägyptischen Wüste, Abhandl. d. K. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., Math.-phys. Kl., 16. Band (1891), Nr. III.

[2]) T. Thoulet, Expériences synthétiques sur l'abrasion des roches par le sable, Compt. Rend. de l'Acad. Franç., 104. Band, S. 381 ff.

[3]) F. v. Richthofen, Führer für Forschungsreisende, Hannover 1901 (Berlin 1886), S. 430.

[4]) Unter dem Namen „Accidental Monuments" kennt man in Nordamerika diese isolierten Säulen. Der Vergleich mit den Erdpyramiden hinkt, wie Penck (Morphologie der Erdoberfläche, 1. Band, Stuttgart 1894, S. 234 ff.) bemerkt, insofern, als die Lehmgebilde sich fast ausnahmslos nach unten verbreitern, die „Monumente" hingegen nach unten verjüngen.

die Eigenart der Winderosion besonders gut im einzelnen erkennen zu lassen.[1])

Selbstverständlich kann auch die Struktur des der äolischen Einwirkung ausgesetzten Körpers eine solche sein, daß er nicht facettiert und durchlöchert, sondern auf einem namhaften Teile

---

[1]) Daß Nischenbildung auch ohne jede Mitwirkung des Windes eintreten kann, wird niemand bezweifeln wollen; sprechen dafür doch schon ansreichend die Dolinen des Karstes und die sogenannten Opferkessel der deutschen Mittelgebirge. Ein tieferes Studium wandte der Angelegenheit zu Stefanini (Nicchie d'erosione nei terreni plioceni della Val d'Era, Riv. Geogr. Ital., 16. Jahrgang, 4. Heft); vgl. auch eine zweite Abhandlung dieses Autors (Fenomeni carsici nei gessi della Val d'Era, a. a. O., 14. Jahrgang, 10. Heft). Diese durchweg sehr weiten Höhlungen mit ganz unregelmäßiger Umrandung finden sich mehrenteils da vor, wo Sandstein- und Tonlager sich berühren, so daß mithin der genannte Geologe gerade dieses Zusammentreffen von Schichten sehr verschiedenartigen Charakters für eine unerläßliche Voraussetzung des Eintiefungsprozesses erklären zu müssen glaubt. Die Verwitterung tut sicherlich bei diesen Gebilden das meiste. Höchst belehrend sind die Skizzen, welche uns K. Futterer (Durch Asien; Erfahrungen, Forschungen und Sammlungen während der von Dr. Holderer unternommenen Reise, fortgesetzt von F. Noetling, 2. Band, Berlin 1905) verschiedene Male vorlegt. Wir lernen Muldenbildungen im anstehenden Granit (S. 178) kennen, welche wohl reine Verwitterungsphänomene sind, und auch bei den Höhlen von Kara-Küsül (S. 181) dürfte in der Hauptsache, wennschon der Wind wenigstens die Desquamation, die schalenförmige Absonderung befördert, dasselbe gelten. Die Tufflöcher bei Jantschi (Tafel XIII) hinwiederum haben mehr eine doppelte Bildungsursache aufzuweisen, indem der staubführende Wind „Wirbelkessel" ausgeblasen hat, wie sie gelegentlich auch unsere Breiten besitzen (Futterer, Ein Beispiel für Winderosion am Heidelberger Schloß, Mitteil. d. Bad. Geol. Landesanstalt, 3. Band, 3. Heft, 1897). Rein äolisch ist dagegen, wie schon aus den scharfen Rändern zu schließen, die Beanspruchung tertiärer Sandsteine bei Kutscha (S. 138) gewesen. Wie der Windschliff Quarzitgerölle — es sei nur an die bekannten facettierten Dreikanter erinnert — umgestaltet, lehren uns zwei Beispiele (S. 281 ff.). Als ein geradezu klassisches Land der Felslochbildung hat die Insel Korsika zu gelten, so daß Penck sogar (a. a. O., 1. Band, S. 214) den Vorschlag machte, gewisse Hohlformen überhaupt mit dem dort üblichen Namen „Tafoni" zu belegen. Mit Vorliebe ist der Granit das von ihnen aufgesuchte Gestein, aber sie fehlen auch im Kalkstein nicht, so daß doch wohl außer der chemischen

seiner Oberfläche einfach glatt poliert wird. Einen interessanten Fall dieser Art hat u. a. Ascherson beobachtet.[1]) Die Norm jedoch ist dies nicht, vielmehr werden da, wo der Bodenwind eine kräftigere Korrasion auszuüben imstande ist, stets sehr leicht sich jene Windtische bilden, auf welche, als Deflationsprodukte, Gilbert[2]) unsere Aufmerksamkeit gelenkt hat, und gleicherweise die vielgenannten Pilzfelsen, die man als das letzte Stadium des Abnützungsprozesses der Säule aufzufassen hat.[3]) Äußerst phantastische Gestalten dieser Gebilde sind in manchen Wüsten keine Seltenheit, während sie allerdings in anderen gänzlich fehlen,[4]) gerade wie auch die grotesken „Säulenhallen“ oder „Galerien“ nur eine regional be-

---

Verwitterung und der im Winter, bei reichlichem Schneefalle, ziemlich ergiebigen Wassererosion noch eine weitere Ursache im Spiele sein muß. Die Exposition der „tafonierten“ Felswände läßt annehmen, daß der über Korsika mit oft verheerender Energie wehende Wind in Betracht zu ziehen ist, und daß der marine Salzstaub, den er aus dem westlichen Mittelmeere heranführt, dabei eine gewisse aktive Rolle zu spielen berufen ist. An anderem Orte soll das noch zu wenig studierte Phänomen näher gewürdigt werden.

[1]) Schweinfurth bemerkt (Prof. Dr. P. Aschersons Reise nach der kleinen Oase, 16. März bis 10. Mai 1876, Petermanns Geogr. Mitteil., 1876, S. 266), daß ein breiter Gürtel von Felsplatten „durch Sandtreiben eine gletscherartige Politur“ erhalten hatte.

[2]) Gilbert, Natural Wind Blast, Report of the Wheeler Expedition, Washington 1875, S. 82.

[3]) Viele einschlägige Mitteilungen macht Walther (a. a. O., S. 24 ff., S. 402, S. 424, S. 464). Schon früher wußte De Bary (Zeitschr. d. Gesellsch. f. Erdk. zu Berlin, 1876, S. 178) zu berichten: „In Tusili sind Felsen häufig, deren Form der Gestalt von Pilzschwämmen ähnlich sieht, indem ein mächtiger Block auf einer schlanken Basis ruht“; immerhin bekunden diese Worte nicht mit voller Sicherheit, ob man es da mit Monolithen zu tun hat. Aber auch O. Fraas (Aus dem Orient, Stuttgart 1867, S. 20) und Schweinfurth (Im Herzen von Afrika, 1. Band, Leipzig 1874, S. 40) bestätigen das Dasein solcher Gebilde im Bereiche des ostafrikanischen Wüstengebietes. Aus Hochasien bildet Futterer einige schöne Paradigmen von Pilzfelsen ab (a. a. O., 2. Band, S. 310).

[4]) So fehlen sie beispielsweise ganz und gar nach Passarge (s. o.) in Südalgerien.

grenzte Verbreitung haben.[1]) Die „Monumente" der westlichen Prairie weisen einstweilen noch keine so auffälligen Unterschiede in ihren oberen und unteren Breitendimensionen auf, daß man von einem „steinernen Hutpilz" zu sprechen berechtigt wäre, aber ein Ansatz zu einem solchen ist in der Tat gemacht.

So liegt denn auch der Gedanke nicht ferne, die in Fig. 4 wiedergegebene Erscheinung des Wackelblockes im „Göttergarten" mit der Deflation in ursächliche Verbindung zu bringen; um so mehr, da an die Herauspräparierung aus einem Blockmeere, wie sie sonst als die Regel zu betrachten ist,[2]) kaum gedacht werden kann. Steht doch das merkwürdige Exemplar der Wirkung destruktiver Faktoren nahezu isoliert da, und neben den allerorts aufragenden Massiven von bizarrer Form sind umherliegende lose Trümmerstücke nur in geringer Menge vorhanden. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der längs des Talbodens besonders kräftig abschleifende Wind den kurzen Stiel des dereinstigen Monumentfelsens vollständig durchgesägt und so dessen Niedergleiten auf die Basis des Naturparkes bewirkt haben könnte, dünkt uns nicht gering. Einen strikten Beweis dafür anzutreten, ist freilich nicht gut möglich, aber es spricht dafür auch der Umstand, daß die Seitenflächen der auf winziger Unterlage sich erhebenden polyedrischen Masse deutlich die Spuren einer Abscheuerung erkennen lassen, welche schwerlich auf den seltenen Niederschlag meteorischen Wassers, weit eher vielmehr auf die Tätigkeit des Sandgebläses hinzudeuten scheinen.

„Wackelsteine" sind somit, dies ist das Ergebnis unserer

---

[1]) Auch diese Exkavationen gestatten nicht eine schablonenhafte Zurückführung auf übereinstimmende kausale Momente. Jene südwestafrikanischen Exemplare z. B., welche der Verfasser in der reichhaltigen Original-Aquarellsammlung von Prof. Pechuel-Loesche (Erlangen) sah, sind unverkennbar Zeugen einer mächtigen Erosion des Windes, und andererseits zeigte Passarge (s. o.) Photogramme vor, die auf die Verwitterung als mindestens stark prävalierende Ursache zu schließen nötigen.

[2]) Vgl. Penck, a. a. O., 2. Band, S. 151 ff.; Supan, Grundzüge der physischen Erdkunde, Leipzig 1896, S. 347 ff.

Überlegungen, stets ein Schlußpunkt langwieriger und langsam wirkender Denudationsvorgänge. Chemische Verwitterung und Wasserwirkung sind in der Mehrzahl der Fälle die vorwiegend maßgebenden Faktoren; die letztgenannte vor allem auch in Bezug auf die Wegführung der kleineren Felsblöcke, in welche die größere Masse eingebettet lag, ehe sie sich in der gegenwärtigen überraschenden Ansicht den Augen darstellte. Aber es ist auch denkbar, daß die vom Winde und seiner Festkörperladung ausgehende Aktion das anstehende Gestein an einer nachgiebigen Stelle derart bearbeitete, um die dem Boden zunächst anliegenden Teile gänzlich zu zerstören und wegzuführen, worauf dann der obere Teil, nur noch von einer Miniaturbasis getragen, in eine den Gesetzen der Statik anscheinend Hohn sprechende Lage geriet. Individuelle Untersuchung des einzelnen Vorkommnisses wird demgemäß erst die näheren Umstände für die Genese eines bestimmten „Wackelsteines“ zu ermitteln vermögen.



Fig. 1.



Logan rock, der schwebende Fels, an der Küste von Cornwall.

Fig. 2.



Pseudoglaciale Bildungen in der Sierra de Tandil, Argentinien.

Fig. 3.



Nach einer Photographie die nicht bezeichnet ist.



Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 9. Abhandlung

Dioptrische Erscheinungen
bei einäugigem Sehen und beschränktem Sehfeld

von

Ludwig Burmester

Vorgetragen am 12. Juni 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Es wird eine von alters her bekannte, aber noch nicht wissenschaftlich messend beobachtete Erscheinung sein, daß bei einäugigem Sehen eines Gegenstandes durch eine vor dem Auge senkrecht zur Sehrichtung bewegte Fingerspitze oder durch einen anderen undurchsichtigen Körper der Gegenstand ein wenig verschoben und verändert erscheint, und daß bei schwingender Bewegung der Fingerspitze auch der veränderte Gegenstand schwingt. Ein entfernter, fixierter Punkt flieht vor der bewegten Fingerspitze, bis er von ihr erreicht wird. Eine gezeichnete gerade Linie oder eine gerade Kante eines Körpers erscheint vor der bewegten Fingerspitze bewegt und veränderlich gekrümmt.

Infolge dieser Beschränkung des Sehfeldes wird das Bild des beobachteten Gegenstandes auf der Netzhaut des Auges verändert und deshalb können diese Erscheinungen als dioptrische bezeichnet werden. Der Zweck dieser Mitteilung ist, Methoden für experimentelle Messungen anzugeben, und dadurch zur Untersuchung dieser dioptrischen Erscheinungen anzuregen. Diese Messungen, die von der Sehschärfe und der Akkommodationsfähigkeit des beobachtenden Auges abhängig sind, erfordern sehr sorgfältige Beobachtungen an exakt ausgeführten Vorrichtungen.

Um durch vorläufige grundlegende, experimentelle Beobachtungen dieser dioptrischen Erscheinungen, bei denen die Sehschärfe meiner Augen noch genügte, Direktive für weitere Beobachtungen zu geben, wurde von mir eine meist aus Bestandteilen von physikalischen Apparaten provisorisch hergestellte Vorrichtung verwendet.

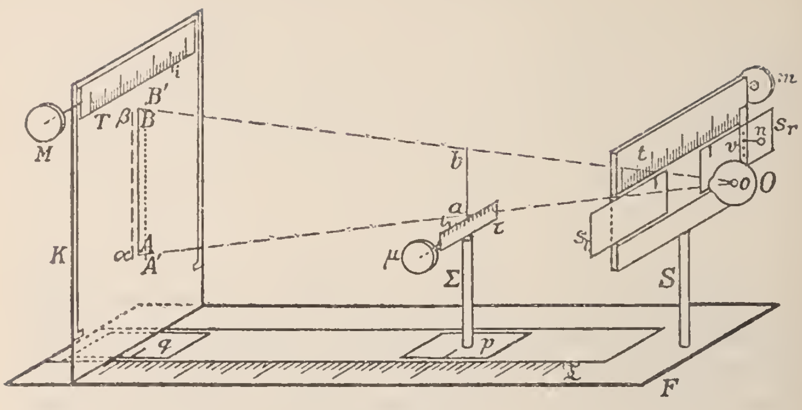


Fig. 1.

In der schematisch gezeichneten Fig. 1 steht auf einem Brett F eine feste Säule S, die eine horizontale Führung mit zwei geschwärzten Schiebern s_l, s_r trägt und mit einer Millimeterskala t versehen ist. Diese beiden Schieber können vermittels einer graduierten Mikrometerschraube m mit zwei gegensinnig gleichen Gewinden gegen, und voneinander bewegt werden, so daß die Spaltmitte zwischen diesen beiden Schiebern in unveränderter Lage bleibt. Ferner ist auch vermittels Auslösung dieser Mikrometerschraube jeder oder einer der Schieber mit der Hand frei verschiebbar. Über dieser Führung ist ein prismatischer Querstab v mit Löchern angebracht, durch die vermittels einer Nadel n in einem auf dem Schieber s_r gehefteten Papierstreifen die Wegstrecken dieses Schiebers während der Beobachtungen stichweise bestimmt werden. Vor dem Spalt befindet sich das beobachtende Auge O, dessen Drehpunkt o durch eine feste Kopfstützung auf einem an der Säule S verstellbaren, nicht eingezeichneten Beißbrett in Ruhe gehalten wird. Das Brett F enthält ferner in seiner Längsrichtung eine Führung mit einer Millimeterskala $\mathfrak{T}$ und zwei Schiebern p, q. Eine auf dem Schieber p festgestellte Säule Σ trägt eine an ihr vertikal verschiebbare horizontale Millimeterskala τ, auf der vermittels einer graduierten, auslös-

baren Mikrometerschraube μ ein Nonius mit einem Zeiger ι verschiebbar ist. Auf dem Schieber q ist senkrecht zu der Längsrichtung ein Schirm mit einem abnehmbaren Kartonblatt K festgelegt. An diesem Schirm befindet sich eine horizontale, über dem Kartonblatt vertikal verstellbare Millimeterskala T, auf der vermittels einer graduierten, auslösbaren Mikrometerschraube M ein Nonius mit einem Zeiger i bewegt wird.

Behufs der Beobachtungen wird zunächst eine sehr feine Nadel ab mit ihrer Spitze nach oben gesteckt und der Schieber p mit der Nadel in größte Entfernung von dem Auge O geschoben, dessen Hornhautscheitel 23 mm und dessen Drehpunkt o somit 36 mm von dem Spalt entfernt ist. Wenn man nun bei weit geöffnetem Spalt die Nadel fixiert und nur der eine, etwa der rechtsseitige Schieber s_r durch die Hand nach der Sehrichtung hin bewegt wird, dann verschiebt sich die Nadel vor der Schieberkante. Je mehr die Nadel dem Auge genähert wird, desto kleiner erscheint ihre Verschiebung, bis diese nicht mehr wahrnehmbar ist. Dies tritt bei meiner Beobachtung ein, wenn die Nadel von dem Spalt um 183 mm und somit von dem Drehpunkt o des Auges um 219 mm entfernt ist. Demnach kann die Nadel in dieser Stellung bei der Bewegung des Schiebers s_r als ruhend angenommen werden, und ebenso auch die Skala τ. Dasselbe Ergebnis erfolgt auch bei der Bewegung des linksseitigen Schiebers s_l.

Das Kartonblatt K ist in einen Abstand gleich 457 mm von dem Drehpunkt o des Auges gestellt und durch Visieren bei weit geöffnetem Spalt wird die Nadel ab auf das Kartonblatt projiziert, indem wir die Punkte A, B, die den Endpunkten a, b der Nadel entsprechen, durch je einen Nadelstich markieren und die erhaltene perspektive Projektion AB der Nadel fein ziehen, so daß sie für das Auge durch die Nadel verdeckt ist. Wenn nun der rechtsseitige Schieber s_r nach der Sehrichtung hin bewegt wird, dann tritt die verdeckte perspektive Projektion AB hinter der Nadel hervor und verschiebt sich vor der Schieberkante bis in die äußerste Scheinlage $\alpha\beta$, und gleichzeitig wird die Nadel sehr nahe an der

Schieberkante gesehen. Oder wenn die Schieberkante sehr nahe an die Grenze der Verdeckung der Nadel geschoben wird, dann ist die perspektive Projektion in ihre äußerste Scheinlage $\alpha\beta$ gelangt. Die Scheinlage $\alpha\beta$ ist nur wegen der Beschreibung der Beobachtungen in die Fig. 1 gezeichnet, aber nicht wirklich auf das Kartonblatt, denn dann würde sie sich mit der Beschränkung des Sehfeldes auch verschieben. Bei der Verschiebung der perspektiven Projektion von dem Beginn bis in die äußerste Scheinlage wird durch ein Loch des Querstabes v mit der Nadel n je ein Stich in jenen Papierstreifen gemacht, und dadurch die Wegstrecke des Schiebers bestimmt, die sich gleich 3 mm ergibt. Demnach beginnt bei dieser Beobachtung die Beschränkung des Sehfeldes, wenn die Schieberkante um 3 mm von der Sehrichtung entfernt ist.

Das Sichtbarwerden der durch die Nadel verdeckten perspektiven Projektion ist ein „Sehen um die Ecke". Diese Erscheinung wird dadurch erklärt, daß die von der Linie AB kommenden, an der Nadel vorbeigehenden Lichtstrahlen ein Netzhautbild dieser Linie erzeugen, dessen Lage durch die Beschränkung des Sehfeldes vermittels des Schiebers verändert wird, während das Netzhautbild der Nadel in seiner Lage verbleibt.

Jeder Stellung der Schieberkante entspricht innerhalb des beschränkten Sehfeldes auf dem Kartonblatt eine Verschiebung der Linie AB in die entsprechende Scheinlage. Diese Verschiebungen wollen wir die scheinbaren Verschiebungen der Linie AB, und reduziert auf die Skala τ die reduzierten Verschiebungen nennen, die durch die entsprechenden Einstellungen der Zeigerspitze ι an dieser Skala visierend bestimmt werden.

Um die größte reduzierte Verschiebung auf der Skala τ zu messen, wird der Drehpunkt o des Auges in der Lage ruhend gehalten, in der bei weit geöffnetem Spalt die Nadel ab die perspektive Projektion AB verdeckt, und die Zeigerspitze ι auf die Nadelachse eingestellt. Hierauf wird der rechtsseitige Schieber verschoben, bis die Linie AB in ihre

äußerste Scheinlage $\alpha\beta$ gelangt und die Zeigerspitze ι auf diese visierend eingestellt. Durch diese Einstellungen ergibt sich auf der Skala τ die größte reduzierte Verschiebung der Linie AB gleich 1,4 mm. Zwar erscheint die Schieberkante wegen ihrer Nähe vor dem Auge mit einem Schimmer; aber dennoch ist es doch möglich, diese Messungen bei Wiederholungen sehr nahe übereinstimmend auszuführen.

Bei dieser Beobachtung der Linie AB in ihrer äußersten Scheinlage $\alpha\beta$ kann die sehr nahe an die Schieberkante gelangte und in deren Schimmer gesehene Nadel durch das Auge auf das Kartonblatt projiziert und vermittels Nadelstiche markiert werden. Dadurch erhalten wir in dem beschränkten Sehfeld als Projektion der Nadel eine auf das Kartonblatt gezeichnete, rechtsseitig zu AB parallele Strecke $A'B'$, die wir die äußerste pseudoskopische Projektion der Nadel nennen, weil das zugehörige Projektionszentrum nicht in dem Drehpunkt o des Auges liegt und sich auch mit der Beschränkung des Sehfeldes verändert. Wird nun der Schieber zurückgeschoben, dann bewegt sich die perspektive Projektion AB aus ihrer äußersten Scheinlage $\alpha\beta$ zurück in ihre anfängliche Lage, in der sie für das Auge durch die Nadel ab verdeckt ist, und die pseudoskopische Projektion $A'B'$ befindet sich rechtsseitig daneben. Wenn umgekehrt das Sehfeld durch den Schieber beschränkt wird, so gelangt die perspektive Projektion AB wieder in die äußerste Scheinlage $\alpha\beta$ und gleichzeitig tritt die äußerste pseudoskopische Projektion $A'B'$ an die vorherige anfängliche Stelle von AB und wird von der Nadel verdeckt. Hiernach ergibt sich die Beziehung:

In dem durch die Schieberstellung beschränkten Sehfeld ist die größte scheinbare Verschiebung der perspektiven Projektion der Nadel gleich dem Abstand der äußersten pseudoskopischen Projektion von der perspektiven Projektion.

Die Beobachtung ergibt für diese scheinbare Verschiebung 3 mm. und somit erhalten wir auch bei der gewählten Anord-

nung das Verhältnis der scheinbaren Verschiebung zu der vorhin gemessenen reduzierten Verschiebung 1,4 mm.

Diese scheinbare Verschiebung der perspektiven Projektion der Nadel kann aber auf dem Kartonblatt in einfacherer Weise an der Millimeterskala T gemessen werden, die nahe an den Punkt B geschoben wird, indem wir die Zeigerspitze i vermittels der Mikrometerschraube M auf den Punkt B einstellen, und wenn sie bei der Beschränkung des Sehfeldes mit dem Punkt B in die äußerste Scheinlage β gelangt ist, sie wieder so weit zurückschieben, bis sie visierend auf die Nadelspitze b eingestellt ist. Dadurch ergibt sich die größte scheinbare Verschiebung an der Millimeterskala T. Zwar erscheinen die Teilstriche in dem beschränkten Sehfeld zusammengeschoben, und die Strecke zwischen den beiden Einstellungen wird ein wenig verkleinert gesehen, aber die Messung der größten scheinbaren Verschiebung auf dem Kartonblatt ist hiervon nicht abhängig.

Wenn von einer anderen Person durch Drehung der Mikrometerschraube μ der Schieber s_r sukzessive in bestimmte Wegstrecken geschoben wird, während der Beobachter in diesen Stellungen der Schieberkante vermittels der Mikrometerschraube μ die Einstellung der Zeigerspitze ι auf die jeweilige Scheinlage der perspektiven Projektion bewirkt und die reduzierte Verschiebung angibt, so kann hierdurch die subjektive Abhängigkeit der reduzierten Verschiebung von der Beschränkung des Sehfeldes ermittelt werden. In analoger Weise kann der Beobachter auch vermittels der Mikrometerschraube M durch die visierend auf die Nadelspitze b eingestellte Zeigerspitze i die jeweilige scheinbare Verschiebung messen und die subjektive Abhängigkeit derselben von der Beschränkung des Sehfeldes ermitteln.

Um nach Wegnahme der Nadel, die hauptsächlich zur Veranschaulichung der beschriebenen Beobachtungen diente, die Verschiebungen einer auf das Kartonblatt gezeichneten vertikalen Linie AB zu messen, kann die Nadel durch eine kleine an der dann höher geschobenen Skala τ befestigte Spitze ersetzt werden. Diese Beobachtungen wurden nur bei einer für mein

Sehen günstige Anordnung ausgeführt. Um aber die Abhängigkeit der größten reduzierten und der größten scheinbaren Verschiebung der Linie AB sowie der Beschränkung des Sehfeldes von der Entfernung dieser Linie von dem Drehpunkt des Auges zu ermitteln, werden viele Beobachtungen erforderlich sein, bei denen durch Akkommodation die Linie AB und die Skala τ deutlich zu sehen sind.

Um die Beobachtungen an einer horizontalen Nadel, deren Länge 40 mm ist, auszuführen, wird sie in Fig. 1 mit ihrer Mitte an der Nadel ab parallel zu dem Kartonblatt K befestigt, so daß die Mitte in der auf dem Kartonblatt senkrechten, durch die Spaltmitte gehenden Blicklinie liegt. Bei weit geöffnetem Spalt wird die perspektive Projektion der Nadel auf das Kartonblatt visierend bestimmt und die Länge durch Einstellungen der Zeigerspitze i an der herabgeschobenen Skala T gleich 83,6 mm gemessen. Vermittels der Mikrometerschraube m werden die beiden Schieber s_l, s_r gleichzeitig gegeneinander bewegt, bis die beiden Nadelenden sehr nahe an den Schieberkanten erscheinen. Bei dieser engsten Spaltöffnung, die 2,9 mm beträgt, wird visierend die pseudoskopische Projektion der Nadel bestimmt und die Länge an der Skala T gleich 89,4 mm gemessen. Wegen des deutlichen Sehens ist es zweckmäßig, diese Projektionen durch vertikale Striche auf dem Kartonblatt zu begrenzen, die symmetrisch zu jener Blicklinie liegen. Da nach diesen Beobachtungen die pseudoskopische Projektion 5,8 mm größer ist als die perspektive Projektion, so ist bei dieser engsten Spaltöffnung die größte scheinbare Verkürzung der perspektiven Projektion der Nadel auch gleich 5,8 mm, die Scheinlänge der perspektiven Projektion ist demnach gleich 77,8 mm. Und die entsprechende an der Skala τ gemessene reduzierte Länge beträgt 37,9 mm.

Wenn wir den Spalt erweitern und wieder bis auf 2,9 mm verengern, so daß die Nadel zwischen ihm fast eingeschlossen erscheint, dann nähern sich die begrenzenden Striche der pseudoskopischen Projektion, bis sie an die Enden der Nadel verschoben gesehen werden. Gleichzeitig nähern sich die begrenzenden

Striche der perspektiven Projektion bis auf den Abstand 77,8 mm, sie erscheinen hinter der Nadel und zeigen dadurch deutlich die in diesem beschränkten Sehfeld entstehende scheinbare Verkürzung der perspektiven Projektion der Nadel. Wird nun der Schieber p mit der Nadel dem Kartonblatt näher geschoben, bis sie für das Auge mit der Scheinlänge der perspektiven Projektion in Deckung gelangt, dann ergibt sich, daß diese Annäherung an das Kartonblatt nach Ablesung an der Skala $\mathfrak{T}$ ungefähr 18 mm beträgt und der entsprechende Abstand der Nadel von dem Drehpunkt des Auges 237 mm ist. In dieser Stellung der Nadel ist demnach ihre pseudoskopische Projektion gleich der Scheinlänge der perspektiven Projektion. Diese Annäherung ist deshalb nicht genau meßbar, weil die betreffenden Projektionsgeraden einen verhältnismäßig kleinen Winkel einschließen.

Bei der ersten Stellung ist die Nadel von dem Drehpunkt o des Auges 219 mm entfernt; und der Abstand des Kartonblattes von demselben ist gleich 457 mm. Hiernach ergibt sich, da die Länge der Nadel 40 mm ist, für den Gesichtspunkt o die berechnete Länge l ihrer perspektiven Projektion aus der Proportion:

$$\frac{l}{40} = \frac{457}{219}, \quad l = 83{,}47 \text{ mm.}$$

Die beobachtete Länge der perspektiven Projektion ist 83.6 mm und demnach um 0,13 mm größer als die berechnete Länge. Es ist also der Beobachtungsfehler + 0,13 mm, und somit erhalten wir Kenntnis von der Genauigkeit dieser Beobachtung. Aber trotz dieses kleinen Fehlers ist diese Beobachtung nicht geeignet, um umgekehrt den Abstand des Gesichtspunktes von dem Kartonblatt zu bestimmen; denn zu diesem Zweck müßte die Länge der perspektiven Projektion einer sehr viel längeren Nadel beobachtend gemessen werden. Demnach ist auch bei der pseudoskopischen Projektion der Abstand des Gesichtspunktes von dem Kartonblatt durch diese Beobachtung nicht zu bestimmen.

Man hat bisher angenommen, daß bei der Beobachtung

durch enge Öffnungen der Gesichtspunkt sich in der Pupillenmitte befinde, deren Abstand von dem Drehpunkt des Auges etwa 10 mm ist, also bei unseren Beobachtungen von der Nadel 209 mm und von dem Kartonblatt 447 mm entfernt ist. Hiernach ergäbe sich die berechnete Länge λ der pseudoskopischen Projektion aus der Proportion:

$$\frac{\lambda}{40} = \frac{447}{209}, \quad \lambda = 85{,}5.$$

Da die beobachtete Länge der pseudoskopischen Projektion 89,4 mm ist, so würde bei jener Annahme der Beobachtungsfehler $+ 3{,}9$ mm betragen und im Vergleich zu jenem kleinen Beobachtungsfehler $+ 0{,}13$ derartig groß sein, so daß der Gesichtspunkt bei dieser pseudoskopischen Projektion nicht in der Pupillenmitte liegen kann, sondern sich vor ihr befinden muß. Aus den Beobachtungen folgt, daß dieser Gesichtspunkt während der Beschränkung des Sehfeldes von dem Drehpunkt des Auges ausgehend wandert, bei einer besonderen Beschränkung die Pupillenmitte durchschreitet und außerhalb des Auges noch weiter gelangt, bis das kleinste Sehfeld erreicht ist.

Statt der Nadel kann man auch in gleicher Weise eine Strecke auf der Skala τ beobachten, indem man durch die dieser Strecke entsprechenden perspektiven Projektion und pseudoskopische Projektion die scheinbare Verkürzung bestimmt, und auch auf der Skala τ die zugehörige reduzierte Länge mißt. Wenn ferner diese Beobachtungen für verschiedene Strecken ausgeführt werden, dann wird sich die subjektive Abhängigkeit jener Größen von den Größen dieser Strecken ergeben.

In Fig. 2 ist auf der Säule S eine Irisblende J und auf der Säule Σ ein Drahtquadrat $abcd$ von 32 mm äußerer Seitenlänge parallel zu dem Kartonblatt K befestigt, so daß der Mittelpunkt der Irisblende und der Mittelpunkt des Drahtquadrates in der auf dem Kartonblatt senkrechten Blicklinie liegen. Die Öffnung der Irisblende kann durch einen an ihr befindlichen Griff g verändert werden. Die Anordnung betreffs der Ab-

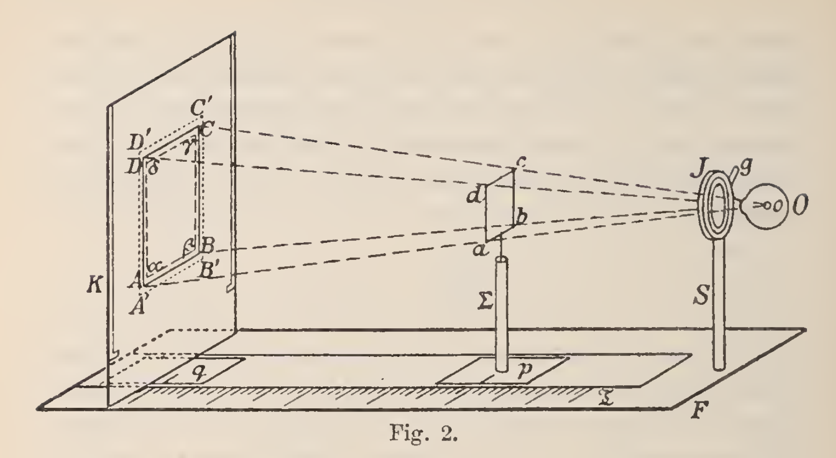


Fig. 2.

stände der Irisblende, des Drahtquadrates und des Kartonblattes von dem Drehpunkt o des Auges ist die gleiche wie vorhin, und die Beobachtungen erfolgen in derselben Weise. Bei weit geöffneter Irisblende wird die quadratische perspektive Projektion $ABCD$ des Drahtquadrates $abcd$ auf das Kartonblatt visierend bestimmt und gezeichnet. Dieses Quadrat $ABCD$, dessen Seitenlänge 66,5 mm ist, wird für das Auge durch das Drahtquadrat verdeckt. Ferner wird bei der bis auf 1,8 mm Durchmesser verkleinerten Öffnung, in der das Drahtquadrat fast dicht eingeschlossen erscheint, die größte quadratische pseudoskopische Projektion $A'B'C'D'$ des Drahtquadrates $abcd$ auf das Kartonblatt visierend bestimmt und gezeichnet. Dieses Quadrat $A'B'C'D'$, dessen Seitenlänge sich gleich 71.9 mm ergibt, ist ähnlich gelegen zu dem Quadrat $ABCD$; und bei dieser Beschränkung des Sehfeldes ist hiernach die Differenz der Seitenlängen dieser Quadrate 5.4 mm. Die Seitenlänge der kleinsten quadratischen Scheinphase $\alpha\beta\gamma\delta$, in welche die quadratische perspektive Projektion $ABCD$ bei dieser Beschränkung des Sehfeldes gelangt, ist demnach gleich $66{,}5 - 5{,}4 = 61{,}1$ mm. In die Fig. 2 ist die zu dem Quadrat $ABCD$ auch ähnlich gelegene Scheinphase $\alpha\beta\gamma\delta$ nur wegen der Beschreibung dieser Beobachtungen gezeichnet, aber nicht wirklich auf das Kartonblatt, denn dann würde sie sich mit der Be-

schränkung des Sehfeldes auch verändern. Bei der Beobachtung des Drahtquadrates tritt die bekannte Erscheinung ein, daß es durch die verengerte Öffnung deutlicher gesehen wird als im unbeschränkten Sehfeld.

Wenn wir die Öffnung erweitern und wieder bis auf den Durchmesser 1,8 mm verengern, dann verkleinert sich die perspektive Projektion und sie gelangt in ihre kleinste Scheinphase $\alpha\beta\gamma\delta$, die von dem Drahtquadrat $abcd$ umrahmt, aber entfernt schwebend erscheint. Gleichzeitig tritt dann die pseudoskopische Projektion $A'B'C'D'$ hinter das Drahtquadrat und wird für das Auge von demselben verdeckt. Wird nun der Schieber p mit dem Drahtquadrat dem Kartonblatt näher geschoben, bis es die Scheinphase verdeckt, dann beträgt diese Annäherung nach Ablesung an der Skala $\mathfrak{T}$ ungefähr 18 mm; und in dem so beschränkten Sehfeld ist demnach die Scheinphase eine pseudoskopische Projektion des in dieser Stellung befindlichen Drahtquadrates. Dieselben Ergebnisse erhalten wir, wenn das Drahtquadrat so gestellt ist, daß die Diagonalen beziehentlich horizontal und vertikal gelegen sind.

Wird anstatt des Drahtquadrates ein Drahtkreis von 45,5 mm äußerem Durchmesser auf der Säule Σ so befestigt, daß er parallel zu dem Kartonblatt und zentrisch zu der Irisblende ist, dann erscheinen bei der Beobachtung die drei Kreise der perspektiven Projektion, der größten pseudoskopischen Projektion und der kleinsten Scheinphase mit dem Drahtkreis in konzentrischer Lage. Für die Durchmesser der perspektiven Projektion und der pseudoskopischen Projektion ergeben sich respektive die Größen 95,0 mm und 101,5 mm. Demnach ist der Durchmesser der kleinsten Scheinphase um die Differenz $101{,}5 - 95{,}0 = 6{,}5$ mm kleiner als der der perspektiven Projektion und somit gleich 88,5 mm. Ferner ergibt die Messung für den reduzierten Durchmesser der kleinsten Scheinphase 42,7 mm. Während der Verengerung der Öffnung beginnt bei ihrem Durchmesser von 8 mm die Verkleinerung der auf das Kartonblatt gezeichneten perspektiven Projektion und der pseudoskopischen Projektion, und die kleinste Scheinphase erfolgt bei der Verengerung bis auf 1,5 mm Durch-

messer. Die perspektive Projektion tritt dann in ihre kleinste Scheinphase, die innerhalb des Drahtkreises zentrisch, aber von ihm entfernt schwebend erscheint, und die gleichzeitig sich verkleinernde pseudoskopische Projektion tritt hinter den Drahtkreis, so daß sie von ihm für das Auge verdeckt wird. Die Verdeckung der kleinsten Scheinphase durch den Drahtkreis erfolgt, wenn wir den Drahtkreis um ungefähr 14 mm näher an das Kartonblatt schieben. Und diese kleinste Scheinphase kann als eine pseudoskopische Projektion des so verschobenen Drahtkreises betrachtet werden. Indem wir dann bei weiter Öffnung den in dieser Stellung befindlichen Drahtkreis visierend auf das Kartonblatt projizieren und zeichnen, erhalten wir die kleinste Scheinphase auch als die perspektive Projektion des so verschobenen Drahtkreises.

Da der Drehpunkt o des Auges von der Öffnung der Irisblende um 36 mm und von dem Kartonblatt um 457 mm entfernt ist, so ergibt sich der berechnete Durchmesser x der perspektiven Projektion des Randes der bis auf 1,5 mm verengerten Öffnung aus der Proportion:

$$\frac{x}{1{,}5} = \frac{457}{36}, \quad x = 19{,}0 \text{ mm.}$$

Bei der Beobachtung erscheint dieser verschwommen gesehene Rand für das Auge auf dem Kartonblatt als ein verschwommener Kreis von ungefähr 130 mm Durchmesser.

Bei allen diesen Beobachtungen ist der Abstand des Hornhautscheitels des Auges von dem Spalt in Fig. 1 und von der Öffnung der Irisblende in Fig. 2 stets gleich 23 mm, weil die Vorrichtung einen kleineren Abstand nicht ermöglichte. Wenn aber diese Beobachtungen durch eine mit entsprechend kleiner Einfassung versehene Irisblende ausgeführt werden, an der sich das Auge sehr nahe befinden kann, so werden andere Ergebnisse der Messungen erfolgen; denn diese dioptrischen Erscheinungen sind auch von jenem Abstand abhängig. Wahrscheinlich können Veränderungen der Pupille auch wie die Veränderungen der Öffnung der Irisblende solche dioptrische Erscheinungen bewirken.





Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 10. Abhandlung

Zur Theorie der trigonometrischen Reihen und der Entwicklungen nach Kugelfunktionen

von

Heinrich Burkhardt

Vorgelegt am 12. Juni 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Der Satz von der Entwickelbarkeit einer geeigneten Bedingungen genügenden Funktion einer reellen Veränderlichen nach den Legendreschen Polynomen (zonalen Kugelfunktionen) wird gewöhnlich folgendermaßen bewiesen: zuerst wird gezeigt, daß er richtig ist, wenn die Veränderliche in einen der Endpunkte des Intervalls $(-1 \cdots +1)$ fällt, für das die Entwicklung gelten soll; daraus wird dann die Entwicklung einer Funktion zweier Winkel nach Kugelflächenfunktionen abgeleitet, und aus diesem allgemeinen Satz wird erst wieder durch Spezialisierung der zuerst genannte gewonnen.[1] Doch hat schon vor geraumer Zeit H. Laurent[2]) eine Beweismethode skizziert, bei der zuerst die mit einem bestimmten Glied abgebrochene Reihe durch die von ihm neu gefundene Christoffelsche Formel summiert und dann die Frage mit Hilfe der Laplaceschen asymptotischen Darstellung der Kugelfunktionen für große Werte des Index auf die entsprechende Frage für trigonometrische Reihen zurückgeführt wird. Das setzt voraus, daß der Sinn, in dem diese Darstellung wirklich als Näherungsformel angesehen werden kann, genau festgelegt und der bei ihrer Benutzung begangene Fehler abgeschätzt wird; was auf dem von Laplace selbst vorgezeichneten Weg mühsam ist[3]), auf dem von Herrn Darboux eingeschlagenen[4]) aber eben die

[1]) Auch der Beweis bei U. Dini, Serie di Fourier, p. 278, macht von Sätzen Gebrauch, die wesentlich der Theorie der Kugelfunktionen zweier Argumente angehören.

[2]) J. de math. (3) 1, 1875, p. 394.

[3]) Man vergleiche etwa die Darstellung bei Dini, Ann. di mat. (2) 7, 1876, p. 265–271.

[4]) J. de math. (3) 4, 1878, p. 40.

allgemeine Theorie des Zusammenhangs zwischen der Größenordnung der Koeffizienten einer Potenzreihe und den auf ihrem Konvergenzkreis gelegenen Singularitäten voraussetzt. Auch hebt schon Darboux hervor, daß die Untersuchung in doppelter Beziehung einer Ergänzung bedarf: es muß einmal gezeigt werden, daß die bei Benutzung der Näherungsformel vernachlässigten Glieder den Schluß nicht stören, und ferner muß, da sie nicht bis an die Enden des genannten Intervalls heran gilt, bei ihrer Integration über das ganze Intervall für die Endstrecken noch eine besondere ergänzende Untersuchung geführt werden. Beides zusammen erfordert viel Raum und Sorgfalt.[1]) Bei dem Versuch, die Darstellung der Sache für Vorlesungszwecke zu vereinfachen, hat sich mir ein Beweisverfahren dargeboten, das von jenen „etwas beschwerlichen Sätzen"[2]) überhaupt nicht mehr Gebrauch macht, sondern statt dessen nur die mit einfacheren Mitteln zu leistende Bestimmung der Größenordnung der Legendreschen Polynome für große Werte des Index benutzt, dabei auch nicht mehr auf die Theorie der trigonometrischen Reihen rekurriert, sondern die dort ausgebildeten Schlußweisen direkt auf die zu untersuchenden Reihen anwendet. Außerdem gebrauche ich von der Theorie der Legendreschen Polynome — um die erforderlichen Formeln gleich hier zusammenzustellen — selbstverständlich die Integraltheoreme

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 \text{ für } m \gtrless n, \\ \dfrac{2}{2n+1} \text{ für } m = n \end{cases} \qquad 1)$$

[1]) Ib., p. 386—390. Die neue Darstellung desselben Beweisgangs bei W. Kapteyn, nieuw archief voor wiskunde (2) 8, 1907, p. 26, ist in diesen beiden Beziehungen unvollständig. — Die auf den Cauchyschen Residuensätzen und die auf der Theorie der Integralgleichungen beruhenden Beweise fallen auch nicht einfacher aus, wenn der Satz in demselben Umfange bewiesen werden soll.

[2]) C. Neumann, Über die nach Kreis-, Kugel- und Zylinderfunktionen fortschreitenden Entwicklungen, p. VII.

und die Christoffelsche Gleichung:

$$A_n(x,\mu)=\tfrac{1}{2}P_0(x)P_0(\mu)+\tfrac{3}{2}P_1(x)P_1(\mu)+\cdots+\frac{2n+1}{2}P_n(x)P_n(\mu)$$
$$=\frac{n+1}{2}\,\frac{P_{n+1}(x)P_n(\mu)-P_n(x)P_{n+1}(\mu)}{x-\mu}; \qquad 2)$$

sonst aber nur noch die im ganzen Intervall geltende Ungleichung:

$$|P_n(x)|\leq 1, \qquad 3)$$

die aus einer bekannten Rekursionsformel[1]) sich ergebende Relation

$$\int_a^b P_n(x)\,dx=\frac{1}{2n+1}\left[P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x)\right]_a^b \qquad 4)$$

und die speziellen Gleichungen:

$$P_0(x)=1, \qquad 5)$$
$$P_n(1)=1, \qquad 6)$$
$$P_n(-1)=(-1)^n. \qquad 7)$$

§ 1. Bestimmung der Größenordnung der Legendreschen Polynome für große Werte des Index.

Bekanntlich ist für reelle nicht negative α:

$$\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^n<e^{-\alpha},$$

also folgt:

$$\left|1-\frac{\alpha+i\beta}{n}\right|^n=\left(1-\frac{2\alpha}{n}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}\leq e^{-\alpha+\frac{\alpha^2+\beta^2}{2n}}, \qquad 8)$$

solange

$$\alpha-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2n}\geq 0 \qquad 9)$$

ist.

---

[1]) Vgl. etwa die Zusammenstellung solcher Rekursionsformeln bei F. Neumann, Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen, pag. 60—61. Die hier benutzte ist dort mit II bezeichnet.

Nach dieser Vorbereitung gehen wir aus von der von Laplace gefundenen Gleichung

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x + i\sqrt{1 - x^2}\cos\varphi)^n\, d\varphi \\
&= \Re\,\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x + i\sqrt{1 - x^2}\cos\varphi)^n\, d\varphi
\end{aligned}
\tag{10}
$$

und nehmen in ihr die von ihm angegebenen Substitutionen vor:

$$
\begin{gathered}
x + i\sqrt{1 - x^2} = \xi. \qquad x = \tfrac{1}{2}(\xi + \xi^{-1}), \\
i\sqrt{1 - x^2} = \tfrac{1}{2}(\xi - \xi^{-1}), \\
a^2 = 1 - \xi^{-2} = 2(1 - x^2) + 2\,i\,x\sqrt{1 - x^2} \\
\sin\frac{\varphi}{2} = z = \frac{u}{\sqrt{n}},
\end{gathered}
\tag{11}
$$

$$x + i\sqrt{1 - x^2}\cos\varphi = \xi\cos^2\frac{\varphi}{2} + \xi^{-1}\sin^2\frac{\varphi}{2} = \xi(1 - a^2 z^2).$$

Damit geht sie über in:

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= \Re\,\frac{4\,\xi^n}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}(1 - a^2 z^2)^n \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \\
&= \Re\,\frac{4\,\xi^n}{\pi\sqrt{n}}\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2n}}\left(1 - \frac{a^2 u^2}{n}\right)^n \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{n}}}.
\end{aligned}
$$

Da der reelle Bestandteil einer komplexen Größe, absolut genommen, höchstens gleich ihrem absoluten Betrag, da ferner $|\xi| = 1$ und im ganzen Integrationsintervall

$$1 - \frac{u^2}{n} > \frac{1}{2}$$

ist, so folgt daraus weiter:

$$|P_n(x)| \leq \frac{4\sqrt{2}}{\pi\sqrt{n}} \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2n}} \left|1 - \frac{a^2 u^2}{n}\right|^n du.$$

Wird die dabei auftretende Größe $a^2 u^2$ in ihren reellen und imaginären Bestandteil zerlegt:

$$a^2 u^2 = \alpha + i\beta,$$

so ergibt sich:

$$\alpha = 2(1-x^2)u^2, \quad \beta = 2x\sqrt{1-x^2}\,u^2, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 4(1-x^2)u^4,$$

$$\alpha - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2n} = 2(1-x^2)u^2\left(1 - \frac{u^2}{n}\right) \geq (1-x^2)u^2;$$

die Bedingung 9) ist also für alle x des Intervalls $(-1 \cdots +1)$ und für alle u des Integrationsintervalls erfüllt. Daher kann man die Formel 8) anwenden und schreiben:

$$|P_n(x)| \leq \frac{4\sqrt{2}}{\pi\sqrt{n}} \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2n}} e^{-(1-x^2)u^2} du < \frac{4\sqrt{2}}{\pi\sqrt{n}} \int_0^{\infty} e^{-(1-x^2)u^2} du,$$

d. i.[1]):

$$|P_n(x)| < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{12}$$

Daraus ergibt sich weiter, mit Hilfe einer ebenfalls bekannten Rekursionsformel[2]):

$$|P_n'(x)| < \frac{4\sqrt{2n}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}^3}. \tag{13}$$

Wendet man dasselbe Verfahren auf die Differenz

$$P_{n+2}(x) - P_n(x)$$

---

[1]) Daß in der Formel 12) die zweite und nicht wie bei Laplace die vierte Wurzel aus $1-x^2$ im Nenner erscheint, liegt an der roheren Abschätzung und ist für unseren Zweck gleichgültig.

[2]) Gleichung A) an der p. 5 unter 1) zitierten Stelle.

an, so erhält man unter dem Integralzeichen außer den in 10) auftretenden noch einen Faktor:

$$(x + i\sqrt{1 - x^2}\cos\varphi)^2 - 1,$$

der durch die Substitutionen 11) in

$$a^2(\xi^2 - 2\,\xi^2 z^2 + \xi^2 a^2 z^4)$$

übergeht. Dabei ist der absolute Betrag der Klammer höchstens gleich $\frac{5}{2}$, der von a^2 ist $2\sqrt{1 - x^2}$; es ergibt sich also:

$$|P_{n+2}(x) - P_n(x)| < \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi}}. \tag{14}$$

Das Wesentliche an diesen Resultaten für uns ist, daß die Funktion

$$\sqrt{n}\,|P_{n+2}(x) - P_n(x)|$$

im ganzen Intervall $(-1 \cdots +1)$, einschließlich der Grenzen, die Funktionen

$$\sqrt{n}\,|P_n(x)|, \qquad \frac{1}{\sqrt{n}}\,|P'_n(x)|$$

aber wenigstens in jedem Teilintervall, das ganz im Innern dieses Intervalls liegt, unterhalb einer von n und x unabhängigen endlichen Grenze bleiben.

§ 2. Beweis der Entwickelbarkeit einer Funktion von beschränkter Schwankung nach den Legendreschen Polynomen.

Nach dieser Vorbereitung gliedert sich nun der eigentliche Beweis folgendermaßen:

I. Aus der Definition der Funktion $A_n(x, \mu)$ ergibt sich unter Zuhilfenahme von 4) und 7):

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{x} A_n(x, \mu)\,d\mu &= \tfrac{1}{2}P_0(x)(P_1(x)+1) + \tfrac{1}{2}P_1(x)(P_2(x) - P_0(x)) \\ &+ \cdots + \tfrac{1}{2}P_n(x)(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}P_n(x)P_{n+1}(x).\end{aligned} \tag{15}$$

also wegen (12):

$$\lim_{n=\infty} \int_{-1}^{x} A_n(x, \mu)\, d\mu = \tfrac{1}{2}; \qquad 16)$$

und zwar gleichmäßig in jedem Teilintervall, das ganz im Innern von $(-1 \cdots +1)$ liegt.

II. Seien a, b irgend zwei Punkte des Intervalls $(-1 \cdots +1)$. Wenn x nicht dem Intervall $(a \ldots b)$ angehört, so ist die Funktion $(x-\mu)^{-1}$, als Funktion von μ betrachtet, in diesem Intervall monoton; man kann sie also bei Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes vor das Integralzeichen ziehen und findet so: es gibt in diesem Intervall mindestens einen Punkt c von der Art, daß die Gleichung gilt:

$$\begin{aligned}\int_a^b A_n(x,\mu)\, d\mu = \frac{n+1}{2} \Bigg\{ & \frac{1}{x-a} \left(\frac{P_{n+1}(x)}{2n+1} [P_{n+1}(\mu) - P_{n-1}(\mu)]_a^c \right. \\ & \left. - \frac{P_n(x)}{2n+3} [P_{n+2}(\mu) - P_n(\mu)]_a^c \right) \\ & + \frac{1}{x-b} \left(\frac{P_{n+1}(x)}{2n+1} [P_{n+1}(\mu) - P_{n-1}(\mu)]_c^b \right. \\ & \left. - \frac{P_n(x)}{2n+3} [P_{n+2}(\mu) - P_n(\mu)]_c^b \right) \Bigg\}. \end{aligned} \qquad 17)$$

Wendet man dann auf die hier auftretenden Funktionen von a, b, c die Ungleichung 14), auf die von x die Ungleichung 3) an, so findet man:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b A_n(x, \mu)\, d\mu = 0, \qquad 18)$$

und zwar gleichmäßig für alle x von jedem Teilintervall von $(-1 \ldots +1)$, das mit $(a \ldots b)$ keinen Punkt (auch keinen Endpunkt) gemein hat.

III. Aus I und II folgt, daß die Grenzgleichung

$$\lim_{n=\infty} \int_b^x A_n(x, \mu)\, d\mu = \tfrac{1}{2}$$

gleichmäßig gilt, wenn x auf ein Intervall $(-1+\varepsilon \ldots 1-\varepsilon)$ und b auf ein Intervall $(-1 \ldots x-\varepsilon)$ beschränkt wird; wobei ε irgend eine positive Größe < 2 bedeuten kann.

IV. Fällt x mit b zusammen, so kann man nicht so schließen. Man teile dann das Intervall $(a \ldots x)$ durch Einschaltung eines geeignet gewählten Zwischenpunktes — etwa $x - \frac{1}{n}$ — in zwei Teile. Für den ersten dieser Teile gilt die Gleichung 17), und dabei sind $(x-a)^{-1}$ und $(x-b)^{-1}$ höchstens gleich n: es ergibt sich also durch Anwendung der Ungleichungen 12) und 14)

$$\left|\int_a^{x-\frac{1}{n}} \Delta_n(x,\mu)\, d\mu\right| < \frac{n+1}{2n+1} \cdot n \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{80\sqrt{2}}{\sqrt{(n-1)\pi}}$$

und das ist für $n > 2$ sicher:

$$< \frac{192\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Für den zweiten Teil dagegen benutzen wir zunächst unter dem Integralzeichen den Mittelwertsatz der Differentialrechnung, wodurch wir

$$\int_{x-\frac{1}{n}}^{x} \Delta_n(x,\mu)\, d\mu$$

$$= -\frac{n+1}{2} \int_0^{\frac{1}{n}} \{P_{n+1}(x)\, P_n'(x-\Theta h) - P_n(x)\, P_{n+1}'(x-\Theta h)\}\, dh$$

erhalten, und dann den ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung, sowie die Ungleichungen 12) und 13); wir finden so:

$$\left|\int_{x-\frac{1}{n}}^{x} \Delta_n(x,\mu)\, d\mu\right|$$

$$< \frac{n+1}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{16}{\pi} \left(\sqrt{\frac{n}{n+1}} + \sqrt{\frac{n+1}{n}}\right) \cdot \frac{1}{(1-x^2)^2},$$

d. h.:

$$< \frac{27}{\pi} \cdot \frac{1}{(1-x^2)^2}.$$

Beides zusammen ergibt:

$$\left|\int_a^x A_n(x,\mu)\,d\mu\right| < \frac{60}{(1-x^2)^2}. \qquad 19)$$

Man kann also zu jedem ganz im Innern von $(-1 \cdots +1)$ gelegenen Teilintervall eine von a, x und n unabhängige Zahl G so bestimmen, daß die Ungleichung

$$\left|\int_a^x A_n(x,\mu)\,d\mu\right| < G \qquad 20)$$

für alle x dieses Teilintervalls, für alle a des Intervalls $(-1 \ldots x)$ und für alle $n \geq 2$ besteht.

V. Daraus folgt endlich noch: Für jedes ganz im Innern von $(-1 \cdots +1)$ gelegene Teilintervall kann man eine Zahl G so bestimmen, daß die Ungleichung

$$\left|\int_a^b A_n(x,\mu)\,d\mu\right| < G$$

für alle x dieses Teilintervalls und für alle a, b des Intervalls $(-1 \ldots x)$ besteht.

Damit sind nun aber alle Vorbedingungen für die Anwendung der von Herrn C. Jordan[1]) vorgezeichneten Schlußweise auf die Funktion $A_n(x)$ gegeben.

VI. Zunächst ergibt eine abermalige Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes, sobald die Funktion $f(x)$ von beschränkter Schwankung ist, auf Grund von 18) die Grenzgleichung:

$$\lim_{n=\infty} \int_{-1}^b f(\mu)\,A_n(x,\mu)\,d\mu = 0, \qquad 21)$$

und zwar gleichmäßig für alle x von jedem Teilintervall, das mit $(-1 \ldots b)$ keinen Punkt (auch keinen Endpunkt) gemein hat.

---

[1]) Cours d'analyse 2, p. 217 der 1. Auflage. — Die Unentbehrlichkeit eines Resultats wie das hier unter V abgeleitete für derartige Schlüsse hat Herr C. Neumann betont, p. 41 der p. 4 unter 2) zitierten Schrift.

VII. Das Integral

$$\int_{-1}^{x} f(\mu)\, \Delta_n(x,\mu)\, d\mu$$

kann geschrieben werden, wenn die Funktion f an der Stelle x links stetig ist:

$$\int_{-1}^{x-\varepsilon} f(\mu)\, \Delta_n(x,\mu)\, d\mu + f(x-0)\int_{x-\varepsilon}^{x} \Delta_n(x,\mu)\, d\mu$$
$$+\int_{x-\varepsilon}^{x} (f(\mu) - f(x-0))\, \Delta_n(x,\mu)\, d\mu.$$

Wird auf den letzten Bestandteil wieder der zweite Mittelwertsatz angewendet, so geht er über in:

$$(f(x-\varepsilon) - f(x-0))\int_{x-\varepsilon}^{c} \Delta_n(x,\mu)\, d\mu,$$

wo c einen Wert zwischen $x-\varepsilon$ und x bedeutet. Man kann dann wegen der vorausgesetzten Stetigkeit und wegen des Satzes V das ε so klein wählen, daß dieser letzte Bestandteil unterhalb einer beliebig vorgegebenen Grenze fällt und auch unter ihr bleibt, wenn nachher n vergrößert wird; und dann kann man n noch so groß wählen, daß der erste Bestandteil nach VI beliebig klein wird und das Integral im zweiten Bestandteil beliebig wenig von seiner unter III angegebenen Grenze abweicht. So ergibt sich:

$$\lim_{n=\infty} \int_{-1}^{x} f(\mu)\, \Delta_n(x,\mu)\, d\mu = \tfrac{1}{2} f(x-0). \tag{22}$$

und zwar gleichmäßig in jedem Intervall, das ganz dem Innern von $(-1 \cdots +1)$ angehört und in dem die Funktion $f(x)$ stetig ist.

VIII. Ebenso ergibt sich, wenn $f(x)$ an der betrachteten Stelle x rechtseitig stetig ist:

$$\lim_{n=\infty} \int_{x}^{1} f(\mu)\, \Delta_n(x,\mu)\, d\mu = \tfrac{1}{2} f(x+0). \tag{23}$$

IX. Beide Formeln zusammen geben das zu beweisende Resultat: Ist die Funktion $f(x)$ im Intervall $(-1 \cdots +1)$ von beschränkter Schwankung, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(x) \int_{-1}^{+1} f(\mu) P_n(\mu)\, d\mu$$

an jeder Stelle, an der $f(x)$ stetig oder höchstens von der ersten Art unstetig ist, gegen:

$$\tfrac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}. \qquad 24)$$

Auch ergibt sich aus dem Beweis die Gleichmäßigkeit dieser Konvergenz für jedes Stetigkeitsintervall der Funktion $f(x)$, das ganz dem Innern von $(-1 \cdots +1)$ angehört.

Soll auch bewiesen werden, daß die Reihe für $x = +1$ gegen $f(x-0)$ konvergiert, so bedarf die Schlußweise nur der Modifikation, daß an Stelle der Christoffelschen Formel die auch sonst für diesen Fall benutzte Formel

$$\tfrac{1}{2} P_0(\mu) + \tfrac{3}{2} P_1(\mu) + \cdots + \frac{2n+1}{2} P_n(\mu) = \tfrac{1}{2}(P_n'(\mu) + P_{n+1}'(\mu)) \qquad 25)$$

herangezogen wird. Dagegen scheint auf diesem Wege nicht bewiesen werden zu können, daß auch die Gleichmäßigkeit der Konvergenz für ein Stetigkeitsintervall statthat, das bis an diesen Punkt heranreicht. Entsprechendes gilt für $x = -1$.

Will man den Beweis zunächst nur für stetige Funktionen führen, so kann man an Stelle der Gleichung 16) die noch einfachere

$$\int_{-1}^{+1} A_n(x, \mu)\, d\mu = 1 \qquad \text{(für jedes } n) \qquad 26)$$

benutzen. In der Tat besagt die Benutzung der Gleichung 16) nichts anderes, als daß zunächst für eine spezielle unstetige Funktion, nämlich die durch

$$f(\mu) = \begin{cases} 1 \text{ für } x < \mu \\ 0 \text{ für } x > \mu \end{cases} \qquad 27)$$

definierte, das Verhalten ihrer Reihenentwicklung an der Sprungstelle untersucht wird.

§ 3. Zur Theorie der trigonometrischen Reihen.

Die im vorhergehenden entwickelten Schlußweisen erlauben nun auch, den Beweis für die Entwickelbarkeit einer Funktion beschränkter Schwankung in eine harmonische trigonometrische (sog. Fouriersche) Reihe in einem Punkte zu vereinfachen. Abgesehen von dem ersten ziemlich mühsamen Dirichletschen Beweise wird nämlich bei denjenigen Beweisanordnungen, die die Heranziehung der Potentialtheorie oder der Theorie der analytischen Funktionen komplexen Arguments vermeiden, immer das Integral

$$\int_0^x \frac{\sin x\,dx}{x}$$

benutzt, das doch dieser Theorie eigentlich fremd ist, vielmehr der Theorie der Fourierschen Integrale angehört. Sieht man genauer zu, so findet man, daß dieses Integral nur deswegen eingeführt wird, um für die hier die Stelle der Funktion A_n vertretende Funktion

$$A_n(x,\mu) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n} \cos(\nu x - \nu\mu) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-\mu)}{\sin\frac{1}{2}(x-\mu)} \qquad 28)$$

den Beweis zu führen, daß das Integral

$$\int_a^b A_n(x,\mu)\,d\mu \qquad 29)$$

immer unterhalb einer von a, b, x, n unabhängigen endlichen Grenze bleibt, wie auch die Werte a, b, x im Intervall $(-\pi \cdots +\pi)$ gewählt werden mögen. Das aber kann mit Hilfe der in § 2 unter IV angegebenen Zerlegung auch hier an dem Integral 29) selbst direkt gezeigt werden; man muß dabei nur die für die in Betracht kommenden Werte gültige Doppelungleichung $x \cos x < \sin x < x$ beachten.

Dabei hat man noch den Vorteil, daß man auch Reihen, die nur Kosinus- oder nur Sinusglieder enthalten, direkt behandeln kann, was bisher, abgesehen von einer Andeutung bei

Herrn Kneser,[1]) noch nicht geschehen zu sein scheint. Man kann hier nämlich die in Betracht kommenden endlichen Summen auf die zur Christoffelschen Formel 2) analoge Gestalt bringen:

$$\begin{aligned} A_n(x, \mu) &= \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \cos \nu x \cos \nu \mu \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\cos(n+1)x \cos n\mu - \cos nx \cos(n+1)\mu}{\cos x - \cos \mu}, \end{aligned} \qquad 30)$$

$$\begin{aligned} A_n(x, \mu) &= \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \sin \nu x \sin \nu \mu \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\sin(n+1)x \sin n\mu - \sin nx \sin(n+1)\mu}{\cos x - \cos \mu}. \end{aligned} \qquad 31)$$

Für die erstere gilt dann:

$$\int_0^\pi A_n(x, \mu)\, d\mu = 1; \qquad 32)$$

für die letztere hat das zunächst entsprechende Integral keinen so einfachen Ausdruck, im Zusammenhang damit, daß hier die Konstanten nicht mit zu den Eigenfunktionen gehören. Man muß also hier die erste Eigenfunktion $\sin \mu$ mit heranziehen und von

$$\int_0^\pi \sin \mu\, A_n(x, \mu)\, d\mu = \sin x \qquad 33)$$

ausgehen. Das bedingt, daß man hier zunächst an die zu entwickelnde Funktion noch die Forderung stellen muß, sie solle an beiden Enden des Intervalls mindestens von der ersten Ordnung Null werden.

Die Behandlung von Funktionen mit Unstetigkeiten ist bei der Reihe, die Sinus- und Cosinusglieder enthält, deswegen einfach, weil hier der Anfangspunkt der Zählung der x gleichgültig ist, es also genügt, eine Unstetigkeit im Nullpunkt anzunehmen, wofür die Gleichung

---

[1]) Math. Ann. 58, p. 95.

$$\int_0^\pi A_n(0, \mu)\, d\mu = \tfrac{1}{2} \tag{34}$$

dienen kann. Dagegen bei den Reihen, die nur Glieder der einen oder der andern Art enthalten, führt ein entsprechendes Vorgehen zunächst auf die Frage nach der Summe der Reihe

$$\sum \frac{\sin nx}{n} \tag{35}$$

oder der Reihe:

$$\sum \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}. \tag{36}$$

Diese Fragen können allerdings auf dem von Fourier,[1] dem von Abel,[2] dem von Schlömilch[3] oder dem von Herrn H. A. Schwarz[4] eingeschlagenen Wege unabhängig von der allgemeinen Theorie erledigt werden; auch die strenge Durchführung der ersten Fourierschen Ableitung[5] sollte der heutigen Theorie der unendlichen linearen Gleichungen möglich sein; aber all das bringt doch eine gewisse Komplikation mit sich, so daß in diesem Punkte die Reihen nach Legendreschen Polynomen gegenüber den hier in Rede stehenden als die einfacheren erscheinen. — Analoges gilt für die Sinusreihenentwicklung einer Funktion, die der obengenannten Bedingung nicht genügt.

§ 4. Reihenentwicklungen nach Ultrakugelfunktionen.

Die im vorhergehenden entwickelten Hilfsmittel erlauben auch, die nach den sogenannten Ultrakugelfunktionen fortschreitenden Reihenentwicklungen direkt zu untersuchen. Am bequemsten geht man dabei aus von der von Gegenbauer[6] gegebenen Integraldarstellung:

---

[1]) Théorie de la chaleur, nr. 179, oeuvres 1, p. 258; vgl. Cesàro-Kowalewski p. 305.

[2]) In der Abhandlung über die Binomialreihe, oeuvres 1, p. 247.

[3]) Z. B. algebraische Analysis, p. 126, 277 (der 5. Auflage).

[4]) Ges. Abhandlungen 2, p. 195.

[5]) Théorie de la chaleur, nr. 167, oeuvres 1, p. 253.

[6]) Wiener Ber. 100, 1891, p. 755, 757.

$$A_n(x) = \int_0^\pi (x + i \cos\varphi \sqrt{1 - x^2})^n \sin^{2\nu-1}\varphi \, d\varphi, \tag{36)}$$

wobei ν eine beliebige komplexe Größe mit positivem reellen Bestandteil bedeuten kann. Sie erlaubt in der Tat, alle erforderlichen Eigenschaften dieser Funktionen rasch abzuleiten. Zunächst gibt die Jacobische Substitution:

$$\cos\varphi = \frac{i\sqrt{1-x^2} - x\cos\psi}{i\sqrt{1-x^2}\cos\psi - x}, \qquad \sin\varphi = \frac{\sin\psi}{x - i\sqrt{1-x^2}\cos\psi},$$

$$x + i\cos\varphi\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{x - i\sqrt{1-x^2}\cos\psi}, \tag{37)}$$

$$d\varphi = \frac{d\psi}{x - i\sqrt{1-x^2}\cos\psi}$$

die zweite Darstellung:

$$A_n(x) = \int_0^\pi (x - i\cos\psi\sqrt{1-x^2})^{-n-2\nu} \sin^{2\nu-1}\psi \, d\psi;$$

der Integrationsweg ist dabei zunächst ein Kreisbogen in der Ebene der komplexen Variabeln $\cos\psi$, kann aber ohne Überschreitung eines singulären Punktes in die gerade Verbindungsstrecke der Punkte $\psi = 0$, $\psi = \pi$ verlegt werden. Die erste Darstellung gibt durch Differentiation:

$$(1 - x^2) A_n' = n(A_{n-1} - x A_n), \tag{38)}$$

die zweite:

$$(1 - x^2) A_n' = (n + 2\nu)(x A_n - A_{n+1}); \tag{39)}$$

Elimination von A_n' aus den beiden so erhaltenen Gleichungen die Rekursionsformel zwischen drei aufeinander folgenden A [1]):

$$2(n + \nu) x A_n = (n + 2\nu A_{n+1} + n A_{n-1}). \tag{40)}$$

Wird diese Gleichung mit derjenigen kombiniert, die aus

[1]) N. Nielsen geht von den Gleichungen 38) und 40), aus denen 39) folgt, aus: Ann. di mat. (3) 14, 1908, p. 69; Ann. ée. norm. (3) 25, 1908, p. 373. Er stellt eine zusammenhängende Darstellung der Theorie dieser Funktionen in Aussicht.

ihr hervorgeht, wenn man x durch ein anderes Argument μ ersetzt, so erhält man

$$2(n+\nu)(x-\mu)A_n(x)A_n(\mu) = (n+2\nu)(A_{n+1}(x)A_n(\mu) - A_n(x)A_{n+1}(\mu)) - n(A_n(x)A_{n-1}(\mu) - A_{n-1}(x)A_n(\mu))$$

und daraus durch Summation[1]):

$$\sum_{n=0}^{n} 2(n+\nu)\frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)} A_n(x)A_n(\mu) = \frac{\Gamma(n+2\nu+1)}{\Gamma(n+1)} \frac{A_{n+1}(x)A_n(\mu) - A_n(x)A_{n+1}(\mu)}{x-\mu}. \qquad 41)$$

Wird ferner in der Gleichung 38) n durch $n+1$ ersetzt und die so erhaltene Gleichung mit 39) kombiniert, so kommen die beiden Gleichungen:

$$(n+1)(n+2\nu)A_n = (n+2\nu)A'_{n+1} - (n+1)xA'_n, \qquad 42)$$

$$(n+1)(n+2\nu)A_{n+1} = (n+2\nu)xA'_{n+1} - (n+1)A'_n; \qquad 43)$$

und wenn in der letzten n durch $n-1$ ersetzt und dann A'_n eliminiert wird, als Verallgemeinerung von 4):

$$\int A_n\,dx = \frac{n+2\nu}{2(n+1)(n+\nu)}A_{n+1} - \frac{n+2\nu}{2(n+2\nu-1)(n+\nu)}A_{n-1} + \text{Const.} \qquad 44)$$

Endlich ergibt sich durch abermalige Differentiation von 39), unter Benutzung von 42) die Differentialgleichung

$$(1-x^2)A''_n - (1+2\nu)xA'_n + n(n+2\nu)A_n = 0 \qquad 45)$$

oder

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)^{\frac{2\nu+1}{2}}\frac{dA_n}{dx}\right\} + n(n+2\nu)(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}A_n = 0$$

und aus ihr die Integraltheoreme

---

[1]) G. Darboux, J. de math. (3) 4, 1878, p. 381; J. Deruyts, Brux. mém. cour. in 4⁰. 47, 1886, p. 17.

$$n(n+2\nu)\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} A_n(x)\,dx = 0 \qquad 46)$$

und:

$$[n(n+2\nu)-m(m+2\nu)]\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} A_m(x)A_n(x)\,dx = 0. \qquad 47)$$

Damit sind nun aber alle Vorbereitungen erledigt; die Abschätzung der Größe des A für große Werte von n kann wie in § 2 geschehen, indem der Faktor $\sin^{2\nu-1}\varphi$ auf sie gar keinen Einfluß hat, die Formel 44) dient zu demselben Zwecke wie 4), und 41) unter der Bedingung $\Re\nu \leqq \frac{1}{2}$ zu demselben wie 2), da bekanntlich[1]) für große n

$$\frac{\Gamma(n+2\nu+1)}{\Gamma(n+1)} \sim n^{2\nu} \qquad 48)$$

ist. Damit läßt sich unter den angeführten Einschränkungen für ν und unter denselben Annahmen für $f(x)$ wie in § 2 die Gültigkeit der Entwicklungsformel

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} f(x)A_n(x)\,dx : \int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} A_n^2(x)\,dx \qquad 49)$$

in der Tat beweisen.

Man kann aber auch negative Werte der ganzen Zahl n in Betracht ziehen. Wenn ν wie in § 2 gleich $\frac{1}{2}$ ist, so erhält man auf diesem Wege nichts Neues; andernfalls aber erhält man an Stelle von 41) die folgende Formel:

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{n} 2(n-\nu)\frac{\Gamma(n-2\nu)}{\Gamma(n+1)} A_{-n}(x)A_{-n}(\mu) \\ = \frac{\Gamma(n-2\nu)}{\Gamma(n+1)} \frac{A_{-n-1}(x)A_{-n}(\mu) - A_{-n}(x)A_{-n-1}(\mu)}{x-\mu}.\end{gathered} \qquad 50)$$

Damit hat man die zweite Entwicklungsformel:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} f(x)A_{-n}(x)\,dx : \int_{1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} A_{-n}^2(x)\,dx, \qquad 51)$$

[1]) Die Formel steht nicht in allen Lehrbüchern der Integralrechnung, findet sich aber z. B. bei Boussinesq, Cours II, 2, p. 141.

in der, da

$$\frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(-n+2\nu+1)} = \frac{\sin(n-2\nu-1)\pi}{\sin n\pi}\,\frac{\Gamma(n-2\nu)}{\Gamma(n+1)},$$

ν keiner weiteren Beschränkung unterliegt als der gleich zu Anfang eingeführten, daß sein reeller Teil positiv sein soll.

Auf den ersten Blick könnte es scheinen, als ob man auch für andere als ganzzahlige Werte von n (resp. von $n+2\nu$) entsprechende Entwicklungen müßte bekommen können. Man erkennt aber bald, daß das nicht möglich sein kann, daß nicht alle unsere Folgerungen für andere als die genannten Werte Gültigkeit haben können. Es müßte sonst auch für beliebige voneinander verschiedene Werte von m und n

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} A_m(x) A_n(x)\,dx = 0$$

sein, im Widerspruch mit einem Satze von Herrn E. Schmidt.[1]) In der Tat hat schon Herr E. W. Hobson[2]) darauf hingewiesen, daß das Integral 36) zwar sowohl für positive wie für negative Werte von x je einen Zweig einer analytischen Funktion darstellt, daß aber diese Zweige im allgemeinen nicht analytische Fortsetzungen voneinander sind. Läßt man nämlich x von der positiven Seite her der Null sich nähern und nimmt dabei die Basis der n^{ten} Potenz in 36) zwischen $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ mit dem Arcus $\frac{\pi}{2}$, so muß man sie aus Stetigkeitsrücksichten[3]) zwischen $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = \pi$ mit dem Arcus $-\frac{\pi}{2}$ nehmen, so daß man erhält:

---

[1]) Vgl. Rieß, Paris C. R. 143, p. 738.

[2]) Lond. trans. 187, 1896, p. 196.

[3]) Wollte man diese Rücksichten nicht nehmen, so würden durch die partiellen Integrationen, die zu den Formeln 46) und 47) führen, noch weitere Glieder vom Integralzeichen frei werden.

$$\lim_{x=+0} A_n(x) = 2\cos\frac{n\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\varphi \sin^{2\nu-1}\varphi \; d\varphi$$

$$= \cos\frac{n\pi}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\frac{n+2\nu+1}{2}\right)}. \qquad 52)$$

Läßt man aber x von der negativen Seite her der Null sich nähern und nimmt die Basis der Potenz in dem ersten Teilintervall wieder mit dem Arcus $\frac{\pi}{2}$, so muß man sie im zweiten mit dem Arcus $\frac{3\pi}{2}$ nehmen, so daß man erhält:

$$\lim_{x=-0} A_n(x) = e^{n\pi i}\cos\frac{n\pi}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\frac{n+2\nu+1}{2}\right)}. \qquad 53)$$

Es ergibt sich also:

$$\lim_{x=-0} A_n(x) = e^{n\pi i}\lim_{x=+0} A_n(x). \qquad 54)$$

Ebenso wird erhalten:

$$\lim_{x=-0} A_n'(x) = e^{(n-1)\pi i}\lim_{x=+0} A_n'(x). \qquad 55)$$

Für ganzzahlige, nicht negative Werte von n folgt:

$$\lim_{x=-0} A_n(x) = \lim_{x=+0} A_n(x), \qquad \lim_{x=-0} A_n'(x) = \lim_{x=+0} A_n'(x); \qquad 56)$$

für gerade. weil dann:

$$e^{n\pi i} = 1, \quad \cos\frac{n-1}{2}\pi = 0, \quad \text{also} \quad A_n'(+0) = A_n'(-0) = 0,$$

für ungerade weil dann:

$$e^{(n-1)\pi i} = 1, \quad \cos\frac{n\pi}{2} = 0, \quad \text{also} \quad A_n(+0) = A_n(-0) = 0.$$

Für andere Werte von n dagegen findet solche Übereinstimmung nicht statt und kann auch durch andere Verfügung

über die Werte der sonst noch in den Integralen auftretenden Wurzelgrößen nicht für A_n und A'_n zugleich erreicht werden[1]).

Eine entsprechende Untersuchung der zweiten Formel gibt[2]):

$$\lim_{x=+0} A_n(x) = \cos\frac{(n+2\nu)\pi}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{-n-2\nu+1}{2}\right)\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\frac{-n+1}{2}\right)} \tag{57}$$

und[3]):

$$\lim_{x=-0} A_n(x) = e^{(n+2\nu)\pi i} \lim_{x=+0} A_n(x). \tag{58}$$

also noch das Resultat, daß die Gleichungen 50) auch in dem Falle gelten, daß $n+2\nu$ eine (nicht positive) ganze Zahl ist.

Einer Übertragung der Resultate dieses Paragraphen auf die noch allgemeineren Jacobi-Tschebyscheffschen Polynome steht nichts im Wege, wenn man die Abschätzung ihrer Größenordnung den Untersuchungen von Darboux entnehmen will; will man das nicht, so begegnet man der Schwierigkeit, daß eine zu 36) analoge Integraldarstellung für sie nicht zu existieren scheint. —

Nachdem die vorstehenden Untersuchungen der Akademie bereits vorgelegt waren, habe ich durch die Freundlichkeit des Herrn Verfassers zwei neuere Abhandlungen von E. W. Hobson über denselben Gegenstand (Lond. math. proc. (2) 6, 1908, p. 390; 7, 1909, p. 24) erhalten. Der hier mit § 2, V bezeichnete Satz wird auch in ihnen auf dem Umwege über

---

[1]) Dieser letzte Punkt bleibt bei Hobson unerörtert.

[2]) Die Übereinstimmung der Formeln 52) und 57) folgt aus einer bekannten Formel der Theorie der Gammafunktionen.

[3]) Ein Widerspruch zwischen den Beziehungen 54) und 58) liegt insofern nicht vor, als der erste Ausdruck von A'_n in denjenigen Fällen versagt, in welchen der zweite für A_n brauchbar ist. Man könnte allerdings den Gültigkeitsbereich der Ausdrücke durch Heranziehung von Schleifenintegralen erweitern, müßte aber dann mit Hobson für jedes Stück der Schleife die den Wurzelgrößen beizulegenden Werte besonders ermitteln.

trigonometrische Reihen gewonnen. Die dort behandelte Frage nach den zuläßigen Unstetigkeiten der zu entwickelnden Funktion in einem Endpunkt des Intervalls ist hier nicht berührt; man erkennt übrigens, daß sie sich auch mit den hier entwickelten Hilfsmitteln teilweise erledigen läßt — nicht vollständig, wegen des in der Note 1) von p. 7 berührten Umstandes.



Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 11. Abhandlung

Foraminiferen der Seewener Kreideschichten

von

Dr. Joseph Georg Egger
Obermedizinalrat a. D.

Mit 6 Tafeln

Vorgelegt am 3. Juli 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Die in den Abhandlungen der K. Akademie der Wissenschaften 1899 veröffentlichte Monographie über die Foraminiferen und Ostrakoden aus den Kreidemergeln der oberbayerischen Alpen sollte mit vorliegender Arbeit über die Mikrofauna der Kreideschichten am Tegernsee eine Fortsetzung finden.

Von dem Eisenbahnstationshaus in Quirin am Tegernsee führt gegen Nordost ein schmaler Weg nach dem Anwesen Unterbuchberg. Unmittelbar vor diesem Anwesen steigt der Weg etwas steiler empor und durchschneidet einen schiefrigen Mergelkalk. Man schreitet, nach Unterbuchberg gehend, zwischen den bis anderthalb Meter hohen Wänden dieses schluchtartigen Einschnittes über die Köpfe der unter den Füßen des Wandernden freiliegenden Schichten hinan. Die wellig gebogenen, aus Schollen und Platten sich aufrichtenden schiefrigen Lagen des hellgrauen Gesteins wechseln nach unten mit gleichfalls schiefrigen ziegelroten Bänken.

Von diesen Schichten entnahm ich Proben zur Untersuchung auf mikroskopische organische Einschlüsse. Für das nicht bewaffnete Auge erkennbare Versteinerungen konnte ich in den Proben nicht entdecken. Die Untersuchung mit Beihilfe des Mikroskopes gab mir aber in Schliffpräparaten sowie beim Schlämmen von Splittern des Gesteins in Wasser eine auffallend reiche Ausbeute an Foraminiferen. Ostrakoden wurden nicht gefunden.

Bereits mit der Untersuchung von Proben von Unterbuchberg beschäftigt erhielt ich von Herrn Dr. Imkeller in München mehrere Gesteinsproben aus dem Gebiet zwischen Schliersee und Tegernsee zur Untersuchung auf Foraminiferen. Von

diesen Proben fiel mir sofort eine auf, welche bezeichnet war als Seewenkalk von einem Seitengraben des Schußgrabens am Ostabhang des Oederberges. Die allgemeine Gesteinsbeschaffenheit sowie das Ergebnis der Untersuchung einer Probe ließen vollständige Übereinstimmung wahrnehmen mit dem grauen Mergelkalk von Unterbuchberg.

Vor einiger Zeit hatte ich zur Untersuchung auf Mikrofauna auch Proben von Seewenkalk am Grünten im Allgäu gesammelt. Nun entschloß ich mich, dieses Material aus dem Gebiet vom Tegernsee und Grünten zugleich mit typischem Seewenkalk aus der Schweiz auf ihren Foraminiferengehalt zu untersuchen. Den Herren Professoren Dr. Rothpletz und Dr. Broili, Herrn Landesgeolog Dr. Reis in München, welche aus den Staatssammlungen der K. Akademie und des K. Oberbergamtes, Herrn Thum in Leipzig, welcher aus seinem mikroskopischen Institut mich mit Material von Seewen unterstützten, ebenso Herrn Dr. Imkeller erstatte ich hiemit meinen ergebensten Dank.

Das untersuchte Gestein von dem Tegernsee- und Grüntengebiet ist grauer Mergel, blättriger bis dichter grauer Kalk, roter, etwas sandiger Schiefer oder bis zu hornsteinartiger Dichtheit knolliger roter Kalk. Die in diesem Gestein eingeschlossenen größeren Foraminiferen-Gehäuse sind größtenteils Bruchstücke, wahrscheinlich schon als solche in dem Erdreich, in welchem sie sich heute finden, eingebettet. Besser erhalten sind die kleineren Exemplare. Von diesen überraschen gewisse Formen durch die Häufigkeit, in welcher sie sich finden. Das gleiche Verhalten beobachtet sich in den untersuchten Handstücken von Seewen.

Heer widmet in der „Urwelt der Schweiz“ den Polythalamien des Seewenkalkes einen eigenen Abschnitt unter Beigabe von Abbildungen und beschreibt aus dem Steinbruch von Seewen Foraminiferen, welche dort so häufig gefunden wurden, „daß von den untersuchten Seewenkalkproben kein Stück, ja heine Gesteinsfläche zu treffen war, welche diese Gebilde nicht hätten beobachten lassen.“

In einem Schliffbilde Heers (Figur 137 der Urwelt) sind zahlreiche ringförmige Durchschnitte verschiedener Größe gegeben, welche durch die Schale von Kugeln geführt sind. Der Innenraum dieser Ringe ist mit der gleichen erdigen Masse ausgefüllt, welche die Kugeln einhüllt. Die Figuren sind nach fünfzigmaliger Vergrößerung gezeichnet. Zugleich mit den ringförmigen Durchschnittsfiguren zeigt das Schliffbild auch ovale, etwas kleinere Formen durch den Schliff aufgeschlossen. Unter diesen ringförmigen und ovalen Durchschnittsfiguren finden sich hie und da solche, deren Ring oder Oval nicht ganz geschlossen ist.

Heer hält diese Lücken in den Ringen und Ovalen für die Mündung einkammeriger Foraminiferen, und da diese Mündung nicht in allen Figuren wahrzunehmen ist, glaubt er, die Mündung werde nur dann sichtbar, wenn der Schliff mit seiner Durchschneidungsebene die zufällig gegen den Rand der Schale liegende Mündung schneidet.

Heer hält nach Kaufmann diese Foraminifere für eine Lagena und gibt der runden Form den Namen Lagena sphaerica, der ovalen den Namen Lagena ovalis. Heer erwähnt wegen der großen Ähnlichkeit auch der in Ehrenbergs Mikrogeologie angeführten Miliola arcella und sphaerula. Miliola arcella aus der Schreibkreide von Rügen hat Kugelform, trägt schwache Poren und zeigt eine zartrandige runde Öffnung. Miliola sphaerula aus der Schreibkreide von Wolsk an der Wolga ist gleichfalls eine Kugel mit Porenpunkten. Sie enthält einen inneren, dunkleren, im Umfang nicht scharfabgegrenzten Kern, in einer anderen Abbildung trägt sie eine seitlich liegende, zartgerandete runde Öffnung.

Lagena sphaerica Kaufmann ist nach Heer ein durchsichtiges, glattes, kalkiges, kugeliges, zuweilen von der Kugelform abweichendes, zusammengedrücktes Gehäuse von 0,003 bis 0,01 mm Wandungsdicke. Im Innern ist sie gewöhnlich dunkel, oft mit einer körnigen oder kristallinischen Masse ausgefüllt. Die runde Mündung hat keine Strahlen. Der Durchmesser der Foraminifere beträgt 0,035 bis 0,10 mm. Man

trifft diese Art in zahlloser Menge auch in der Schreibkreide von Rügen.

Lagena ovalis Kaufmann, beständige Begleiterin der Lagena sphaerica, ist nach Heer oval, glatt, durchsichtig, kalkig, auf dem Querschnitt kreisförmig, zuweilen mehr oder weniger gepreßt, zusammengedrückt. Die nicht dicke Wandung ist unten in der Regel sehr verdünnt, inwendig manchmal uneben, zackig, wie mit Kristallen besetzt, oft mit undurchsichtiger Masse angefüllt. Die ungestrahlte Mündung ist rund. Die Länge des Gehäuses erreicht 0,05 bis 0,075 mm.

Heer fand auch diese Art in der Rügener Schreibkreide so häufig, daß „in Beziehung auf das häufige Vorkommen von Lagena sphaerica und Lagena ovalis die Übereinstimmung der Rügener Kreide mit dem Seewenerkalke nicht größer gedacht werden könnte."

In einer Abhandlung: Geologische Studien im Grenzgebiet zwischen helvetischer und ostalpiner Facies — Südliches Rhätikon — Freiburg 1901, spricht sich Dr. Theodor Lorenz gegen die Zugehörigkeit der von Heer nach Kaufmann beschriebenen kugelförmigen und elliptischen Schalen des Seewenkalkes zu Lagena aus. Lorenz hält die runde und die ovale Form für zu einer Art zusammengehörig, erkennt aber in den lückenhaften Unterbrechungen der Schalen gleichfalls Mündungen. In der Umrißgestalt der Schalen eine Tonnenform annehmend, stellt Lorenz für Lag. sphaerica und L. ovalis einen gemeinsamen Gattungs- und Artnamen mit Pithonella ovalis Kaufmann auf.

Herr Thum in Leipzig war so gefällig, mir Rügener Schreibkreide mitzuteilen. Eine kleine Probe davon mit Wasser unter dem Mikroskop beobachtet zeigt sofort die zahlreichen kugeligen Foraminiferen, wie sie Heer angibt. Bei regelmäßiger Ausbildung und ungestörter Erhaltung erreichen diese Kugeln einen Durchmesser von 0,015 bis 0,13 mm. Ihre Oberfläche ist glatt, mehr matt als glänzend, bei auffallendem Lichte kalkig, feinschuppig. Bei durchfallendem Lichte erscheinen die Kugeln grünbräunlich gefärbt, als wäre der Innenraum mit

farbiger Flüssigkeit gefüllt. In der Regel bleibt aber dieser farbige Innenraum nicht gleichmäßig als solcher durchscheinend. Es treten in der Füllmasse Verdichtungen ein, welche als dunkle Ringe sich am Rande anlegen oder in der Mitte der Kugel zu nebligen Scheiben, zu trüben Kernen verschiedener Größe sich verdunkeln.

Die im Inneren der Kugeln sich bildenden, dunkleren Schalenkerne umkreist der noch vorhanden gebliebene grünliche Raum, je nachdem die Verdichtung an Umfang zugenommen hat, als breiter oder schmaler Ring. Nach außen schließt die Kugel mit der Schalenrinde ihren Umfang ab. Gebrochene Exemplare lassen bei siebzigmaliger Vergrößerung die Struktur der Schale deutlich als feinschuppig erkennen.

Die kugeligen Gehäuse sind nicht immer ganz regelmäßig scheibenrund, sie zeigen auch unsymmetrische Einbuchtungen oder Hervortreibungen, oder sie sinken gleichmäßig ein und gehen, sich verflachend, aus der Kugelgestalt in die Form von Linsen oder Tellern über.

Nicht selten kommen Schalen vor, welche im Umriß regelmäßige Ovale bilden. Solche Formen leiten mit verschiedenen Übergängen in der Verschmälerung und Zuspitzung die Kugelform in die Weckenform über und legen die Anschauung nahe, daß die Kugelform und die Weckenform nicht verschiedene Arten repräsentieren, sondern daß letztere nur als eine Varietät der Kugelform zu betrachten sei.

Der aus Proben von Seewen, Grünten, Öderberg, Unterbuchberg, Kramsbach geschlämmte Satz liefert in reicher Menge dieselben Kugel- und Weckenformen, wie sie in der Rügener Kreide vorkommen.

Es fehlt auch hier nicht an Exemplaren, welche unsymmetrisch höckerigen Umriß haben oder welche zu Linsen- oder Tellerform verflacht sind. Diese Kugelgehäuse erscheinen, je nachdem angreifende Einwirkung stattgefunden hatte, wasserhell durchscheinend oder bis zur Undurchsichtigkeit getrübt. Wie bei den Rügener Exemplaren umgibt den mittleren, sich verdunkelnden Teil des Schalenbildes ein ringförmiger, durch-

scheinender Raum, derselbe ist aber in der Regel farblos. Außen schließt die Schale den Ring als Kreislinie ab.

Viel schärfer treten diese Verhältnisse an Gehäusen hervor, welche durch den Schliff im Gestein sichtbar gemacht werden. Hellglänzende Scheiben heben sich als durch die Schale geführte Schliffebene ohne besondere Randlinie von der einhüllenden dunklen Gesteinsmasse als kristallinische, mehr oder weniger schollige oder rissige Fläche ab. Andere Exemplare erscheinen nur als zarter Schalenring, der von diesem begrenzte innere Raum ist leer. Wieder andere Exemplare sind verdichtet im Rande und bleiben leer im Innenraume, oder sie sind gefüllt mit körneliger Masse, wie dies der Fall ist bei den Ringfiguren, welche Heer vom Seewensteinbruch abbildet. Die kristallinische Ausfüllung ist zuweilen in Brocken zerklüftet, auch körnelig.

Gleich den geschlämmten Schalen lassen auch im Schliffe aufgeschlossene wahrnehmen, wie sich der ursprünglich durchscheinend helle innere Raum der Kugel in deren Mitte verdichtet und der diesen Verdichtungskern umkreisende Zwischenraum zwischen Kern und Schalenrand einen hellen, durchscheinenden Ring darstellt. Auf gut erhaltenen Exemplaren ist dieser Ring zuweilen bräunlich gefärbt, wo die Gehäuse von Rügen eine grünliche Färbung wahrnehmen lassen.

Wie Heer von den Seewenkalken berichtet, daß dort mit den kugelförmigen, einkammerigen Foraminiferen zahlreich weckenförmige mit 0,035 bis 0,1 mm Durchmesser vorkommen, so läßt sich das von den Kreideschichten von Tegernsee, Grünten bestätigen. Diese Wecken sind vorne und hinten verschmälert, wölben sich gegen die Mitte etwas bauchig. Die von Heer an ihnen beobachteten Mündungen konnte ich nicht auffinden.

Wenn man kleine Proben von Rügen oder aus dem Schlämmsatze vom Tegernsee-, Grünten- und Seewengebiet auf dem Objektträger des Mikroskops ausbreitet in Glycerin und etwas Wasser, oder noch besser Weingeist zuträufelt, entsteht in dieser Probe eine rasche, alle Objekte durcheinanderrollende Bewegung. Dabei treten die einzelnen Gehäuse in verschie-

denster Stellung zu Gesicht. Ich konnte bei den vielen in dieser Weise ausgeführten Untersuchungen, sowie bei Untersuchungen mit Zusatz von karmingefärbter Flüssigkeit, das Vorhandensein von Mündungen an den Weckenformen sowenig wie an den Kugelformen entdecken.

In Schliffpräparaten beobachtet man häufig, daß die weckenförmigen Gehäuse an dem vorderen oder dem hinteren Ende oder auch an beiden Enden offen stehen (Taf. V Fig. 30), allein diese Lücken sind keine Mündungen, sondern Defekte, welche sich an diesen Gehäusen gebildet haben. Es fällt überhaupt an den weckenförmigen geschlämmten wie Schliffpräparaten vielfach auf, daß sich die Oberfläche der Gehäuse der Länge nach mit einfachen oder mehrfachen Rissen besetzt zeigt oder mit unregelmäßig geformten Rauhigkeiten (Taf. V Fig. 28, 29; Taf. VI Fig. 5).

In den Kugelformen von Rügen sowie aus den Seewen-Tegernsee-Schichten kommen hie und da Schalen vor, welche eine kleine rundliche Lücke wahrnehmen lassen. Solche Lücken sind aber zweifellos durch Schwund der Schale entstanden.

An den Kugelformen der Kreide von Rügen läßt sich häufig beobachten, daß die Schale an einzelnen Stellen sehr dünn ist, und an solchen Stellen bemerkt man auch die eben erwähnten kleinen lochförmigen Defekte. Überhaupt läßt sich bei den Gehäusen der Seewener, Tegernseer, Grüntner Proben eine große Verschiedenheit wahrnehmen in der Dicke der Wandungen, mit welchen die Gehäuse ihre Kammern abschließen gegen die sie einhüllenden Gesteinsmassen. Gehäuse mit mehreren Kammern bieten, obgleich diese an Größe gleich, doch in den verschiedenen Kammern sehr ungleiche Wandstärke. Man trifft aber auch in einer Kammer die Dicke der Wände sehr ungleich. Es läßt sich häufig verfolgen, wie dünnere Wandteile allmählich dicker werden oder umgekehrt. Es ist in solchen Fällen bei Schliffbildern diese Ungleichheit sichtlich nicht Folge des in schräger Richtung geführten Schnittes der Schlifflinie. Diese Ungleichheit ist zweifellos Folge des Versteinerungsvorganges. Die Gesteinsmassen, welche

die Foraminiferengehäuse dichter oder mehr gelockert einschließen, unterstehen in ihrer Lagerung verschiedenem Ab- und Zuflusse der Wässer, welche den Stein durchsickern, und je nachdem die Schalen der Gehänse dichter oder porös sind, behalten diese Schalenwände als Filter von den sie durchsetzenden kalkigen Lösungen mehr oder weniger zurück und nehmen an Dicke und Dichtheit zu. Diese Zunahme gibt zum Beispiel jenen Schalenwänden, welche an den oben erwähnten Ringen der Lagena sphaerica von Seewen als Durchschnitte von Lagena aufgefaßt wurden, eine Dicke, daß deren plötzliches Unterbrochenwerden die Vermutung sie seien durchschnittene Mündungsränder veranlaßt. Wandungen von Globigerinen, Discorbinen, welche gößere Poren haben, legen mit der Verdichtung der Schale auf diese auch noch die verschiedenst gestalteten Verkrustungen als Reste dieses Sickervorganges auf.

Will man mit Heer die Lücken von den als Lagena sphaerica beschriebenen Schalenringen als Mündung der Schale auffassen, müßte man erwarten, daß die im übrigen mit den Seewenergehäusen völlig übereinstimmenden kugelförmigen Schalen von Rügen gleichfalls diese Lücken wahrnehmen lassen. Es müßte dieses Vorkommen um so sicherer zu konstatieren sein, als so viele Kugelexemplare aus der Rügener Kreide, namentlich wenn sie in Glycerin beobachtet werden, sich in ihrem ganzen Umfang als durchscheinend zeigen, so daß an keiner Stelle der Kugel eine Mündung unbemerkbar bleiben könnte. An keinem der vielen beobachteten Exemplare von Rügen zeigte sich eine Spur, solange sie unbeschädigt blieben, während die im Innern der Kugeln sich bildenden Kerne und Ringe der sich verdichtenden Ausfüllungsmasse in jeder Stellung der Kugeln ganz deutlich in allen Graden der Dichtheit verfolgt werden können. Hingegen treten an den Rügener Kugelgehäusen zuweilen Randdefekte auf, welche in der Form ganz den Ringen mit Lücken gleichen, sie sind aber an der zarten Schale der Rügener Exemplare nur als gefranste Randausschnitte zu erkennen, während die Lücken der Ringe in

den Gesteinsschliffen von Seewen mit einer durch den Versteinerungsvorgang gebildeten kräftigen Schale den Mündungsrand vortäuschen.

Wie sich solche Lücken in der Schale allmählich, wahrscheinlich durch Druck bilden, läßt sich an einem Schliffpräparat von Oderberg erkennen (Taf. V Fig. 8). Eine kugelige Schale läßt ersehen, wie an ihrem Rande die körnelige Ausfüllung des Innenraumes der Kugel den Rand mit Bildung einer klaffenden Lücke in der Schale durchbrochen hat.

In einer Mitteilung über „Foraminiferen von Laysan und den Chataminseln“ in Band XXIV der zoologischen Jahrbücher 1906 beschreibt Dr. Rhumbler ein neues Genus „Orbulinaria“ aus 240 Meter Tiefe des N. Atlantik bei Ascension als eine kugelige bis ellipsoidale, ziemlich kleine, kalkige Schale mit mehreren Öffnungen und einer eigentümlich schilferigen, mäandrisch schuppigen Kalkwand. Eigentümlich ist die kugelige Gestalt. Die Öffnungen und Poren sind in der Regel nicht erkennbar. Herr Professor Rhumbler hatte die Güte mir einige Exemplare und Abbildungen zur Ansicht mitzuteilen. Taf. II Fig. 23—25 stellen die als Orbulinaria fallax bestimmte Art in siebzigmaliger Vergrößerung dar, Fig. 24 gibt eine ellipsoide Figur. Die Poren konnte ich an den mir vorgelegten Gehäusen nicht erkennen. Die Vergleichung dieser Schalen mit den in der Rügener Kreide vorkommenden läßt annehmen, daß hier eine vollkommene Identität vorliegt, denn feine Poren lassen sich an Rügener Gehäusen, wenn dieselben als Bruchstücke sich dem Auge so bieten, daß man die Schale von innen beobachten kann, ganz sicher wahrnehmen. An solchen Schalenstücken von Rügen gelang es mir sogar die zarten dunklen Punkte, welche Rhumbler auf seinen Zeichnungen angibt, die ich aber an seinen unbeschädigten Exemplaren nicht wahrnehmen konnte, zu erkennen. Auch fällt es auf, daß kugelige und elliptische Formen wie in den Seewenschichten miteinander auftreten. Herr Professor Dr. Rhumbler hat Rügener Schalen, die ich zum Vergleiche an ihn schickte, als Orbulinarien bestätigt. Der Erhaltungszustand der ge-

schlämmten Seewenergehäuse läßt die Identität mit Orb. fallax nicht bestimmt erkennen. Ich halte es demgemäß für gerechtfertigt, die Seewener, Unterbuchberger u. s. w. kugeligen und weckenförmigen Gehäuse als Orbulinaria sphaerica Kaufmann zu bestimmen. Herrn Dr. Rhumbler erstatte ich für seine Gefälligkeit meinen ergebensten Dank.

Die für die Seewenschichten charakteristische Häufigkeit der Orbulinarien bringt es mit sich, daß Schliffbilder von Proben aus diesen Schichten die Gehäuse der Orbulinarien in sehr dichter Aneinanderlagerung erscheinen lassen, wo die Ablagerung bis zu der Festigung des Gesteins keine Störung erfahren hat. So bietet Taf. VI Fig. 3 ein Schliffbild aus dem Seewenkalk von Seehof, welches die ziemlich gleichalterigen Gehäuse in ihrer kugeligen Form in Umkreisungen ohne scharfe Grenze gelagert darstellt. Es treten aber in den Schliffbildern auch verschiedene Lagerungsfigurationen ein, welche annehmen lassen, daß die ursprünglich gleichmäßige dichte Lagerung während des Festigungsvorganges in dem Gestein bestimmte Verschiebungen erfahren hat, so daß sich knollenförmige Büschel, wie in dem Schliffbild von Seehof Taf. VI Fig. 6, in den Knäuel an Knäuel reihenden Bildern aus der roten Schicht von Unterbuchberg in Taf. VI Fig. 1 zu ersehen ist, aus der ungeregelten Lagerung abheben. Eine andere Umgestaltung läßt sich in dem Schliffbilde Taf. VI Fig 7 von Öderberg wahrnehmen, in welchem eine leichte Einsenkung in der Mitte sich bildet mit gleichzeitiger Aneinanderreihung der einzelnen Exemplare in ringförmiger zahlreicher Wiederholung der immer weiter werdenden Kreise. In den Ringen sind neben den kugelförmigen Exemplaren auch weckenförmige eingereiht. Größere Kugelformen tauchen gleichfalls inzwischen auf. Letzteren begegnet man verhältnismäßig häufiger in solchen Schliffbildern, in welchen die einbettende Gesteinsmasse die vorherrschende Raumfläche ausmacht. Es liegen größere und kleinere Gehäuse einzeln oder in Gruppen verteilt in dem Gestein, wie dies das Schliffbild Taf. VI Fig. 5 von Öderberg und Taf. VI Fig. 2 aus dem Seewenkalk vom Grünten ver-

anschaulichen. In solchen Schliffpräparaten läßt sich beobachten, welche Veränderungen die Gehäuse auf der durch den Schliff freigelegten Innenfläche kundgeben. In Fig. 2 treten die von Heer beschriebenen Ringe mehrfach auf, Fig. 5 zeigt glatte kristallinisch ausgefüllte Scheiben ohne Ring, zeigt die Ringbildung mit Granulierung der Schale um eine zentrale Scheibe. In Gesteinspartien, in welchen die Algen eingedrungen sind, verleiht deren zwischen den Foraminiferen sich entwickelnde Ausbreitung dem Schliffbilde eine eigentümliche Netzstruktur. Wie Taf. VI Fig. 4 an einem Schliffpräparate von der roten Schicht von Unterbuchberg ersehen läßt, laufen parallele Algenstränge, einzelne oder mehrere Orbulinarien reihen einschließend, diesen entlang und suchen, seitlich den Raum zwischen den einzelnen Orbulinarien benützend, Verbindung mit den Nebensträngen. Die Algenfäden werden auch stärker und fließen zu Knollen zusammen, während andere Partien zu scholligblättrigen Flächen sich ausbreiten.

Eine den Algen vergesellschaftete Form aus dem Schlämmsatze der roten Schicht von Unterbuchberg (Taf. II Fig. 28, 29, 30) fällt auf als ästige Röhre mit unregelmäßigen Verzweigungen, welche bei weniger scharfer Einstellung im Focus mit der von Chapman in Annals and Magazine of Natural History Ser. 7, vol. VII, 1901 gegebenen Abbildung von Hyperammina ramosissima zur Note on some Fossils of Wenlock age from Mulde. near Klinteberg, Gotland, große Ähnlichkeit zeigt. Diese Ähnlichkeit tritt mehr heraus bei Fig. 29, insoferne Fig. 29 mehr als glatte Röhre sich darstellt. An diesem Exemplar sowie an dem in Fig. 30 gegebenen lassen sich als Endigungen der Äste sowie auch an dem Röhrenstamme warzenartige Knöpfe mit zentraler Vertiefung wahrnehmen, welche an Chapmans Abbildung kaum angedeutet sind. Die Röhren haben. solange sie einfach sind, einen Durchmesser von 0,04 bis 0,07 mm. Wenn man das Objekt etwas schärfer einstellt, beobachtet man, daß die ganze Röhre sich in horizontal abgetrennte Kammern zerteilt, welche beinahe von gleicher Höhe wie Breite sind. An mehreren Stellen verdoppelt die Röhre

diese Kammerreihen, bildet, wie Taf. II Fig. 30 zeigt, unregelmäßige Knollen. Chapman bezeichnet die Röhre obscurely segmented in a few places und erwähnt der Öffnungen an den Astendigungen. Mit den von Brady im Challengerreport gegebenen Darstellungen von Hyperammina ramosissima haben vorliegende Exemplare keine Übereinstimmung, da Bradys Bilder nur Röhren, keine Warzen auf der Fläche, keine Kammerabteilung im Innern wahrnehmen lassen.

In dem Schlämmsatze sowie in den Schliffpräparaten stößt man auf kugelige Gehäuse, welche, wie Taf. V Fig. 27 aus der roten Schicht von Unterbuchberg ersehen läßt, aus einer dünnen Schale mit körneliger Ausfüllung bestehen. Solche Gebilde stehen näher den Globigerinen, und läßt das Bruchstück Taf. V Fig. 9 neben zwei aufgebrochenen Kammern eine geschlossene kugelige angelagert sehen, welche der Taf. V Fig. 27 nach Gestalt, Größe und Dünnheit der Schale so ähnlich erscheint, daß man Fig. 27 als eine aus einem mehrkammerigen Gehäuse, wahrscheinlich Globigerina bulloides d'Orb., übrig gebliebene Einzelnkammer auffassen kann. Diese Ähnlichkeit trifft noch mehr zu bei hie und da sich findenden Einzelnkammern, wie sie in Taf. VI Fig. 5 und Taf. V Fig. 10 gegeben sind, in welchen die Schale der Kammer kristallinische radiäre Stäbchen oder Körnelung als Porenausfüllung erkennen läßt.

Überblickt man den Formenwechsel, wie er in Schlämm- und Schliffpräparaten der Orbulinaria aus den grauen und roten Mergel- und Kalkschichten vom Tegernsee-Schliersee, Grünten und Seewen-Gebiet sowie von der Rügener Kreide sich ergibt, so findet sich bei allen Fundstätten völlige Übereinstimmung. Die auf Tafel V gegebenen Figuren 39, 34, 13 stellen glattschalige Kugeln verschiedener Größe dar bei durchscheinendem Innenraum. An Taf. V Fig. 18 zeigt sich in der Mitte die beginnende Verdichtung als unbestimmt begrenzter Kern. In Taf. V Fig. 32 von Öderberg und 31 von Rügen hat der Verdichtungskern bereits eine weitere Ausbreitung gewonnen, in Fig. 22 von einer Kugel von Rügen liegt der Verdichtungskern seitwärts als abgegrenzte Innenkugel in dem durchschei-

nenden Körper. An Fig. 20 und 21 von Exemplaren des Öderberges, Fig. 37 und 38 von Rügener Exemplaren läßt sich wahrnehmen, wie die Kugel sich abplattet und in der Randansicht verschmälert erscheint. An einem Exemplare von Rügen (in Fig. 19) ist der Kreis im Innern vollständig ausgebildet. In Fig. 36 von Rügen ist nicht nur der Verdichtungsring ausgebildet, es hat auch der übrige Raum die helle Durchgängigkeit für Licht verloren, während Fig. 35 an einem Öderbergexemplare den innersten Raum kristallinisch hell, den Raum zwischen Verdichtungsring und Schalenrand verdunkelt zeigt. Fig. 14 gibt eine Kugel von Öderberg, welche eine runde Öffnung wahrnehmen läßt ähnlich einer Schalenmündung. In der Fig. 40 ist diese Beschädigungsöffnung an einem Schalenbruchstück von Rügen noch deutlicher als solche zu erkennen. Die in Fig. 23 von Öderberg, Fig. 24 vom Grünten dargestellten Ringe zeigen die am Rande der Schale wahrnehmbaren Lücken, wie sie von Heer als Mündungen von Lagena sphaerica aufgefaßt wurden.

In Taf. V geben die Figuren 15, 16, 17 die elliptische Form der Orbulinarien als glatte, vorne und hinten verengte Wecken von 0,10—0,12 mm Länge. Die in Schliffen aufgeschlossenen Gehäuse zeigen durch den Schliff entstandene Abschnitte an einem oder an beiden Enden. wie sie die Fig. 30 darstellt. Diese Abstutzung wurde von Heer als Mündung aufgefaßt und deshalb das Gebilde bei Lagena eingereiht. Häufig läßt sich an den Schalen eine zackige, von vorne nach hinten laufende Linie wahrnehmen, als wäre die Schale geborsten (Taf. V Fig. 29). Manche Formen verbreitern sich zu Ovalen, oder sie sind ungleich auf den Seiten (Taf. V Fig. 16). Zuweilen legen sich einzelne Exemplare aneinander und bilden (Taf. V Fig. 26) zweikammerige Gehäuse. In dem geschlämmten Satze der Proben sind zahlreiche Gehäuseangliederungen, wie sie den im Schliffe vorkommenden Büschelfiguren entsprechen, und ähnlich den Rotalinen und Globigerinen liegen zwischen den vielen Einzelngehäusen Häufungen von Kammern, wie Taf. V Fig. 43 aus der roten Schicht von Unterbuchberg sie darstellt.

Größere Gruppen gleichen den Beeren einer Traube. Wenn die Beerengruppen mehr in der Fläche sich ausbreiten, dann stehen sie der Acervulina cretae Marßon sehr nahe, doch sind an den Kammern, Taf. V Fig. 42, Schlämmprobe von Öderberg, weder die von Marßon angegebenen großen Poren, noch die Poren, wie sie Schultze — Über den Organismus der Polythalamien 1854 — für die von ihm beschriebenen Arten angibt, zu erkennen. Es fehlt auch die regelmäßig zu beobachtende Anheftung der Knäuel von Kugeln an irgend einen Strunk oder Ast, wie sie Schultze darstellt. Die einzelnen Kammern legen sich ohne Mündung aneinander.

Eine seltene Erscheinung ist ein Doppelgehäuse (Taf. V Fig. 44) von der roten Schicht von Unterbuchberg. Das Gehäuse gibt sich im Schliff mit 0,20 mm Länge und 0,15 mm Breite als der Durchschnitt durch eine Kugel mit sehr zarter Schale. Diese Kugel verlängert sich in der Art, daß eine Ausstülpung aus der Kugel sich bildet, als wolle eine jüngere, zweite an die erste Kugel sich anschließen. Der innere Raum ist fein granulös angefüllt, am Rande läßt sich eine abgrenzende Scheidewand nicht finden. Der größere Teil der Kugel sieht aus wie eine einzelne Globigerinenkammer, sie zeigt aber nirgends eine Einbiegung zu einer Mündung, der Innenraum geht ohne abtrennende Zwischenwand in den jüngeren Schalenteil über.

Diese Gehäuseform läßt sich als Übergang von dem einkammerigen Gehäuse in ein zweikammeriges betrachten. In seiner Größenzunahme ist die zweite Kammer zur Abstoßung noch nicht reif geworden.

Oligostegina laevigata Kaufmann.

Taf. I Fig. 25; Taf. II Fig. 5—13.

Unter diesem Namen stellt Heer eine Foraminiferenart auf, welche aus zwei oder drei Kammern besteht. Von diesen hat die zweizellige Form an der zweiten Kammer einen Randausschnitt, mit welchem sie einen Teil der ersten Kammer umfaßt. Bei dreizelligen Gehäusen legt sich die dritte Kammer

an die erste und zweite, mit diesen in gleicher Ebene bleibend, an. Die Kammern sind glatt, durchsichtig, kugelig, die erste ist meistens etwas kleiner als die folgende. Eine Mündung wurde nicht gefunden. Der Durchmesser beträgt 0,05 bis 0,12 mm. Heers Abbildungen in der Urwelt der Schweiz sind einfache Durchschnittsringe nebeneinander liegender Kugelgehäuse. Heer verschließt sich mit anderen Beobachtern nicht der Vermutung, daß diese Formen Jugendgebilde anderer Arten sein könnten.

In den vorliegenden Proben von Seewen, Unterbuchberg, Grünten, Öderberg treten die zweikammerigen Gehäuse nicht massenhaft, aber doch ziemlich häufig auf. In der Rügener Kreide finden sie sich mehrfach. Die dreikammerigen Gehäuse sind allenthalben seltener, besonders in der Schreibkreide von Rügen.

Der Form nach möchte die in Taf. II Fig. 10 gegebene Abbildung eines Exemplares mit erhaltener, von der Schnittebene des Schliffes nicht berührter Oberfläche als typisch erscheinen. Taf. II Fig. 12 und 13 entsprechen den Heer'schen Abbildungen als ringförmige Durchschnitte durch die zwei kugelförmigen Kammern. Als Eigentümlichkeit der Art fällt die Überlagerung des Ringes von der ersten Kammer auf die zweite auf. Bei Fig. 12 ist aber der Zweifel, daß hier eine Globigerina vorliege, sehr berechtigt. Noch entschiedener gibt sich die Ähnlichkeit mit Globigerina bei Taf. V Fig. 11, welche die untere der zwei Kammern etwas höher liegend darstellt, während die obere etwas schattig tiefer liegt und der Rand der Schale in dieser oberen Kammer kräftiger ist als der in der unteren. Eine typische Figur bietet Taf. II Fig. 6 in der Art der Aneinanderschließung der Kammern, welche hier aber, im Zusammenhang gestört, die Kammerwand beider Schalen nach innen eingerollt zeigt, ohne den Zusammenhang der Kammern als zweizelliges Gehäuse zu verlieren. Eine auffällige Aneinanderschließung läßt Taf. I Fig. 25 wahrnehmen. Hier sind zwei Kammern durch eine in Serpentine laufende Verbindung der Schalen aneinandergereiht. Das Schliffbild ist

geglüht, die Schale zeigt bei durchfallendem Lichte goldgelbe Färbung und läßt auch eine zarte Granulierung wahrnehmen. Die serpentine Form der Schalenverbindung führt zu der Vermutung, es sei das Gehäuse in seiner Längsachse gedreht worden.

Mehrfach begegnet man zweikammerigen Exemplaren, welche, wie Taf. II Fig. 3 vom Öderberge im Schliffbilde darstellt, aus ovalen Kammern bestehen, welche in typischer Form die eine Schale mit einem Teile des Randes auf die andere Kammer, diese bedeckend, auflegen. Diese Auflagerung zeigt sich auch in dabei vorkommenden Unregelmäßigkeiten, wie ein Schliffbild Taf. II Fig. 7 aus den roten Schichten von Unterbuchberg zeigt, dessen auflagernder Schalenteil der einen Kammer in Hufeisenform verbogen ist. Weitere Unregelmäßigkeiten zeigen sich darin, daß die zwei Kammern, welche das Gehäuse bilden, wesentlich verschiedene Form haben. So zeigt das Schliffbild Taf. II Fig. 8 von Öderberg eine Kugel, an welche sich als zweite Kammer eine quadratische Figur angliedert. Noch ausgesprochener ist diese Ungleichheit in dem Schliffbild Taf. II Fig. 9 von Öderberg, welche vielmehr annehmen läßt, daß diese Gebilde 8 und 9 Bruchstücke größerer Gehäuse sind, aus welchen sie als je eine Kammer einer mittleren und einer äußeren Windung sich erhalten haben.

Eine an verschiedenen Fundorten vorkommende Einzelnkammer stellt das Schliffbild Taf. I Fig. 28 aus der grauen Schicht von Unterbuchberg dar, welches als unregelmäßiges Oval nur die Durchschnittsfigur der Schale und deren kristallinisch körnelige Ausfüllung enthält, in der Gestalt aber zu der Vermutung drängt, daß hier eine einzelne Kammer von Oligostegina vorliegt, deren zweite Kammer verloren gegangen ist.

Noch einfacher ist ein Schliffbild Taf. V Fig. 25, welches lediglich eine ovale kristallinische Figur ohne besonders ausgebildete Schale darstellt, gleichfalls eine aus früherem Zusammenhang gerissene Einzelnzelle.

Oligosteginen mit drei Kammern finden sich nicht in

größerer Zahl, überhaupt seltener als die zweikammerigen in den verschiedenen Proben. Entsprechend dem typischen Bilde Heers zeigt Taf. II Fig. 11 ein Schliffbild von Öderberg, in welchem die drei das Gehäuse bildenden Kammern als einfache Ringe aneinandergelagert erscheinen. Eine Verschiedenheit dieser Kammern besteht noch darin, daß die letzte, größere einen Schalenring mit doppelter Wandung darstellt, während die etwas kleineren vorausgehenden einfache Ringe sind. Ein anderer Schliff auch von Öderberg bietet drei Kammern wohl auch in einer Ebene aneinandergelagert, aber nur die dritte, größere bildet einen geschlossenen Ring, die beiden vorausgehenden liegen ohne Trennungsleiste ineinander sich verlierend neben der letzten Kammer. Der innere Raum der drei Kammern (Taf. II Fig. 5) ist mit feingranulöser Masse ausgefüllt.

Es kommen sehr häufig nebeneinanderliegend zwei, auch drei Gehäuse vor, welche in dieser Lagerung ganz den Oligosteginen gleichen, aber sie sind nicht fest angegliedert und lösen sich leicht von einander in bewegtem Probewasser. Die Aneinanderfügung der Kammern bei den Oligosteginen tritt so regelmäßig als eine dauernde auf, daß diese Foraminiferenform wohl als ein selbständiges Genus betrachtet werden kann.

Während die bisher geschilderten Foraminiferenformen in ihrem Erscheinen durch die Massenhaftigkeit eine Besonderheit entwickeln, finden sich neben denselben verschiedene Arten von einzelkammerigen und mehrkammerigen eingestreut als Lagenen, Nodosarien, Textulariden. Die letzteren sind an Arten und Individuenzahl reicher und in der Regel auch gut erhalten.

Wie bei den Oligosteginen das Hinübergreifen des Schalenrandes einer Kammer über den Schalenrand der anderen Kammer als beständige Arteigentümlichkeit auftritt, finden sich in den Schliffbildern nicht selten solche Aneinandergliederungen unter Formen, welche die Zahl der Zweikammern überschreitend, drei, auch vier Kammern in der Art aneinanderreihen, daß stets eine Kammer auf die folgende mit ihrem Rande übergreift.

Man könnte glauben, daß man dreikammerige Oligosteginen vor sich habe. Allein diese Gehäuse legen die Kammern nicht spiral gereiht. sondern in gerader Richtung aneinander, wie dies in Taf. II Fig. 4 dargestellt ist. Man hat demnach noch eine Textularie vor sich, welche in der Randansicht aufgeschlossen ist. Die fast gleiche Breite der entwickelten Kammern macht aber die Art, zu welcher solche Gehäuse einzureihen wären, unsicher.

Textularia globulosa Ehrenberg. Mikrogeologie.

Taf. II Fig. 14, 15.

Heer beschreibt eine Art, welche ein durchsichtiges, glattes, dreiseitiges, wenig zusammengedrücktes Gehäuse hat, an den Rändern abgerundet, unten stumpf, oben schief begrenzt ist. Die drei bis fünf Kammern jeder Seite sind kugelig und werden durch ziemlich tiefe Einschnürungen gesondert. Ihr Durchmesser hat 0,04 bis 0,15 mm. Heers Abbildungen geben ein jüngeres, breiteres und ein längeres Gehäuse mit einer Reihe in der Randansicht gerade übereinandergestellter Kammern. Als Fundstätten werden der Seewenkalk von Seewen, Gersau, Bürgen, Rotzloch, die Schreibkreide von Rügen und England, der Plänerkalk von Töplitz benannt, wie auch nach Ehrenberg die weiße Kreide Ägyptens, des Antilibanon, von Sizilien, Meudon, Gravesend. Insel Moen, das Gebiet von Missouri und Mississipi.

Die Schliffbilder 14 und 15 von der roten Schicht von Unterbuchberg geben Gehäuse verschiedener Größe und zeigen die nach der Zentralachse des Gehäuses geöffneten Schalenringe im Durchschnitt. Die Gehäuse haben 0,13 und 0,20 mm Länge. Auch geschlämmt finden sich Exemplare dieser Art an allen Fundstätten und vorherrschend die kleineren Exemplare. Formen, welche anderen Arten ziemlich nahe kommen, treten in den verschiedenen Fundorten mehrfach auf.

Textularia pupa Reuss. Die Foraminiferen der westfälischen Kreideformation, 1860.

Taf. I Fig. 26.

Das geschlämmte Gehäuse von den roten Schichten von Unterbuchberg hat 0,17 mm Länge, 0,13 Breite, ist aus zwei Reihen von je vier kugeligen, mit seichten Horizontalnähten abgetrennten Kammern gebildet. Die Oberfläche der Schale ist mattrauh.

Textularia conulus Reuss. Beiträge zur Kenntnis der Kreideschichten aus den Ostalpen, Gosau u. s. w. 1854.

Taf. II, Fig. 1, 2, 17.

Wie in der Kreide von Rügen findet sich diese Art geschlämmt mehrfach in den Proben des grauen und roten Mergelkalkes von Öderberg, Unterbuchberg, Grünten, ebenso in Schliffpräparaten daher. Fig. 2 gibt die Flächenansicht, Fig. 1 die Randansicht und Fig. 17 zeigt die Schale in seitlicher Stellung vom Rande aus. Die abgebildeten Exemplare sind lediglich Ausfüllungsmasse der Kammerhohlräume, die Schalensubstanz ist zugrunde gegangen. Der Aufbau der kugeligen Kammern in gleichmäßigem Wachstumsverhältnisse mit entschiedener Neigung zur Flächenausbreitung nach vorne bei horizontaler Nahtlinie zwischen den Kammern gibt hinreichende Anhaltspunkte für die Bestimmung der Art.

Textularia pygmaea Reuss. Die Foraminiferen des norddeutschen Hils und Gault. 1863.

Taf. II, Fig. 20, 21.

Auffallend häufig finden sich Textularien in den Schliffpräparaten in einer Stellung, welche die Schale vom Rande aus gesehen darstellt und meist begegnet man der in Fig. 20 abgebildeten Form, während das Flächenbild 21 nur von einem einzigen geschlämmten Exemplare von Öderberg gewonnen werden konnte. Die Schale ist porös rauh, stellt die Kammern mit seichten, horizontalen Nahteinschnürungen in zwei Reihen alternierend übereinander auf. Das vorliegende Gehäuse hat 0,20 mm Länge.

Textularia globifera Reuss. Die Foraminiferen der westfälischen Kreideformation. 1860.

Taf. II Fig. 16.

In einer Probe von Seehof bei Seewen fand sich geschlämmt ein Gehäuse, welches in dem schlanken Aufbau der kugelrunden Kammern in alternierender Reihenfolge die ausgesprochenen Artmerkmale einer Text. globifera an sich trägt.

Textularia aciculata d'Orbigny. Tableau méthodique de la classe des céphalopodes. Extr. d. Annales des sciences natur. Tome VII.

Taf. I Fig. 21, 23, 24.

Diese in verschiedenen Fundorten aufgefundene Art bietet in jedem Exemplare eine abweichende Gestaltung, gemeinschaftlich charakterisieren sie sich aber durch die Form der im Schliffbilde zu eigentümlichen Randvorsprüngen ausgebreiteten niederen Kammern, welche auf einer kugeligen Embryonalzelle sich in zwei Reihen aufeinander stellen, in der Längenachse des Gehäuses zu einer Zickzacklinie sich vereinigen. Fig. 23 ist ein 0,15 mm langes geschlämmtes Exemplar aus den roten Schichten von Unterbuchberg, hat keine Schale, ist nur Ausfüllungsmasse der Kammerhohlräume. Die Schliffbilder 21 und 24 geben den Durchschnitt durch die Schale sehr deutlich und lassen die Kammerabtrennung zwischen den einzelnen Kammern und an der Achsenvereinigung sowie den lappigen Randvorsprung der einzelnen Kammern sehr deutlich wahrnehmen. Sie sind Proben des Grüntener Seewenkalkes und der roten Schichten von Unterbuchberg entnommen.

Textularia aculeata Ehrenberg. Mikrogeologie 1854.

Taf. I Fig. 22.

Im Seewenkalke von Grünten fand sich als Schliffbild eine Textularia von 0,16 mm Höhe und 0,09 Breite, deren mäßig hohe Kammern kräftige Schalenwände zeigen, die sich nach oben etwas wölben, und deren Rand mit einem dornstacheligen Ausläufer besetzt ist. Ehrenberg bildet in der Mikrogeologie

diese Art als Grammostomum aculeatum aus der Schreibkreide von Gravesend und als Textularia aculeata aus der Schreibkreide der Insel Moen ab.

An diese Textularien reihen sich nun verschiedene Arten anderer Genera, welche in den untersuchten Fundstätten vereinzelt gefunden wurden.

Bolivina linearis (Ehrenberg) Marßon. — Die Foraminiferen der weißen Schreibkreide der Insel Rügen. 1877.

Taf. I Fig. 27.

Ehrenberg beschreibt in der Mikrogeologie als Grammostomum lineare von der Insel Moen und Marßon als Bolivina linearis von Rügen eine Form, welche im Schlämmsatz einer Probe von Seehof bei Seewen in einem stark abgeriebenen Exemplare von 0,17 mm Länge und 0,02 Breite gefunden wurde. Dessen Porenringe sind etwas verwischt. Eine Mündung ist an dem Gehäuse nicht mehr zu erkennen. Der Schalenumriß, die Breite und Schrägstellung der Kammern bestätigen die Zugehörigkeit zu Bol. linearis.

Bolivina tegulata Reuss. Haidinger, Naturw. Abh. Bd. IV. 1851.

Taf. I Fig. 20.

Im Schlämmsatze einer Probe aus dem Mergelkalke vom Oderberge wurde ein stark angegriffenes Exemplar aufgefunden, an welchem die zahlreichen Kammern doch soweit erhalten sind, daß man deren dachziegelartig gereihte Übereinanderstellung in zwei alternierenden Reihen, die langgestreckte Form, das haubenförmige vordere Ende des Gehäuses ganz gut erkennen kann. Die Länge beträgt 0,45, die Breite 0,08 mm.

Bolivina incrassata Reuß. — Die Foraminiferen und Entomostraceen der Kreide von Lemberg. 1850.

Taf. 1 Fig. 18.

Das geschlämmte Bruchstück von 0,23 mm Länge und 0,15 Breite hat je vier alternierende Kammern, welche flach

sind, sich sehr nach abwärts neigen, in der Mitte der Schale in einer von vorne nach hinten verlaufenden Zickzacklinie sich vereinigen, das Ansehen einer glatten Schale gewinnen. Das ältere Stück des Exemplares ist abgebrochen. Die Mündung ist nicht zu entdecken gewesen. Die Kammernähte senken sich nicht tief ein, die Kammern treten am Rande nur schwach hervor.

Bulimina pupoides d'Orbigny. Die Foraminiferen des Wiener Tertiärbeckens. 1846.

Taf. I Fig. 15.

Ein Schliffpräparat aus dem Grüntener Seewenkalke von 0,27 mm Länge und 0,13 Breite weist auf einer kugeligen Embryonalkammer drei Umgänge von bauchigen Kammern auf, deren letzte die vorausgehenden an Umfang bedeutend übertrifft. Der Schliff legt eine sehr dünnwandige Schale frei, deren Innenraum in den Kammern mit kristallinischen Bröckelchen ausgefüllt erscheint.

Valvulina gibbosa d'Orbigny. Mémoire sur les Foraminifères de la craie blanche du bassin de Paris. 1840.

Taf. I Fig. 14.

In den roten Schichten von Unterbuchberg wurde aus dem Schlämmsatze ein Gehäuse von 0,25 mm Länge und 0,16 Breite gefunden, welches traubenförmig sich in Umgängen aufrichtende kugelige Kammern in dreizeiliger Folge aufrollt. In der letzten ist die Mündung am Septalrande geborgen. Die Oberfläche der Schale ist dicht besetzt mit feinen Poren.

Bigenerina.

Taf. I Fig. 16, 17, 19, Taf. II Fig. 27.

In verschiedenen Schliffpräparaten haben sich vier Exemplare gefunden, welche zum Teil als Bruchstück, zum Teil durch sekundäre Umgestaltung in Formen erscheinen, welche unsicher zu den Arten einzustellen sind, als welche sie bezeichnet werden sollten.

Taf. I Fig. 19 gibt ein aus den grauen Schichten von Öderberg entnommenes Schliffbild von 0,55 mm Länge und 0,18 Breite, welches, der Schale völlig verlustig, nur die kalkigen Ausfüllungen der Kammerhohlräume erhalten zeigt. Die erhaltenen Ausfüllungen bieten aber in sehr deutlicher Entwicklung die Aufstellung von zwei Reihen von breiten, nicht hohen Kammern auf einer kugeligen Anfangskammer. Diese Zweireihenstellung geht mit einem Male gegen das Ende der Schalenlänge in eine einreihige Kammerfolge über, die Kammern werden nun je eine so breit, als vorher zwei waren, in der Mitte senken sie sich nach unten etwas ein. Berthelin beschreibt in Mémoire sur les foraminifères fossiles de l'étage Albien de Montcley eine Bigenerina excavata, zu welcher die von Öderberg vorliegende Ausfüllungsfigur sich vielleicht einfügen läßt, allein der gänzliche Mangel der gerade für diese Art so eigentümlichen zackigen Umrißgestaltung nimmt der Bestimmung als Art alle Sicherheit, wenn auch die tiefen Furchen zwischen den einzelnen Kammern vermuten lassen, daß hier eine massigere Umhüllung des Innenraumes der Schale vorhanden gewesen sei.

Das in Taf. II Fig. 27 abgebildete Schliffpräparat aus dem Seewenmergel von Foopaß im Kanton Glarus ist fast einen Millimeter lang, ist vorne beschädigt, zeigt von den einreihigen Kammern nur die letzteren erhalten, ist schollig rauh auf der Oberfläche, hat sehr kräftige, alternierend gelagerte Kammern. Am Rande läuft der Schale entlang ein undeutlicher schmaler Saum. Dadurch erhält dieses Schliffbild Ähnlichkeit mit Bigenerina Nicobarensis, welche Schwager in dem Reisebericht der Novaraexpedition beschreibt.

Die Figuren 16 und 17 aus dem Seewenmergel von der Alpspitze bei Nesselwang sind Schliffbilder, welche Ähnlichkeit zeigen mit Ehrenbergs Bigenerina libanotica aus der weißen Kreide des Antilibanon und Bigenerina cretae von Meudon (Mikrogeologie) in der alternierenden Aufeinanderlagerung der Kammern. Noch größere Ähnlichkeit findet sich in Figur 17

mit der von Gümbel, Beiträge zur Foraminiferenfauna der nordalpinen Eocängebilde, 1868, aufgestellten

Venilina.

Wie bei Gümbels Ven. nummulina entwickelt sich auf einer Zweizeile mit einem Male die einreihige Übereinanderlagerung der Kammern, aber die Zweireihe geht bei Fig. 16 und 17 aus einer kugeligen Anfangskammer hervor, welche bei Ven. nummulina fehlt. Auch strebt bei letzterer die Zweireihe mehr in die Breite. In Fig. 16 gibt sich die Schalenform als jugendliche Aufrollung einiger niederen Kammern, welche die kugelige Anfangskammer sehr breit umfassen und nur geringe Höhe gewinnen, während in Fig. 17 die der kugeligen Anfangskammer anliegenden Kammer sehr rasch nach der Länge des Gehäuses sich strecken und schon nach ein paar Zweikammervereinigungen in die Venilina ähnliche Einreihe übergehen. Von der Mündung hat der Schliff an beiden Exemplaren keine Spur aufgeschlossen. Fig. 16 hat 0,15, Fig. 17 hat 0,25 mm Länge.

? Flabellina simplex Reuss. Die Foraminiferen und Entomostraceen des Kreidemergels von Lemberg. 1850.

Taf. I Fig. 10.

Ein Schliff aus dem Seewenkalk vom Grünten gibt den Flächendurchschnitt eines Gehäuses mit sehr dünner Schale und kristallinischer Ausfüllung des Innenraumes. Das hintere Ende des Gehäuses wird gebildet von einer kugeligen Kammer, welche nach innen zu einer embryonalen runden Zelle sich einrollt. An diese Kammer reihen sich alternierend zweimal zwei Kammern, welche gleichfalls stark gebogenen Schalenwanddurchschnitt zeigen, vorne endet aber das Exemplar mit einer einzelnen Kammer, welche allerdings etwas seitlich gerichtet ist. Der Habitus dieses Gebildes stellt dasselbe nahe Flabellina simplex, allein die zweizeilige Entwicklung des mittleren Schalenteiles spricht nicht für Flabellina.

Sehr gering ist die Vertretung der Lagenen, Glandulinen und Nodosarien.

Glandulina cylindracea Reuss. Die Foraminiferen und Entomostraceen des Kreidemergels von Lemberg. 1850.

Taf. I Fig. 4.

Ein nur 0,17 mm langes Schliffpräparat aus den grauen Schichten von Unterbuchberg zeigt zylinderförmigen Umriß der Schale, hat vier Kammern. Das Schliffbild ist nur Ausfüllungskalk. Die Nähte sind sehr zarte horizontale Linien. Das Gehäuse war etwas zusammengedrückt und spiegelt deshalb von dem vorderen bis zu dem hinteren Ende parallel dem Rande eine gerade Linie wie von einem Seitenkanal. Vorne ist das Gehäuse abgestutzt.

Glandulina?

Taf. I Fig. 11.

Von den roten Schichten von Unterbuchberg schloß der Schliff einer Probe ein Exemplar auf, dessen Schale gänzlich verschwunden ist, welches aber durch die kristallinische Ausfüllung der Hohlräume der einzelnen Kammern sehr deutliche Umrißformen erhalten zeigt. Drei Kammern verschiedener Größe werden durch lange Verbindungshälse aneinander gereiht und stehen in gerader Linie übereinander. Die erste und zweite Kammer sind oval, mehr lang als breit. die dritte steht auf der vorhergehenden als Kugel von größerem Umfang, und endet vorne eben abgeschnitten. Die Länge des ganzen Gehäuses beträgt 0,60 mm.

Nodosaria Adolphina d'Orbigny. Die Foraminiferen des Wiener Tertiärbeckens. 1846.

Taf. I Fig. 3.

Das nur 0,16 mm lange Bruchstück aus der roten Schicht von Unterbuchberg gibt als Schliffpräparat sechs Kammern, von welchen die ersten vier, ganz nahe aneinander gerückt, kaum getrennt werden durch seichte horizontale Nähte, während die zwei letzten Kammern sich freier abheben und in den Abständen halsartig verlängert erscheinen, wodurch die letzten Kammern becherförmigen Umriß erhalten.

Nodosaria legumen Reuss. Die Foraminiferen und Entomostraceen des Kreidemergels von Lemberg. 1850.

Taf. I Fig. 1.

Im Seewenkalk vom Grünten und von Unterbuchberg gab der Steinschliff den Durchschnitt von zwei aus sechs Kammern gebildeten Gehäusen, welche eine sehr dünne Schale haben, die Kammern in gleichmäßigem Wachstum mit leichter Dentalinenneigung aufeinandersetzen, bei 0,50 mm Länge 0,09 Breite entwickeln, die Mündung am vorderen Ende der Schale nur durch die Form des Endstückes andeuten.

Nodosaria Jonesi Reuss. Foraminiferen des Gault von Folkstone. Sitzber. Akad. Wiss. Wien. 1862.

Taf. I Fig. 2.

In den roten Schichten von Unterbuchberg fand sich im Schliff eine Nodosaria von 0,20 mm Länge, welche in ihrem Aufbau von gleichmäßig an Umfang zunehmenden, durch seichte Nahteinkerbungen getrennten Kammern der von Reuß gegebenen Abbildung sehr ähnlich erscheint. Das vorliegende Exemplar hat aber nicht vier, sondern sechs Kammern und die bei Reuß am vorderen Ende des Gehäuses als Zuspitzung, am hinteren Ende als Stachel angegebenen Artmerkmale fehlen hier, wahrscheinlich infolge des Schliffes, denn die vordere Endigung läßt vermuten, daß die letzte Kammer nach vorne mehr zugespitzt war, als sie sich jetzt noch gibt. Der Stachel ist aber vollständig verschwunden.

Lagena apiculata Reuss. Die Foraminiferenfamilie der Lageniden. Sitzber. Akad. Wiss., math. Kl., Band XLVI. 1862/3.

Taf. I Fig. 9.

Diese in einem geglühten Schliff von Oderberg angetroffene Lagenaform gibt den Flächendurchschnitt eines Gehäuses von 0,53 mm Höhe. Die Umrißform weicht von der typischen in der Art ab, daß das Gehäuse seitlich verlängert und dadurch der tertiären Fissurina carinata Reuß von Pietz-

puhl um so ähnlicher erscheint, als auch der Innenraum der Schale im Durchschnitt des vorliegenden Exemplares mit einer dem Rande parallelen inneren Linie abgegrenzt wird.

Lagena laevis Montagu. Häusler, die Lageninen der schweizerischen Jura- und Kreideformation. Neues Jahrbuch für Min. etc. 1887. Bd. I.

Taf. I Fig. 5, 6.

Zwei Schliffpräparate aus dem Ödergraben (Fig. 6) und aus den roten Schichten von Unterbuchberg (Fig. 5) geben zartschalige Längsdurchschnitte ähnlich den von Häusler aus den Transversariusschichten von Buren abgebildeten Lagenen. Im Umriß mit diesen völlig übereinstimmend, sind sie vorne an der Mündung so stark angeschliffen, daß die Mündung nicht sichtbar ist. Die Schalen sind deutlich erhalten, der innere Raum ist bei einem Exemplare (Fig. 6) erdig, bei dem anderen (Fig. 5) kristallinisch ausgefüllt. Sie erreichen 0,28 bis 0,30 mm Länge und enden hinten mit einer scharfen Spitze.

Lagena apiculata emaciata Reuss. Chapman. The Foraminifera of the gault of Folkstone. Journ. Univ. Soc. 1894.

Taf. I Fig. 7, 8.

Eine von Dr. Imkeller gegebene Probe von Algenfleckenmergel aus dem Kramsberggraben bei Schliersee gab im Schlämmsatz eine etwas angegriffene, auf der Oberfläche feinschollig matte Lagena von 0,38 mm Länge, welche seitlich stark zusammengedrückt, hinten gerundet, vorne zur Mündung verschmälert mit der von Chapman gegebenen Abbildung zutreffende Form bietet. Die Seitenansicht gibt eine kleine seitliche Verlängerung nach hinten bei vorliegendem Exemplar (Fig. 8), in der Randansicht gleichen (Fig. 7) die Formen vollständig der Chapman'schen Abbildung.

Cristellaria rotulata Lamk. d'Orbigny. Mémoire sur les foraminifères de la craie blanche de bassin de Paris. 1839.

Taf. I Fig. 13.

In den grauen wie in den roten Schichten von Unterbuchberg werden im Schliffe Cristellarien in einer Lage aufgeschlossen, welche dem Beobachter die Septalfläche der Schale darbietet. Der Schliff zeigt die Schale ganz gerade auf der Rückenkante liegend und von der Schliffläche gibt sich in der oberen Hälfte das Bild der die letzte Kammer abschliessenden Septalfläche mit den charakteristischen seitlichen Randleisten, welche oben in der Schalenmündung sich vereinigen. Von dem eingerollten Körper des Gehäuses sind die Hohlräume der letzten Windung durch den Schliff teilweise aufgeschlossen. Das Gehäuse ist bei 0,55 mm Höhe ziemlich flach, die Zentralscheibe nur wenig sichtbar.

Cristellaria macrodisca Reuss. Die Foraminiferen des norddeutschen Hils und Gault. 1863.

Taf. I Fig. 12.

In einem Schliffpräparat von dem Seewenkalk in Seewen bietet die Schliffläche eines Gehäuses von 0,40 mm Höhe das Bild einer Cristellaria, welche auf der Rückenschneide liegend in der oberen Hälfte die Septalfläche der letzten Kammer zeigt, während die untere Hälfte angeschliffene Hohlräume der Kammern der Schlußwindung darbietet. Die Breite des Gehäuses läßt zu beiden Seiten die großen Segmente der die Art charakterisierenden zentralen Scheiben wahrnehmen.

Zum Teil gut erhalten, zum Teil als Bruchstück, zeigen sich fast in allen untersuchten Proben von Rügen sowie von der Tegernsee-Schliersee, der Grünten-Gegend, von dem Kalk von Seewen in der Schweiz Globigerinen. Geschlämmte Gehäuse sind zahlreich zu finden, aber sie sind in der Regel nicht gut erhalten. Die größeren Gehäuse sind Bruchstücke, welche auf den äußeren Wänden der Schalen sowie in den Spangen

und Leisten des Gerüstes zum Teil sogar kammförmigzackige und wulstige Auflagerungen auf Gerüstteilen wahrnehmen lassen.

Heer beschreibt unter der Benennung Nonionina Escheri Kaufmann eine aus fünf in kreisförmiger Aneinanderlagerung sich aufrollenden Kammern gebildete Foraminifere, welche durch die in einer Ebene sich vollziehende Einrollung bei der Betrachtung vom Rande aus wie eine Nonionina aussieht, allein die Gehäuse zeigen nicht die für Nonionina charakteristische Mündung und die als zentrale erste Kammer angenommene fünf- oder sechseckige Figur ist keine Kammer, sondern die leere Nabelgrube, um welche sich die fünf Kammern angelagert haben. Heer reiht an diese Form eine weitere Art als Nonionina globulosa Kaufmann, welche von der Non. Echeri sich dadurch unterscheidet, daß die äußere Windung sechs oder sieben Kammern hat, und daß auf deren oberer Fläche einige kleinere Kammern zu einer Mittelwindung sich einrollen, während die untere Fläche mit der äußeren Windung die Nabelgrube umschließt. Nach Heer hat Rupert Jones diese Nonioninen als

Globigerina cretacea d'Orbigny

Taf. III Fig. 20, 21

bestimmt. Diese von d'Orbigny in Mémoire sur les foraminifères de la craie blanche du bassin de Paris beschriebene Art ist nach einem Schliffpräparat Taf. III Fig. 20 aus dem roten Mergelkalk von Unterbuchberg abgebildet. Das Gehäuse ist eine typische Form, besteht aus einer sechskammerigen äußeren Windung, auf deren oberer Fläche die kleinen Kammern der Mittelwindung, eine kleine Zentralkammer umkreisend, aufliegen. Die Oberfläche des Gehäuses ist dicht mit feinen Porenhöckerchen besetzt. Der Durchmesser desselben erreicht 0,24 mm. Taf. III Fig. 21 stellt einen Schliff dar, welcher durch fast sämtliche Kammern in deren Flächenausbreitung durchgeht, so daß das Wachstum in seiner gleichmäßigen Zunahme mit hohem Bogen jede einzelne Kammer am Rande gewölbt her-

austreten läßt, während die Schale nach der Mitte zu offen bleibt.

Die rasche Umfangszunahme der einzelnen Kammern, das charakteristische Merkmal von dieser Art, ist häufig an Schliffen zu beobachten, welche von den Gehäusen gar keine Schalenspur mehr erhalten haben, deren kristallinische Raumausfüllung allein in der Gesteinsmasse durch die Umrißfigur die Art erkennbar macht. In dem Schlämmsatz der verschiedenen Proben sich findende Gehäuse sind in der Regel kleiner, stark abgerieben.

Globigerina aequilateralis Brady. Challenger, Report on the Foraminifera. 1884.

Taf. III Fig. 19, 23—28.

Geschlämmt und in Schliffpräparaten begegnet man dieser Form in allen Fundorten, von welchen Proben untersucht wurden. Die Gehäuse haben manchmal kaum 0,10 mm Durchmesser, erreichen aber in der Regel 0,20 und darüber. Sie sind flach und zeigen in der Randansicht eine große Ähnlichkeit mit Nonioninen, wie Taf. III Fig. 26 aus dem Schlämmsatz von Öderberg darstellt. Die Kammern wachsen nicht so rasch an Umfang wie die von Glob. cretacea, legen sich gleichmäßig entwickelt aneinander, sieben bis acht in der äusseren Windung, und bilden auf der oberen (Fig. 24) Fläche eine wenig gewölbte, fast ebene Mittelwindung. Die Nabelfläche läßt bei gut erhaltenen Exemplaren (Fig. 25) die Einrollung der Mittelwindung in der Tiefe zum Teil beobachten. Taf. III Fig. 19 stellt ein auf der Oberfläche etwas rauhes Exemplar von Öderberg mit seiner unteren Fläche dar.

Mehrfach begegnet man in den Schliffpräparaten Durchschnitten, welche (Taf. III Fig. 23) die Schale vom vorderen Rande zeigen, an den Enden je eine größere Kammer, zwischen diesen drei kleinere in einer Ebene ausgebreitet bieten. Taf. III Fig. 28 gibt im Schliffbild die Ansicht vom Rückenrande eines kleineren angegriffenen Gehäuses. Die Schale ist, wie das geschlämmte Exemplar von Öderberg in Fig. 24, 25, 26 ersehen läßt, in der Regel glatt. Angegriffene Gehäuse,

wie Taf. III Fig. 27 erscheinen körnelig rauh, wo die Schale verloren gegangen ist, Fig. 28, zeigt sich eine krystallinisch-bröckelige Ausfüllungsmasse erhalten.

Globigerina bulloides d'Orbigny. Forminiferen des Wiener Tertiärbeckens. 1846.

Taf. V Fig. 12.

In den Schliffpräparaten wie freigeschlämmt findet sich diese Art ziemlich selten im Seewenkalk von Seehof, in den roten und grauen Schichten von Unterbuchberg, Öderberg als Gehäuse von vier Kammern ziemlich gleicher Größe, auf der Oberfläche etwas porösrauh, mehr oder minder angegriffen. Durchmesser 0,16 mm.

Discorbina (Rosalina) canaliculata Reuss. Beiträge zur Charakteristik der Kreideschichten in den Ostalpen u. s. w. Denkschr. Akad. Wissensch., Band VII. 1854. Wien.

Taf. III Fig. 1—4, 11—18, Taf. V Fig. 1, 2, 5, 7.

Reuss beschreibt diese als selten in den Gosauschichten vorkommende Art mit nachstehenden Merkmalen. Die runden, flachen Gehäuse haben auf der oberen Schalenfläche eine doppelte Reihe von Kammern. Eine äußere Windung hat sechs, selten acht Kammern, deren stark gebogene, wulstige Kammernähte am Rande eine Kante bilden. Diese äußere Windung umschließt eine innere mit kleineren Kammern. Die untere Fläche des Gehäuses zeigt nur die äußere Windung, hat in der Mitte eine Nabelvertiefung. Auch die untere Fläche bildet am Rande eine Kante. Zwischen der oberen und unteren Kante ist der Rand ausgehöhlt zu einer Rinne, welche die Schale dem ganzen Umfang entlang umkreist. Die Schalenoberfläche ist dicht besetzt mit Porenhöckerchen und Knötchen, welche namentlich auf den Wülsten der Kammernähte und auch am Rande der Schale stärker hervortreten.

Reuss hat diese Art noch beschrieben als Discorbina canaliculata aus der Kreide am Kanarasee, Karrer fand

sie in der oberen Kreideformation von Leitzersdorf, Fred. Chapman führt sie an in einer Note über „Foraminifera and Ostracoda from the cretaceons strata of East Pondoland, South Africa“ in Annals of the South African Museum, 1904, von Jones, Burrow und Holland wurde sie als Globigerina Linnaeana d'Orbigny aus dem Crag, von Brady mit gleicher Bezeichnung in dem Report zur Challengerexpedition namhaft gemacht. Ich selbst habe sie in meiner Arbeit über die Foraminiferen und Ostrakoden der oberbayerischen alpinen Kreide von fast allen dort angeführten Fundstätten nachgewiesen. Diese Art kommt demnach in ziemlicher Ausbreitung vor, aber die Unbeständigkeit der Artmerkmale, welche ich in meiner eben erwähnten Arbeit konstatieren mußte, und welche sich auch in den jetzt mir vorliegenden Proben auffällig macht, nötigt, die Disc. canaliculata als Gruppennamen für einige verwandte Arten zusammenzufassen.

Durch Schlämmen frei gemachte und durch den Schliff veranschaulichte gut erhaltene Exemplare konnte ich nur selten finden. Sehr reich und in der Form mannigfaltig ist der Fund an Bruchstücken. Die Verschiedenheit der durch den Bruch der Gehäuse sich bildenden Gestalten der einzelnen Bestandteile erhält bei der Ungleichheit der Lagerung, in welcher diese Bruchteile in der einschließenden Gesteinsmasse eingebettet sind, eine erhöhte Mannigfaltigkeit dadurch, daß die Schliffebene in den einzelnen Präparaten die Schalenfragmente in sehr ungleichen Stellungen durchschneidet und aus den Flächen des Innenraumes und den durchschliffenen Schalenwänden eine Menge von verschieden gestalteten Umrißfiguren und Gerüstbildern erzeugt. Trotz der hieraus sich ergebenden Schwierigkeit, die in den Bruchstücken repräsentierten Arten zu bestimmen, und trotz der in den verschiedenen Fundorten und Schliffpräparaten stattgehabten Auseinanderlegung der Fragmente, bringt doch die Häufigkeit des Vorkommens der Einzelteile eine so oft sich findende Wiederholung derselben in verschiedenen Angliederungen und Lagen, daß bei konsequenter Vergleichung die ideale Zusammenstellung dieser Bruch-

teile eine vollständige Anschauung der vorliegenden Art herzustellen ermöglicht.

Heer gibt in einem der Schliffbilder in der „Urwelt der Schweiz“ aus dem Seewener-Steinbruche eine Figur, welche den Durchschnitt durch zwei Kammern einer Foraminifere darstellt. Der Schliff durch die obere und untere Schalenwand, deren vorderes und hinteres Ende bezeichnet im Einschlußgestein die Grenze des Umfangs der durch eine Mittellinie getrennten Kammern. Solche Schliffbilder Taf. III Fig. 17, 18 finden sich in den hier einer Untersuchung unterstellten Proben von allen Fundorten. Sie stellen aus größeren Gehäusen herausgefallene Kammern dar, deren Einfügung in eine Mittelwindung in Taf. III Fig. 14 deutlich zu ersehen ist, welche Figur den Vertikaldurchschnitt durch ein in der Fläche ausgebreitetes Schalenfragment darstellt. Zwei große Kammern der äußeren Windung bilden die seitlichen, die zwei kleinen Kammern sind der Rest der inneren Windung einer Discorbina aus den grauen Schichten von Unterbuchberg.

In Taf. III Fig. 15 ist ein Schliffbild von Öderberg gegeben, welches in den Durchschnitten durch die Kammerwände die hintere Randansicht von drei aneinandergereihten Kammern darstellt, unterhalb welchem eine Kammer der vorderen Windung sichtbar bleibt. Während diese Figur ein in der Fläche ausgebreitetes Gehäuse darstellt, zeigt Taf. III Fig. 12 einen Schliff vom Grüntner Seewenkalk, in welchem drei Kammern der äußeren Windung nach vorne gekehrt liegen, von der inneren Windung sich zwei kugelige kleine Kammern aufliegend erhalten haben. Die ganze Figur zeigt zarte Schalen mit kristallinischbröckeliger Ausfüllung. In Taf. III Fig. 13 erscheint ein in seiner Masse erhaltenes Schliffexemplar von Öderberg, welches die Schale vollständig verloren hat und nur als Steinkern aus kristallinischer Ausfüllung sich erhalten hat. Die etwas seitliche Lage gibt den vorderen Rand des Gehäuses, läßt die einzelnen Kammern der äußeren und zum Teil auch der inneren Windung überblicken. An der unteren Abgrenzung

der Figur ist von der Randkante noch eine Spur der für die Art charakteristischen Rinnenbildung zu bemerken.

Das in Taf III Fig. 1 abgebildete Gehäuse ist geschlämmt aus den roten Schichten von Unterbuchberg. Dasselbe zeigt die zwei Windungen der oberen Fläche. die wulstigen Kammerbögen und die mit Höckerchen bedeckte Oberfläche. Dasselbe hat einen Durchmesser von 0,40 mm. In Taf. III Fig. 11 zeigt ein gleich rauhes Exemplar von Seehof die untere Schalenfläche als Schliffbild. Hier ist an der äußeren Windung die letzte Kammer durch Beschädigung in einer Weise seitlich verschoben, daß die Kammerwand, welche an die vorhergehende Kammer sich anreiht, gegen den freien Raum des Gehäuses hereingerückt frei liegt.

Ein geschlämmtes Gehäuse von den roten Unterbuchbergschichten ist sehr stark abgerieben und läßt nur glatte Flächen wahrnehmen. Dasselbe bietet in Taf. III Fig. 2 die Randansicht, in Fig. 3 die untere, in Fig. 4 die obere Fläche. Die Kammerwülste sind erhalten, bilden auf der oberen Fläche runde Bögen, vereinigen sich am Rande in einer Kante. Diese Kantenbildung findet auch auf der unteren Schalenfläche statt und beide Kanten lassen die charakteristische Rinne zwischen sich, wie sie in Taf. III Fig. 2 dargestellt ist.

Discorbina Linnaeana d'Orbigny. Rosalina Linnaeiana d'Orbigny. De la Sagra. Hist. Phil. etc. de Cuba 1839. Globigerina Linnaeana d'Orbigny. Brady, Report Challenger. 1884.

Taf. III Fig. 5–7.

Taf. III Fig. 5—7 gibt ein geschlämmtes Exemplar von Seehof, welches nur Ausfüllungsmasse darstellt, an dieser aber doch die für diese Art eigentümliche, in regelmäßigen Abständen verteilte Besetzung mit Porengruben wahrnehmen läßt. Diese fällt besonders durch die in der Rinne des Randes (Taf. III Fig. 7) in Linien gestellten Poren auf. Eine weitere Eigentümlichkeit zeigt sich am Rande darin, daß der zwischen beiden Kanten des Randes fortlaufende Boden der Rinne nicht vertieft, sondern etwas erhöht ist in flacher Wölbung. Es kann

aber diese Wölbung Folge eines von den Seiten ausgeübten Druckes sein, welcher während der Petrifikation der Schale sich geltend gemacht hatte. Für weitere Prüfung fehlte leider ein weiteres Exemplar. Der Aufbau der Windungen, die Gestaltung der Kammern in denselben, die Form des Umrisses, sowie die Angliederung der Kammern aneinander und die trotz der erwähnten Wölbung vorherrschende Rinnenform des Randes stellen diese Art in die Gruppe der zu canaliculata gehörenden Discorbinen.

Discorbina (Rosalina) marginata Reuss. Beiträge zur Charakteristik der Kreideschichten in den Ostalpen besonders im Gosautale und am Wolfgangsee. Denkschrift der kais. Akademie der Wissenschaften, nat. Cl. Band VII. Wien 1854.

Taf. IV Fig. 15, 16.

Diese flache Form reiht sich gleichfalls in der Gruppe der D. canaliculata ein, sie hat fast ebene obere Fläche mit undeutlicher Mittelwindung, hat in der äußeren Windung sechs Kammern, welche auf der Nabelfläche eine unbesimmt begrenzte Zentralvertiefung umkreisen. Die Oberfläche ist rauhhöckerig mit Dornen auf der Fläche und auf dem Rande, der Rand selbst ist wie bei Disc. canaliculata zweikantig, aber so schmal, daß sich die charakteristische Rinne zwischen den Kanten nicht entwickeln konnte, nur schwach angedeutet ist.

Herrn Professor Dr. Rothpletz verdanke ich die Hinweisung auf eine über diese Formen bereits erfolgte Veröffentlichung.

In den Beiträgen zur geologischen Karte der Schweiz, herausgegeben von der geologischen Kommission der Schweizer naturforschenden Gesellschaft, Bern, 1893, Lief. XXXIII — hat Dr. Edm. Quereau in einem Aufsatz über die Klippenregion von Iberg diese Art beschrieben als Pulvinulina tricarinata. Die Abbildungen, welche nach Schliffen hergestellt sind, erläutert der Autor mit nachstehender Artbeschreibung.

Das Gehäuse ist kalkig, feinporös, ohne Kanalsystem, auf der Oberfläche flach konvex, auf der Unterseite läßt der wenig

übergreifende letzte Umgang einen weiten Nabel frei. Die inneren Kammern sind gerundet, die Kammern der späteren Umgänge nehmen mehr und mehr einen eckigen Umriß an, welcher für diese Spezies besonders charakteristisch ist. Die letzten Kammern sind im Querschnitt betrachtet fünfseitig, eine Seite grenzt gegen den vorhergehenden Umgang, vier Seiten sind gegen außen gewendet und schließen zwischen sich drei scharfe Kanten ein. Die genannten Kanten sind ausgestülpt, so daß sie im Schnitt als hohle Ecken erscheinen und als drei schmale parallele Kämme, am Außenrande der Schale herumlaufende Keilkanten, gedacht werden müssen. Bei Jugendexemplaren oder bei nicht quer getroffenen Schnitten erscheinen die Kammern häufig vierseitig, zuweilen dreiseitig. Die Kammerwände erscheinen gerade oder schwach gebogen. Der Durchmesser der späteren Kammern beträgt 0,12 bis 0,18 mm, der Durchmesser des Gehäuses 0,48 bis 0,55 mm.

Die von Quereau gegebenen Abbildungen stimmen mit den Schliffbildern von Taf. V Fig. 1 bis 5 in der Entwicklung der Reihenfolge der kantiggerandeten Kammern der äußeren Windung gut überein, sie lassen die flachgewölbte obere Fläche, die breit geöffnete Nabelfläche, ebenso die kantige Randbildung der Einzelnkammer der Fig. a sehr deutlich wahrnehmen, die in Fig. b als Fragment gezeichneten Kammern einer äußeren Windung finden sich hier abgebildet in Taf. III Fig. 17, und sind identisch mit den von Heer in der Urwelt der Schweiz gegebenen Zweikammerfigur des Schliffbildes vom Seewenerkalk.

Auf Grund dieser Übereinstimmungen ist die Artbestimmung der hier vorliegenden Bruchstücke als die von Reuß im Jahre 1853 gegebene Discorbina (Rosalina) canaliculata beizubehalten.

Sehr häufig bieten die Schliffpräparate Bruchstücke, welche wie Taf. V Fig. 7 ersehen läßt, nur Gerüstfragmente sind. Es haben sich die Wände der Kammern ganz verloren. Die im Schliffbilde erkennbaren Randleisten zeigen an ihren Enden die knotige Aneinandergliederung der Wände, der Länge nach gestreckte Balken, welche durch rechtwinklig verbundene Quer-

leisten die Kanten und Ecken darstellen, mit welchen die Kammern einst nach außen sich abgrenzten.

Discorbina biconcava Parker, Jones. Carpenter. Introduction to the study of the Foraminifera.

Taf. V Fig. 4, 6.

Während die bis jetzt geschilderten der Discorb. canaliculata nahestehenden Bruchstücke, welche in den vorliegenden Proben gefunden wurden, die kantigeckige Randgestaltung der Gehäuse, wie sie die Figuren 2—7, 17, 18 der Tafel III ersehen lassen, als einfache Aneinanderlegung der Seiten und Randflächen in rechtem Winkel vollziehen, finden sich zahlreich, namentlich an den größeren Schalen. Kantenbildungen mit vorspringenden Knoten, wie sie die in Taf. III Fig. 14, Taf. V Fig. 1, 2, 3 gegebenen vertikalen Schliffe durch die nach der Fläche ausgebreiteten Gehäuse darstellen. Diese Gehäuse zeigen die Kammern flach ausgedehnt in zwei Windungen liegend, deren mittlere Taf. V Fig. 3, 4, 6 aus rundlichen, deren äußere aus quadratischen bis trapezoiden Kammern bestehen. Taf. V Fig. 1 stellt die ganze Reihe der aneinanderliegenden Kammern aufgeschlossen dar. Die Endkammern sind grösser, ragen mit ihren knotigen unteren Enden tiefer herab, während die mittleren Kammern sich mit ihrem unteren Rande in der sich vertiefenden Nabelfläche verlieren. In Taf. V Fig. 4 zeigt die eine Endkammer statt der trapezoidalen Form eine bauchige Wölbung nach unten, die Nabelvertiefung bleibt offen.

Sehr deutlich offen seigt sich die Nabelgrube in Taf. III Fig. 14, welche nur zwei Kammerreste der Mittelwindung erhalten hat. Während hier die Umrisse der Mittelwindung quadratisch gestaltet sind, bietet sie Taf. V Fig. 3 gerundet. Die Vertiefung der Nabelgegend wird mehrfach durch Schliffbilder deutlich dargetan, welche wie Taf. III Fig. 16 nur den Durchschnitt von zwei äußeren, trapezoidalen Kammern gibt. Es finden sich solche Durchschnittsbilder auch versehen mit kugeligen Andeutungen von Kammern der Mittelwindung zwischen den zwei großen Kammern, und häufig zeigen die

einzelnen Randleisten eine faserkalkige Granulierung. (Taf. III Fig. 16.) Es ist mir nicht gelungen, eine ganz erhaltene Schale mit nach oben gerichteter Fläche in einem Schliffe nachzuweisen. In Taf. V Fig. 6 ist ein Bruchstück gegeben, welches eine runde Mittelkammer und zwei trapezoide Kammern der äußeren Windung in dem flachliegenden Gehäuse von oben gesehen darstellt.

Die knotigen Vorsprünge an den Kanten und die weite Vertiefung der Nabelfläche verleihen diesen Gebilden große Ähnlichkeit mit der von Carpenter in Introduction to the study of the Foraminifera gegebenen Abbildung.

Discorbina (Rosalina) obtusa d'Orbigny. Die Foraminiferen des Wiener Tertiärbeckens. 1846.

Taf. III Fig. 8, 9, 10.

Das scheibenrunde, geschlämmte Gehäuse aus den roten Schichten von Unterbuchberg hat 0,35 mm Durchmesser, ist auf beiden Flächen etwas eingesunken, hat einen breiten, stumpfkantigen Rand, welcher am Schalenende schief eingedrückt ist. Auf beiden Flächen ist nur eine Kammerwindung, die Kammern sind bauchig, haben sehr schwache Nähte. Die Oberfläche der Schale ist sehr dicht besetzt mit Poren. Die Kammern werden durch zarte Linien abgegrenzt.

Discorbina (Rosalina) rudis Reuss. Die Foraminiferen des norddeutschen Hils und Gault. 1863.

Taf. II Fig. 22. Taf. III Fig. 22.

Schliffbilder von Gehäusen, welche nach der Fläche ausgebreitet liegen, zeigen die vordere Randansicht. Auf einem Ende schließt die Windung mit der letzten Kammer, diese gegen die Nabelfläche stark hereinsenkend, an dem anderen Ende bildet die vierte Kammer den Windungsabschluß, nachdem drei kleinere Kammern in der Horizontale vorausgegangen sind. (Taf. III Fig. 22.) Aus der Stellung dieser Kammern entnimmt man, daß die obere Schalenfläche eben abschließt, zur Umfassung der hier nicht sichtbaren Zentralwindung vor der

letzten Kammer den Umgang schließend, während die Nabelfläche eingesunken der unteren Begrenzung des Schalenbildes folgt. In Taf. II Fig. 22 zeigt sich zwischen den zwei größeren Kammern der äußeren Windung die rudimentäre Mittelwindung mit drei kleinen Kammern. Auch dieses Exemplar liegt horizontal ausgebreitet. In beiden von Öderberg und Seehof stammenden Gehäusen ist nur die kristallinische Ausfüllung der Hohlräume der Kammern erhalten. Der Flächendurchmesser der Gehäuse hat 0,26 bis 0,28 mm.

Discorbina (Rosalina) Bosqueti Reuss. Die Foraminiferen des Kreidetuffs von Maestricht. 1862.

Taf. II Fig. 18. Taf. IV Fig. 17, 18.

In einem Schliffpräparate aus den roten Schichten von Unterbuchberg finden sich zwei Bruchstücke, welche in geringer Entfernung von einander liegen und deren Bestandteile sich ideal ergänzen, indem das eine Exemplar mit der unteren Schalenfläche (Taf. II Fig. 18) die großen Kammern der äußeren Windung, das andere mit der oberen Schalenfläche die Kammern (Taf. IV Fig. 18) der inneren Windung darstellt. Das aus beiden Bruchstücken gebildete ganze Gehäuse würde einen Durchmesser von 1,00 mm erreichen. Der Umriß des als vollständig erhalten gedachten Gehäuses entspricht der Reußschen Abbildung, die Einrollung der inneren Windung vollzieht sich auf der oberen Schalenfläche, nur wenige kleine Kammern legen sich um die embryonale Zentralkammer an. Die Kammern der äußeren Windung sind groß, treten am Rande gewölbt hervor. Die Reußsche Schilderung der Art nennt die Oberfläche mit Poren bedeckt, an den vorliegenden Schliffen ist von der Oberfläche nichts erhalten, der Schliff gibt nur den Durchschnitt der Schalen, die Hohlräume sind bröckelig ausgefüllt.

In Taf. IV Fig. 17 ist ein kleineres Gehäuse als Schliffbild gegeben, welches die Windungen mit den einzelnen Kammern vollständig überschauen läßt, die Hohlräume mit kristallinischen Brocken ausgefüllt zeigt. Von der Schalenoberfläche ist nur der durchschnittene Rand erhalten.

Discorbina Schloenbachi Reuss. Die Foraminiferen des norddeutschen Hils und Gault. 1863.

Taf. IV Fig. 1, 2, 3.

Das geschlämmte Gehäuse von Seehof hat 0,22 mm Durchmesser, ist wenig gewölbt. Fünf bauchige Kammern, welche gleichmäßig der Reihe nach in ihrer Größe zunehmen, durch tiefe Einsenkungen getrennt werden, bilden die einzige entwickelte Windung. Auf dieser liegen auf der oberen Schalenfläche nur Rudimente einer Mittelwindung auf. Die untere Fläche ist flach eingesunken und zeigt im Zentrum eine eckige Nabelgrube, wie sie Heer von der als Nonionina Escheri bezeichneten Foraminifere abbildet. Der Rand der gewölbt vorspringenden letzten Kammern ist oval geformt. Die Oberfläche der Schale ist undeutlich verwischt.

Discorbina pertusa Marßon. Die Foraminiferen der weißen Schreibkreide der Insel Rügen. Mitt. Naturw. Ver. Neuvorpommern u.s.w. 1877.

Taf. IV Fig. 13, 14.

In einem Schliffe vom Grüntener Seewenkalk fand sich eine guterhaltene scheibenrunde, flache Foraminifere, welche zwei Windungen aufrollt mit sehr langsam in Größe zunehmenden Kammern. Die Kammern werden nicht hoch, haben scheibenrunden Umfang, sind flach und lassen nur teilweise die Schalensubstanz am Rande noch als zarte Linien erkennen, die Ausfüllung des Schalenhohlraumes ist kristallinisch bröcklige Substanz. Die letzte Windung hat neun Kammern. Die Mittelwindung umkreist auf beiden Flächen eine embryonale Zentralscheibe. Der Durchmesser des Gehäuses hat 0,23 mm.

Discorbina gracilis Marßon. Die Foraminiferen der Schreibkreide von Rügen. 1877.

Taf. IV Fig. 19, 20, 21.

Das scheibenrunde Gehäuse von 0,15 mm Durchmesser ist linsenförmig, läßt als stark abgeriebenes geschlämmt in einer Probe von Oderberg gefundenes Exemplar die obere Fläche

schwach gewölbt, ohne Kammerabtrennung (Fig. 21) erscheinen, während die Nabelfläche (Fig. 19) die äußere und innere Windung erkennen läßt. Die Kammern sind zahlreich, nicht hoch und werden durch ziemlich gerade Nähte getrennt.

? Rotalina Schloenbachi Reuss. Die Foraminiferen des norddeutschen Hils und Gault. 1863.

Taf. II Fig. 31.

Ein Schliffbild aus dem Seewenkalk von Seehof liegt in der umhüllenden Steinsmasse etwas seitlich verschoben und erscheint dadurch verlängert. Die Mittelwindung ist klein und geht bald in die Randwindung über. Diese besteht aus neun Kammern, welche nach vorne gebogen sind und tief einschneidende Nähte haben. Die Kammern sind nicht hoch und bleibt deshalb die Bestimmung des Exemplares als Rotalina Schloenbachi unsicher. Die Oberfläche scheint glatt zu sein. Die Länge des Gehäuses beträgt 0,18 mm. Eine Mündung konnte nicht beobachtet werden.

Rotalina caracolla Römer. Reuss. Die Foraminiferen des norddeutschen Hils und Gault. Wien 1863.

Taf. IV Fig. 25, 26. 27.

Eine von Dr. Imkeller gegebene Probe aus der grauen Schicht vom Gschwendtnergraben bei Schliersee enthält ein geschlämmtes Gehäuse, das stark angegriffen, 0,40 mm Flächendurchmesser hat, auf beiden Seiten mehrere Windungen zeigt mit stumpf gekieltem Rand, unten höher gewölbt ist als oben. Die Windungen der oberen Fläche lassen die Kammerabteilung deutlicher wahrnehmen, auf der unteren, höheren Fläche verdeckt sie eine zentrale Scheibe. Die Mündung ist nicht sichtbar.

Rotalina? reticulata Reuss. Die Foraminiferen des norddeutschen Hils und Gault. 1863.

Taf. IV Fig. 4, 5, 6.

Das scheibenrunde, auf beiden Seiten gewölbte Gehäuse hat 0,33 mm Flächendurchmesser, hat am Rande eine stumpfe

Schneide, trägt auf der Oberfläche dicht stehende, ziemlich verwischte Poren. Die Kammern der Windungen sind wie diese nur schwach abgegrenzt. Die obere Fläche zeigt die letzte Windung etwas stärker abgetrennt, hat etwa acht Kammern. Diese erheben sich als schwache Buckel am Rande. zeigen sehr flache Einsenkungen. Die Mittelwindung setzt die trennende Kreislinie gegen das Zentrum fort. Dieses läßt nur wenig merklich größere Knötchen wahrnehmen. Die untere Fläche bietet in der letzten Windung dieselben Kammerbuckel, von der Trennungsnaht wird nur eine undeutliche Linie bemerkbar, der mittlere Teil scheidet keine Windungen ab, bildet eine zusammengeflossene flache Wölbung. Eine Mündung ist nicht sichtbar. Die von Reuß abgebildeten Nahtleisten auf einer Fläche konnten an vorliegendem Exemplare, welches sich geschlämmt in den roten Schichten von Unterbuchberg gefunden hat. nicht wahrgenommen werden.

Anomalina complanata Reuss. Die Foraminiferen und Entomostraceen des Kreidemergels von Lemberg. 1850.

Taf. II Fig. 26, 32, 33. Taf. IV Fig. 22, 23, 24.

Die aus dem Seewenkalk von Öderberg und Seewen geschlämmten Gehäuse sind bei 0,20 mm Flächendurchmesser scheibenrund, auf beiden Flächen wenig gewölbt, am Rande stumpf gekielt. Die einzige vollständig sichtbare Windung hat zehn Kammern. Deren Nähte sind seicht, gebogen, die letzten Kammern etwas mehr entwickelt. Auf beiden Flächen senkt sich die Mitte etwas, bildet oben eine flache Scheibe, vertieft sich unten zu einem Nabel. Die Oberfläche des Gehäuses ist auf beiden Flächen dicht besetzt mit Porenknötchen. Die Mündung sitzt als Schlitz am Ende der letzten Kammer.

Die Schliffbilder (Taf. II Fig. 32 und 33) geben die obere und untere Fläche eines Gehäuses, dessen Windungs- und Kammersäume sehr bestimmt ausgeprägt sind. Die in Taf. II Fig. 26 gegebene Schliffabbildung zeigt das Gehäuse in seitlicher Stellung bei nach vorne gerichteter Septalfläche. Der Kielrand ist etwas schärfer als gewöhnlich.

Anomalina sp. ?

Taf. II Fig. 19.

Ein Schliffbild vom Seewenkalk in Seehof gibt ein in der Fläche senkrecht durchschnittenes Gehäuse von 0,24 mm Länge, welches den Körper der Schale als ein verlängertes Oval darstellt, dessen Kammerräume zum Teil aufgeschnitten sind, während die letzte Kammer etwas mehr gerundet mit schwacher Neigung nach unten seitlich angelagert erscheint. Diese letzte Kammer ist mit kristallinischer Masse körnelig ausgefüllt.

Anomalina (Rosalina) ammonoides Reuss. Die Versteinerungen der böhmischen Kreideformation. 1845—46.

Taf. IV Fig. 7, 8, 9.

Die Gehäuse finden sich geschlämmt und in Schliffpräparaten, erreichen ungefähr 0,20 mm im Flächendurchmesser, sind flach, lassen auf beiden Flächen die innere Windung mehr oder minder deutlich überblicken, wie dies bei Anom. intermedia Berthelin der Fall ist. Die Kammern sind zahlreich, haben bogenförmige Nähte. Die Oberfläche der geschlämmten Gehäuse ist mattrauh, ziemlich abgerieben.

Anomalina (Rosalina) Lorneiana d'Orbigny. Mém. sur les foraminifères de la craie blanche du bassin de Paris 1840.

Taf. IV Fig. 10, 11, 12.

Das scheibenrunde Gehäuse hat 0,20 mm Flächendurchmesser, ist auf beiden Flächen eingesunken, hat in der letzten, einzigen entwickelten Windung sieben bauchige Kammern, deren Nähte stark einschneiden und am Rande die Kammern gewölbt vortreten lassen. Die Mittelwindung ist oben nur schwach angedeutet, auf der Nabelfläche sinkt die Mitte tief ein. Die letzte Kammer der äußeren Windung greift gegen die Nabelfläche bauchig über. Die geschlämmt gefundenen Gehäuse von den roten Schichten von Unterbuchberg sind etwas angegriffen auf der Oberfläche.

Aus dem bisher Geschilderten läßt sich entnehmen, daß die Seewener Kreideschichten in der grauen und in der roten

Gesteinsmasse die kugelförmige wie die weckenförmige Orbulinaria nicht nur als Art schichtenkennzeichnend einschließen, sondern daß noch insbesondere hier die Massenhaftigkeit des Auftretens mit den eigentümlichen Figurationen, in welchen sie in den Schliffbildern erscheint, als ein besonderes Merkmal der Schichten sich geltend macht. Die ungewöhnliche Übereinstimmung der Seewenerschichten mit der Schreibkreide von Rügen in Beziehung auf diesen Reichtum an der gleichen Foraminiferenart verkündet zugleich, wie die Seewenerbänke mit denen der Rügener Schreibkreide in gleichen geologischen Horizont zu stellen sind. Von den von Marßon angegebenen Rügenerforaminiferen finden sich die Arten: Lagena apiculata Reuß, Cristellaria rotulata Lmk. Textularia conulus Reuß, Bolivina linearis Ehrenberg, Globigerina cretacea d'Orbigny, Discorbina obtusa d'Orbigny, Discorbina gracilis Marßon, D. pertusa Marßon, D. Bosqueti Reuß, ? Acervulina cretae Marßon, von den von Reuß von der Rügener Kreide aufgeführten Arten: Valvulina gibbosa d'Orbigny, Anomalina complanata Reuß, Anom. ammonoides Reuß, Bolivina incrassata Reuß auch in den Tegernsse-, Grünten-, Seewen-Schichten.

Die dichte Lagerung der Orbulinarien und die verhältnismäßig gute Erhaltung des Umrisses derselben bei so zarter Schale lassen annehmen, daß diese Gehäuse in ruhiger See sich allmählich am Boden sammelten und dort eingebettet wurden. Die größeren Gehäuse mit kräftiger Schale und die vielen Bruchstücke von solchen, welche sich mit den Orbulinarien jetzt finden, sind zweifellos, von älterer Ablagerung an anderer Stelle stammend, von letzterer durch eine bewegte Flut aufgehoben und aus dieser in dem sich bildenden Bodensatz der Seewensammelwasser versenkt worden.

Auffallend ist, daß die Gehäuse der Orbulinarien auf ihrer Oberfläche sehr häufig Risse und Spaltbildungen wahrnehmen lassen, als wären die mit einer Flüssigkeit gefüllt gewesenen Schalen bei der Petrifikation geborsten und hätten durch die bei diesem Vorgange entstandenen Risse die vorher eingeschlossene Flüssigkeit, den Schaleninhalt, austreten lassen. Die

von Dr. Wolfram Fink in der Abhandlung: „Der Flysch im Tegernsee-Gebiet mit spezieller Berücksichtigung des Erdölvorkommens“ angeführten Anschauungen über den Anteil der Foraminiferen an der Entstehung des Quirinusöles erhalten durch diese Spuren einer Berstung einer so großen Menge mit Flüssigkeit gefüllt gewesener Schalen eine beachtenswerte Unterstützung.

Verzeichnis der Abbildungen.

In nachstehendem Verzeichnis der Abbildungen sind als Fundorte

die Schreibkreide von Rügen mit R
der Seewenkalk von Seewen mit S
„ „ „ Seehof mit Sh
„ Seewenmergel von Forpaß F
„ „ „ Nesselwang N
die grauen Schichten von Unterbuchberg Ugr
„ roten „ „ „ Ur
„ grauen „ „ Öderberg O
„ „ „ „ Kramsberggraben K
„ „ „ „ Gschwendtnergraben G
der Seewenkalk vom Grünten Gt

bezeichnet und ist den Artnamen von geschlämmten Proben ein * beigesetzt, während die übrigen Artnamen nach Schliffpräparaten gegeben sind. Die Abbildungen sind, wenn nicht im Texte besondere Angaben gemacht werden, nach siebzigmaliger Vergrößerung von mir gezeichnet worden. Die Wiedergabe in Lichtdruck hat die Obernettersche Kunstanstalt in München ausgeführt.

Tafel I.

Fig. 1. Nodosaria legumen Reuß Gt.
„ 2. „ Jonesi Reuß Ur.
„ 3. „ Adolphina d'Orbigny Ur.
„ 4. Glandulina cylindracea Reuß Ug.
„ 5. Lagena laevis Mont. O.
„ 6. „ „ „ Ur.
„ 7. „ apiculata emaciata Reuß K, vom Rande.
„ 8. „ „ „ „ K, von der Seite.
„ 9. „ apiculata Reuß O.

Fig. 10. ? Flabellina simplex Reuß Gt.
„ 11. Glandulina? Ur.
„ 12. Cristellaria macrodisca Reuß S.
„ 13. „ rotulata Leck Ug.
„ 14. Valvulina gibbosa d'Orbigny * Ur.
„ 15. Bulimina pupoides d'Orbigny Gt.
„ 16. Bigenerina sp. ? U.
„ 17. „ sp. U.
„ 18. Bolivina incrassata Reuß * Ur.
„ 19. Bigenerina sp. ? O.
„ 20. Bolivina tegulata Reuß * O.
„ 21. Textularia aciculata d'Orbigny.
„ 22. „ aculeata Ehrenberg Gt.
„ 23. „ aciculata d'Orbigny * Ur.
„ 24. „ „ d'Orbigny Ur.
„ 25. Oligostegina laevigata Kaufmann O.
„ 26. Textularia pupa Reuß Ur.
„ 27. Bolivina linearis Marßon * Sh.
„ 28. Oligostegina Ug.

Tafel II.

Fig. 1. Textularia conulus Reuß Gt.
„ 2. „ „ „ Gt.
„ 3. Oligostegina laevigata Kaufm. O.
„ 4. Textularia? Randansicht Ur.
„ 5. Oligostegina laevigata Kaufm. O.
„ 6. „ „ „ O.
„ 7. „ „ „ Ur.
„ 8. ? Oligostegina. Bruchstück O.
„ 9. ? „ „ O.
„ 10. Oligostegina laevigata Kaufm. Ur.
„ 11. „ „ „ O.
„ 12. „ „ „ O.
„ 13. „ „ „ Gt.
„ 14. Textularia globulosa Ehrenberg Ur.
„ 15. „ „ „ Ur.
„ 16. „ globifera Reuß * Sh.
„ 17. „ conulus Reuß. Vom Rande seitlich gesehen. Ur.
„ 18. Discorbina Bosqueti Reuß Ur. Untere Fläche.
„ 19. Anomalina Sh.
„ 20. Textularia pygmaea Reuß Ur.
„ 21. „ „ „ * O.
„ 22. Discorbina rudis Reuß Sh.

Fig. 23. 24. 25. Orbulinaria fallax Rhumbler.
„ 26. Anomalina complanata Reuß * O.
„ 27. Bigenerina sp.? F.
„ 28. 29. 30. Hyperammina? Ur.
„ 31. Rotalina Schloenbachi Reuß Sh.
„ 32. Anomalina complanata Reuß Gt. Obere Fläche.
„ 33. „ „ „ Gt. Untere „

Tafel III.

Fig. 1. Discorbina canaliculata Reuß * Ur. Obere Fläche.
„ 2. „ „ „ * Ur. Randansicht.
„ 3. „ „ „ * Ur. Untere Fläche.
„ 4. „ „ „ * Ur. Obere Fläche.
„ 5. Discorbina Linneana d'Orbigny * Sh. Obere Fläche.
„ 6. „ „ „ * Sh. Untere Fläche.
„ 7. „ „ „ * Sh. Randansicht.
„ 8. Discorbina obtusa d'Orbigny * Ur. Untere Fläche.
„ 9. „ „ „ * Ur. Randansicht von vorne.
„ 10. „ „ „ * Ur. Obere Fläche.
„ 11. Discorbina canaliculata Reuß. Untere Fläche, beschädigt. Sh.
„ 12. „ „ „ Vertikalschnitt durch die Fläche. Gt.
„ 13. „ „ „ Steinkern. O.
„ 14. „ „ „ Vertikalschnitt durch die Fläche des Gehäuses. Ugr.
„ 15. „ „ „ Vertikalschnitt durch die Fläche des Gehäuses. O.
„ 16. „ „ „ Vertikalschnitt durch zwei Kammern. Sh.
„ 17. 18. „ „ „ Durchschnitt durch einzelne Kammern. Ur.
„ 19. Globigerina aequilateralis Brady O.
„ 20. „ cretacea d'Orbigny Ur.
„ 21. „ „ „ Ur.
„ 22. Discorbina rudis Reuß O.
„ 23. Globigerina aequilateralis Brady Sh.
„ 24. „ „ „ * O. Obere Fläche.
„ 25. „ „ „ * O. Untere Fläche.
„ 26. „ „ „ * O. Randansicht von vorne.
„ 27. „ „ „ Ur. Randansicht vom Rücken.
„ 28. „ „ „ Ug. Randansicht von vorne.

Tafel IV.

Fig. 1. Discorbina Schloenbachi Reuß Sh. Untere Fläche.
„ 2. „ „ „ * Sh. Obere Fläche.
„ 3. „ „ „ * Sh. Randansicht von vorne.
„ 4. Rotalina reticulata Reuß * Ur. Untere Fläche.
„ 5. „ „ „ * Ur. Obere Fläche.
„ 6. „ „ „ * Ur. Randansicht von vorne.
„ 7. Anomalina ammonoides Reuß * Sh.
„ 8. „ „ „ * Sh.
„ 9. „ „ „ * Sh.
„ 10. Anomalina Lorneiana d'Orbigny * Ur. Vorderrand.
„ 11. „ „ „ * Ur. Untere Fläche.
„ 12. „ „ „ * Ur. Obere Fläche.
„ 13. Discorbina pertusa Marßon Gt. Obere Fläche.
„ 14. „ „ „ Gt. Untere Fläche.
„ 15. Discorbina marginata Reuß Ur.
„ 16. „ „ „ Ur.
„ 17. „ Bosqueti „ O. Obere Fläche.
„ 18. „ „ „ Ur. Obere Fläche.
„ 19. Discorbina gracilis Marßon * O. Untere Fläche.
„ 20. „ „ „ * O. Randansicht.
„ 21. „ „ „ * O. Randansicht von vorne.
„ 22. Anomalina complanata Reuß * S. Untere Fläche.
„ 23. „ „ „ * S. Obere Fläche.
„ 24. „ „ „ * S. Randansicht.
„ 25. Rotalina caracolla Römer * G. Obere Fläche.
„ 26. „ „ „ * G. Untere Fläche.
„ 27. „ „ „ G. Randansicht von vorne.

Tafel V.

Fig. 1. Discorbina canaliculata Reuß. Vertikalschnitt durch die Fläche. G.
„ 2. „ „ „ „ „ „ „ G.
„ 3. „ ? biconcava Parker Jones. Vertikalschnitt durch die Fläche. G.
„ 4. „ biconcava Parker Jones. Vertikalschnitt durch die Fläche. Ug.
„ 5. „ canaliculata Reuß. Vertikalschnitt durch die Fläche. Ug.
„ 6. „ biconcava Parker Jones. Ur.
„ 7. Discorbina canaliculata Gerüste. Ur.
„ 8. Orbulinaria sphaerica Kaufm. Ug.
„ 9. Globigerina bulloides d'Orbigny. Bruchstück. Ug.
„ 10. Globigerina? Mit strahliggekörneltem Rande. Ug.
„ 11. Oligostegina laevigata Kaufmann. O.

Fig. 12. Globigerina bulloides d'Orbigny.
„ 13. Orbulinaria sphaerica Kaufm. O.
„ 14. „ „ „ beschädigt. O.
„ 15. „ ovalis Kaufm. O.
„ 16. „ „ „ O.
„ 17. „ „ „ O.
„ 18. „ sphaerica Kaufm. O.
„ 19. „ „ „ O.
„ 20. „ „ „ O. Vom Rande.
„ 21. „ „ „ O. Von der Fläche.
„ 22. „ „ „ R. Mit seitlichem Innenkern.
„ 23. „ „ „ O.
„ 24. „ „ „ Gt.
„ 25. Oligostegina?
„ 26. Orbulinaria ovalis?
„ 27. Globigerina. O.
„ 28. Orbulinaria ovalis Kaufm. O.
„ 29. „ „ „ O.
„ 30. „ „ „ O.
„ 31. „ sphaerica Kaufm. R.
„ 32. „ „ „ R.
„ 33. „ „ „ R.
„ 34. „ „ „ O.
„ 35. „ „ „ O.
„ 36. „ „ „ O.
„ 37. „ „ „ R.
„ 38. „ „ „ R.
„ 39. „ „ „ O.
„ 40. „ „ „ R beschädigt.
„ 41. „ „ „ R.
„ 42. Acervulina cretae Marßon Ug.
„ 43. Orbulinaria? O.
„ 44. Oligostegina? S.

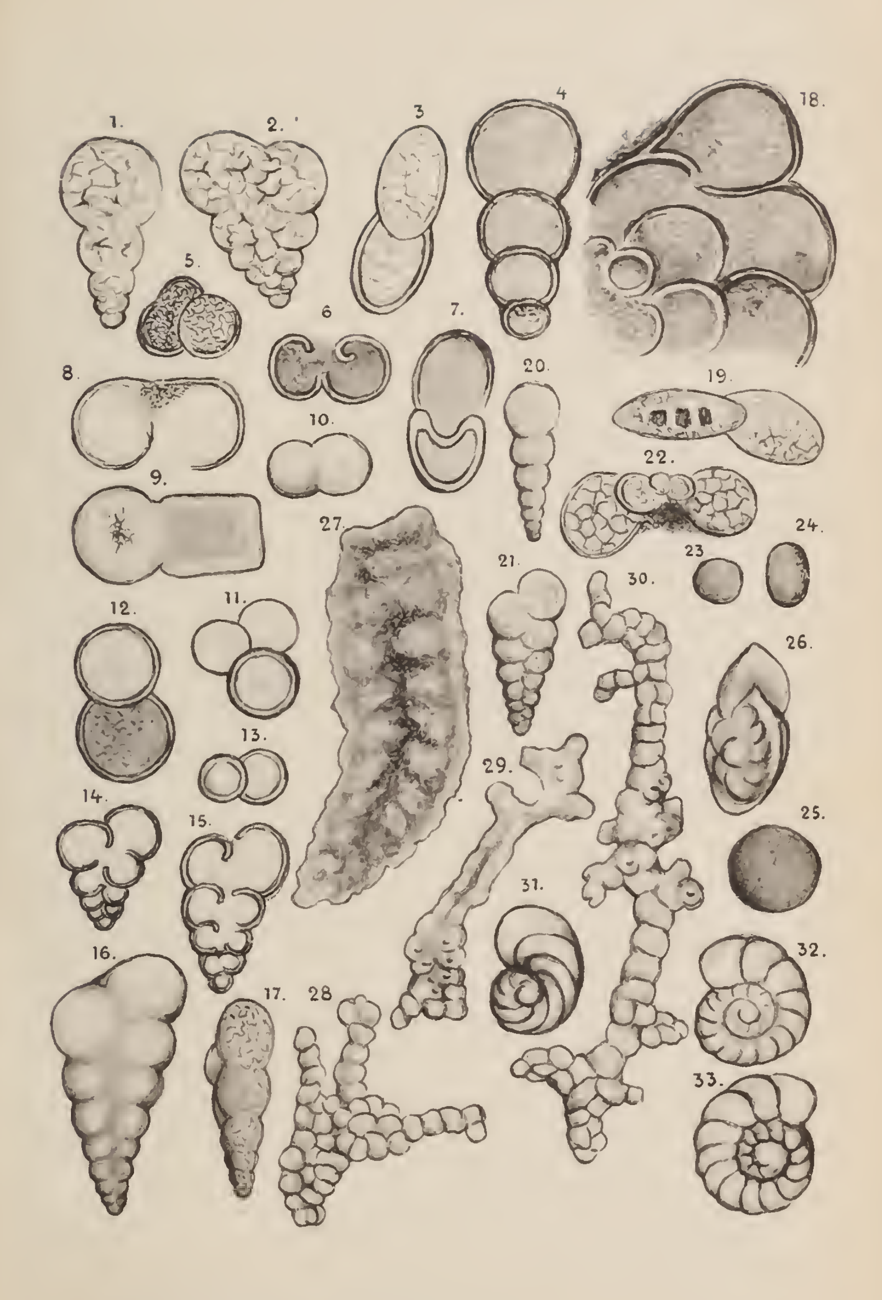
Tafel VI.

Fig. 1. Büschelförmig gelagerte Orbulinaria. Ur.
„ 2. Zerstreut gelagerte Scheiben, Ringe, Wecken von Orbulinaria. Gt.
„ 3. Dichtgelagerte Orbulinarien. Sh.
„ 4. Algennetz mit Orbulinarien. Ur.
„ 5. Scheiben, Ringe, Wecken, Ketten, Oval, Randstrahlen an zerstreut gelagerten Orbulinarien. O.
„ 6. Büschel, Wecken, Ring, Scheiben von Orbulinaria, Globigerina. Sh.
„ 7. Ringförmige Lagerung. O.

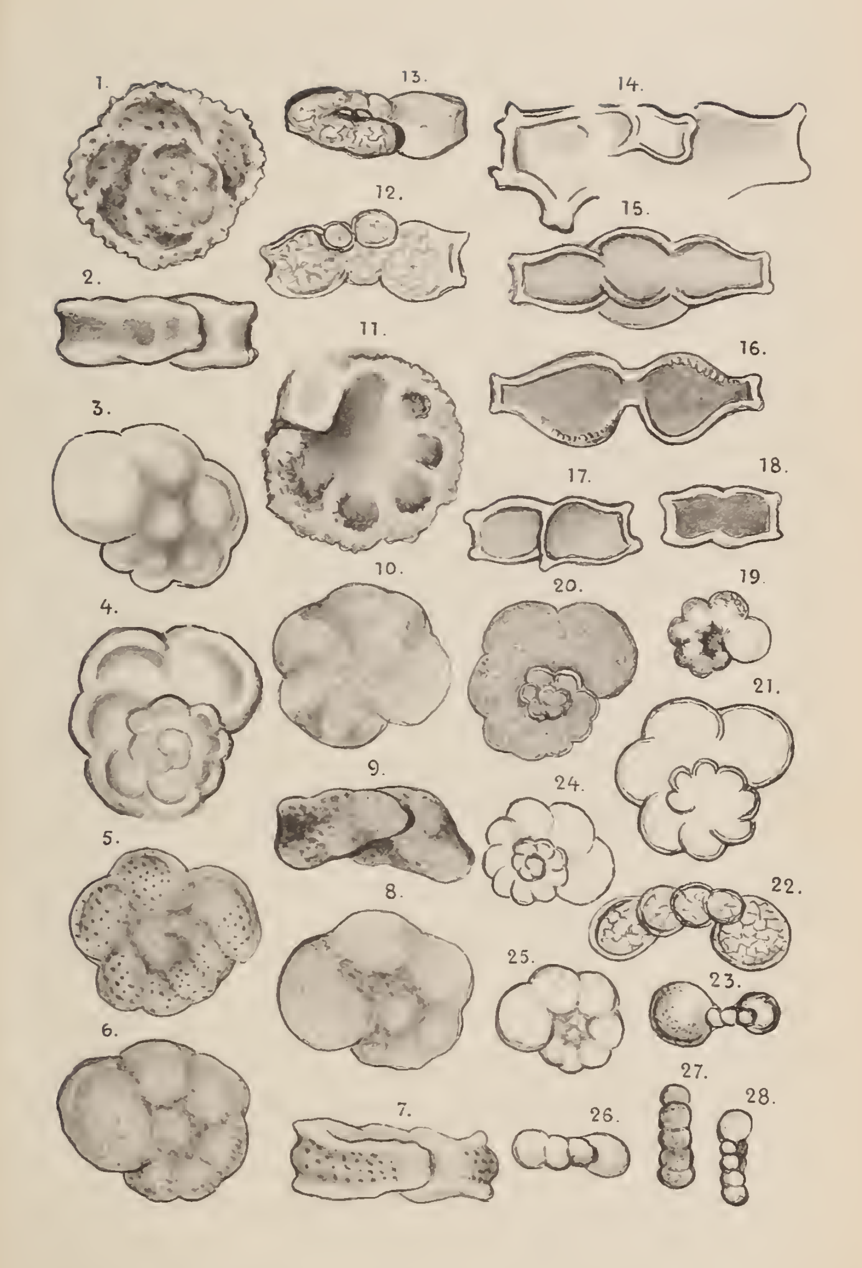
Verzeichnis der Arten.


1.
2.
3.
4.
5.
6.
8.
12
10.
9.
7.
11.
14.
16.
13.
18.
19.
15.
17.
20
21.
27.
26.
24.
23.
22.
25
28



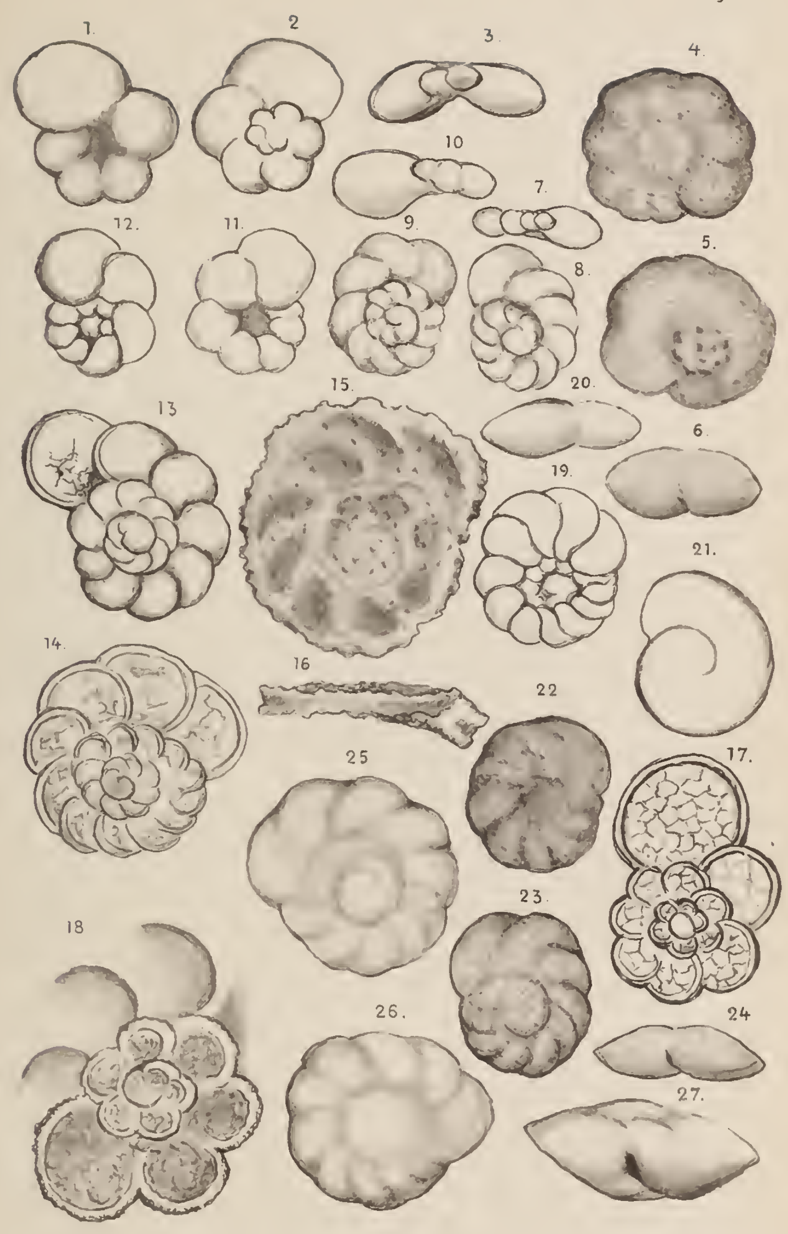

1.
2.
3
4
18.
5.
6
7.
8.
20.
19.
10.
22.
9.
27.
24.
21.
23
30.
12.
11.
26.
13.
29.
14.
15.
25.
31.
16.
32.
17.
28
33.




1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.



Taf. IV

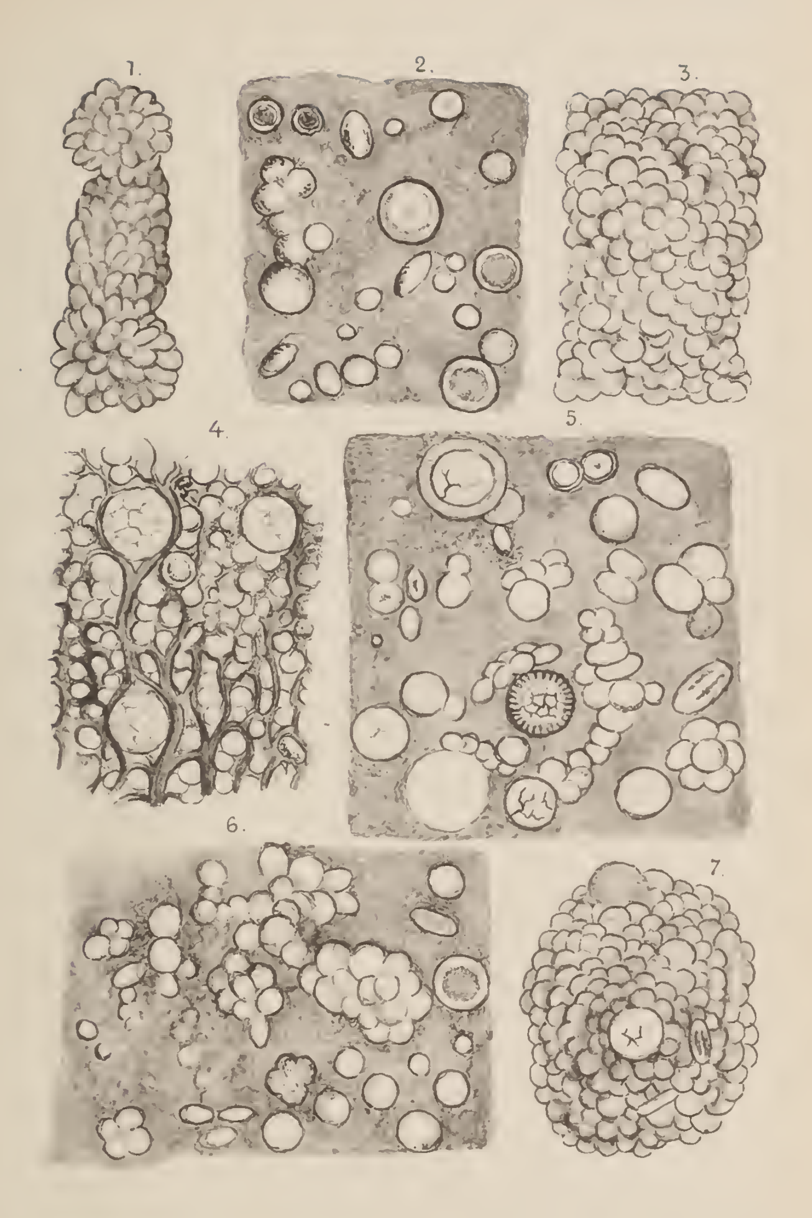





1.
2.
3.
4.
5.
6
7.
8.
9.
10.
11.
14
12.
13
15.
16.
17.
18
19.
25.
23.
24
22
20
21.
26
27.
35.
36.
38.
37.
34
28.
39.
40.
44.
41
33
42.
29
43
30.
31.
32.



Taf. VI





Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 12. Abhandlung

Über positive Strahlen

von

W. Wien

Vorgelegt am 3. Juli 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



I. Beobachtung an positiven Strahlen des Wasserstoffs.

In meiner Mitteilung vom 7. März 1908[1]) hatte ich über Versuche berichtet, aus denen hervorging, daß die positiven Strahlen nicht dauernd geladen sind sondern ihre Ladungen nach längerer oder kürzerer Zeit verlieren und wieder annehmen, so daß man von einem Gleichgewichtszustande sprechen kann, bei welchem die eine Zeit lang geladenen Jonen einen bestimmten Bruchteil der Gesamtmenge der bewegten Atome ausmachen. Ich hatte damals schon darauf hingewiesen, daß dieser Zustand möglicherweise im sehr hohen Vakuum ein anderer sei, da doch kaum zu bezweifeln ist, daß die Herstellung des Gleichgewichtszustandes und damit die beständige Veränderung des Ladungszustandes der einzelnen Atome durch die Zusammenstöße mit den ruhenden Gasmolekülen hervorgerufen wird.

Die Versuche, die ich zunächst in der Richtung anstellte[2]) um den Einfluß der Gasverdünnung zu untersuchen, gründeten sich auf die Eigenschaft der Holzkohle, Gase bei der Temperatur der flüssigen Luft sehr schnell und vollständig zu absorbieren. Indem der eigentliche Beobachtungsraum mit der Entladungsröhre durch eine Kapillare verbunden war, konnte im ersteren durch die absorbierende Holzkohle ein hohes Vakuum aufrecht erhalten werden, während in der Entladungsröhre beständig etwas Luft einströmte, um den zur Entladung erforderlichen Druck herzustellen. Hier zeigte sich nun, daß die charakteristische Eigenschaft der positiven Strahlen, nämlich die Wiederbildung positiver Jonen, bestehen blieb, während indessen im

[1]) W. Wien, Ber. der K. Bayer. Akad. d. W., Bd. 38, S. 55, 1908.
[2]) W. Wien, Ann. d. Phys. 27, S. 1033, 1908.

hohen Vakuum die magnetische Einwirkung auf die Strahlen sich sehr verringerte.

Obwohl nun die Methode der Anwendung der flüssigen Luft ein sehr hohes Vakuum ergibt, hat sie für den vorliegenden Zweck den wesentlichen Nachteil, daß von der gekühlten Holzkohle von den praktisch vorkommenden Gasen sämtlich außer Wasserstoff absorbiert werden, der letztere also gerade übrig bleibt. Andererseits wirkt die flüssige Luft als scharfes Trockenmittel und es ist nicht ausgeschlossen, daß die Beseitigung der Wasserdampfreste auch die aus ihnen durch die Entladung gebildeten Wasserstoffmengen fortnimmt.

Es besteht daher keine Sicherheit, daß unter diesen Verhältnissen der Wasserstoffrest mit und ohne Anwendung der flüssigen Luft derselbe bleibt und es schien deshalb durchaus erwünscht die magnetische Ablenkbarkeit der unter gleichen Bedingungen im Wasserstoff erzeugten Strahlen bei verschieden hohen Drucken zu untersuchen.

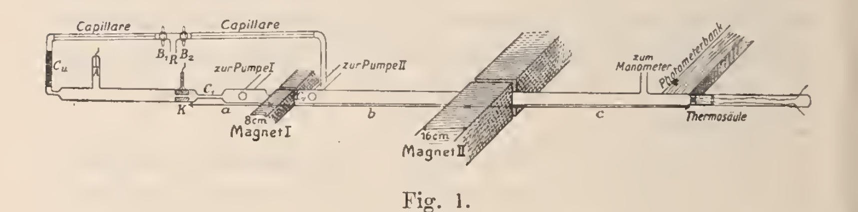


Fig. 1.

Zu diesem Zwecke wurde folgende Anordnung getroffen (Fig. 1). Hinter der Eisenkathode K der Entladungsröhre, durch deren Durchbohrung die Kanalstrahlen austreten, verengert sich die Röhre zu einer Kapillaren C_1. Dann folgt eine kurze weite Röhre mit dem Ansatzrohr, das zur Gaedepumpe I führt. An diese weite Röhre schließt sich eine zweite Kapillare C_2 die wieder in eine lange weite Röhre übergeht. Die weiten Röhren haben einen Durchmesser von ca. 33 mm. Hinter der zweiten Kapillare C_2 befindet sich das zur Gaedepumpe II führende Ansatzrohr. In dieses Ansatzrohr mündet eine Glaskapillare, die durch den Hahn B_2 verschließbar ist und mit

einem mit Wasserstoff gefüllten Gefäß durch die Röhre R kommuniziert. Der zweite Hahn B_1 gestattet den Wasserstoffstrom in eine zweite Kapillare zu leiten, die mit dem Ende der Entladungsröhre verbunden ist. Wenn der Wasserstoffstrom diesen Weg nimmt, so wird bei beständiger Tätigkeit beider Gaedepumpen sich zunächst eine Druckdifferenz zwischen den Enden der Kapillare C_1 und dann eine weitere an den Enden von C_2 ausbilden. In dem langen Glasrohr herrscht in diesem Fall ein niedrigerer Druck als im Entladungsrohr, der an einem Mac Leodschen Manometer gemessen wird.

Öffnet man dagegen den Hahn B_2, während B_1 geschlossen ist und läßt nur die Pumpe I gehen, so bildet sich eine entgegengesetzte Druckdifferenz an der Kapillare C_2 aus. In diesem Fall ist also der Druck in der Beobachtungsröhre größer als in der Entladungsröhre. Die Druckdifferenzen hängen von den Dimensionen der beiden Kapillaren C_1 und C_2 ab.

Bei der einen Versuchsreihe war die Länge von $C_1 = 5$ cm, von $C_2 = 5$ cm, während der Durchmesser von $C_1 = 2$ mm, der von $C_2 = 6$ mm betrug. Die zugehörigen Abmessungen betrugen

a = 33 cm
b = 77 cm (Anordnung I).
c = 54 cm

Bei der zweiten Versuchsreihe war die Länge von $C_1 = 7$ cm, von $C_2 = 7$ cm, während die Durchmesser 2 und 3 mm betrugen. Hier waren

a = 19 cm
b = 77 cm (Anordnung II).
c = 54 cm

Von den beiden Elektromagneten, durch deren Feld die Röhre ging, war der erste ein Hufeisenmagnet mit Eisenquerschnitt von 8 cm Durchmesser. Der zweite bestand aus einem flachen Eisenringe, an dem von innen die rechteckigen umwickelten Eisenstücke von 16 cm Kantenlänge angeschraubt waren. Beide haben verhältnismäßig geringe Streuung. Da

die Wirkung beider Magnete sehr bedeutend war, so wurde bei den Versuchen mit Wasserstoff nur mit sehr schwachen Feldern gearbeitet.

Das Sammelgefäß für den Wasserstoff wurde ebenso wie das ganze Röhrensystem mit einer Geryk-Ölpumpe ausgepumpt, der Wasserstoff entweder aus Zink- und Schwefelsäure oder elektrolytisch aus verdünnter Phosphorsäure entwickelt.

Die Messung der transportierten Elektrizitätsmenge habe ich diesmal nicht als Maß für die Intensität der Strahlen benutzt, da diese Methode wohl unter gleichen Bedingungen in der Röhre brauchbar ist, aber wahrscheinlich keine direkt vergleichbaren Ergebnisse liefert, wenn man mit verschiedenen Graden der Luftverdünnung arbeitet.

Es wurde deshalb in erster Linie die Wärmewirkung auf eine Thermosäule untersucht. Diese Säule ist eine Mellonische Wismuth-Antimonsäule, die den Vorteil hat, daß ihre Empfindlichkeit unabhängig vom Vakuum ist und ferner, daß sie sämtliche Strahlen ihres Querschnitts auffängt. Dieser Querschnitt betrug 1,259 cm.

Die Thermosäule war mit einem Siemensschen Glockengalvanometer verbunden, das die durchaus konstante Empfindlichkeit von $2{,}4.10^{-8}$ Amp. für den Scalenteil hatte, wie die wiederholte Kontrolle ergab. Die auf die Thermosäule fallende Elektrizitätsmenge war klein im Vergleich mit dem Thermostrom, so daß der eine Pol der Säule mit der Erde verbunden werden konnte. Übrigens gab die Thermosäule den gleichen Ausschlag, ob der eine oder der andere Pol mit der Erde verbunden oder ob sie ganz isoliert war.

Eine besondere Prüfung der Proportionalität der Ausschläge mit der Intensität der auffallenden Strahlung wurde in der Weise vorgenommen, daß die Thermosäule in eine evakuierte Röhre eingeschlossen war, die durch eine aufgekittete Glasscheibe abgeschlossen wurde. Durch diese fiel die Strahlung einer mit konstanter Spannung brennenden Glühlampe, deren Entfernung von der Säule verändert wurde. Die Aus-

schläge waren sehr nahe umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung.

Außer der Wärmewirkung sollte die Lichtemission der Kanalstrahlen unter verschiedenen Verhältnissen beobachtet werden. Zu diesem Zwecke war rechtwinklig zur Röhre eine Photometerbank unverrückbar fest aufgestellt. An ihrem Ende war eine Milchglasplatte von 8 cm Länge so befestigt, daß sie die Hälfte der Röhre bedeckte. Die Milchglasplatte erhielt Licht von einer auf der Photometerbank verschiebbaren, mit Wasserstoff gefüllten Geißlerschen Röhre. Da von der Photometerbank trotz ihrer Schwärzung Lichtreflexe nicht ganz zu vermeiden waren, wurde mit einem Leonhard Weberschen Photometer und einer auf der Bank verschobenen Glühlampe das Entfernungsgesetz geprüft.

Bei der photometrischen Messung wurde die Helligkeit des mittleren Teils der von Kanalstrahlen erleuchteten Röhre mit der der Milchglasplatte verglichen. Die Konstanz der Geißlerschen Röhre prüfte ich in der Weise, daß sie an eine bestimmte, markierte Stelle der Bank geschoben und ihr Licht durch ein, ebenfalls an eine fixierte Stelle gesetztes, totalreflektierendes Prisma auf ein Lummer Brodhunsches Kontrastphotometer geworfen wurde. Als Vergleichslichtquelle diente eine an einem Metallschlitten befestigte Glühlampe, deren Licht durch farbige Platten dem der Geißlerschen Röhre möglichst ähnlich gemacht war. Die Spannung der Glühlampe wurde durch ein Präzisionsvoltmeter kontrolliert. Die Geißlersche Röhre wurde im allgemeinen auf gleicher Helligkeit gehalten indem der Primärstrom des kleinen, mit Turbinenunterbrecher getriebenen Induktionsapparats verändert wurde, bis wieder gleiche Helligkeit eintrat. Übrigens war eine Regulierung der Geißlerschen Röhre nur selten erforderlich.

Das Mac Leodsche Manometer hatte ein Volumen von 500 ccm. Die Entladungsröhre wurde mit einer Influenzmaschine von 20 Platten betrieben, die Spannung an einer Funkenstrecke zwischen Kugeln von 2 cm Durchmesser gemessen.

Es wurde nun zunächst die Wärmewirkung der Kanal-

Tabelle I.

Magnetische Einwirkung in verschiedenen Verdünnungen auf Wärmewirkung und Lichtemission.

Anordnung I.

Druck	Wärmewirkung		Spannung	Druck	Helligkeit		Spannung
mm	*A*	*B*	Volt	mm	*A*	*B*	Volt
0,0128	34%[1]	36%	30600	0,0128	58%	61%	30600
0,0110	41	51	27400	0,011	62	57	27400
„		47	„				
0,046	23	32	28800	0,046	43	44	28800
0,051	24	32	27400	0,051	39	43	27400
„	28		„	„	40	43	„

[1]) Stärkeres Magnetfeld.

strahlen bei verschiedenem Gasdruck mit und ohne Magnetfeld II verglichen und ebenso die photometrische Helligkeit. Die nach der Erregung des Magneten II übrigbleibende Wärmewirkung auf die Thermosäule oder Helligkeit ist unter der Rubrik A in der Tabelle I in Prozenten der ungeschwächten Wirkung angegeben. In Rubrik B stehen die entsprechenden Zahlen wenn noch Magnetfeld I erregt ist. Ferner sind in der Tabelle die zugehörigen Drucke und Spannungen angegeben. Bei jeder einzelnen Messung ist der stationäre Zustand der Gasfüllung von neuem hergestellt.

Aus der Tabelle I geht bereits deutlich hervor, daß die bei gleicher Spannung erzeugten Kanalstrahlen, wenn sie in das höhere Vakuum treten, magnetisch weniger beeinflußt werden als wenn sie sich in geringeren Verdünnungen fortbewegen. Dasselbe gilt für die magnetische Schwächung der Helligkeit. Nur daß hier die Strahlen sehr viel mehr in ihrer Wärmewirkung als in ihrer Lichtemission beeinflußt werden, eine Tatsache, die sich bereits früher bei der Beobachtung der transportierten Elektrizitätsmenge ergeben hatte, die auch erheblich stärker beeinflußt wurde als die Lichtemission.

Immerhin schien es mir erforderlich den Unterschied im

Gasdruck noch weiter zu treiben, um den Unterschied der magnetischen Einwirkung noch deutlicher zu erhalten.

Deshalb wurden die Kapillare C_2 enger und beide Kapillare etwas länger gemacht. (Vgl. S. 5.)

Die Beobachtungen mit dieser Anordnung sind in Tabelle II zusammengestellt. Hier sind die Unterschiede in der magnetischen Einwirkung so groß, daß sie gänzlich außerhalb der möglichen Beobachtungsfehler liegen. Dies gilt sowohl für die Verminderung der Wärmewirkung als für die der Lichtemission durch das magnetische Feld.

Durch diese Beobachtungen ist somit der Beweis erbracht, daß die magnetische Einwirkung auf die unter gleichen Bedingungen erzeugten positiven Strahlen im hohen Vakuum geringer ist als bei höherem Gasdruck.

Tabelle II.

Magnetische Einwirkung in verschiedenen Verdünnungen auf Wärmewirkung und Lichtemission.

Anordnung II.

Druck	Wärmewirkung		Spannung	Druck	Helligkeit		Spannung
mm	*A*	*B*	Volt	mm	*A*	*B*	Volt
0,0042	37 %	42 %	31200	0,0042	56 %		31200
0,0053	44	51	32300	0,0053	55	60	29100
„		49	„				
0,0060	45	48	21200	0,0060	64	67	23700
0,0045	47	51	22300	0,0045	64	61	23100
„	48	49	„	„	65	59	„
0,091	17		35400	0,091	25		35400
0,11	12		31200	0,11	19		31200
0,109	22		26100	0,109	22		26100
„	16		„	„	22		„
				„	23		„
0,107	19		„	0,107	24		„
„	26		„	„	24	24	„
0,127	12		22300	0,101		26	28800
„	14	20	„	„	13		„
0,096	15		30000	0,096	16		30500

Tabelle III.

Magnetische Einwirkung in verschiedenen Verdünnungen auf die transportierte Elektrizitätsmenge.

Anordnung II.

Druck mm	Strom	Helligkeit	Spannung
0,013	32 %	38 %	26100
0,013	33	38	„
0,013	35	38	„
0,017	30		„
0,017	30		13000
0,057	15	33	26100
0,057	16	28	„
0,058	17	33	„
0,058	16	34	„
0,077	19		13000
0,077	18		„

Auch die Messung der transportierten Elektrizitätsmenge zeigt das gleiche Ergebnis; diese in Tabelle III aufgenommenen Messungen sind mit einem hohlen Messingzylinder als Auffänger vorgenommen, der mit einem Siemensschen d'Arsonalgalvanometer verbunden war, dessen Empfindlichkeit $2{,}81 . 10^{-10}$ Ampere für den Skalenteil betrug.

Das magnetische Feld des Magneten II, der hier allein benutzt wurde, verhielt sich zu dem früheren wie 1,37 : 1. Die Schwächung des Stroms zeigt sich hier beim höheren Druck wesentlich stärker als die der Helligkeit, was von mir bereits früher beobachtet war.

Aus den Tabellen I und II geht ferner hervor, daß kein erheblicher Unterschied zwischen den Zahlen unter A und B besteht. Die von mir bereits früher an den transportierten Elektrizitätsmengen gemachten Messungen, aus denen hervorging, daß das von einem Magneten beeinflußte Bündel positiver Strahlen sich in einem zweiten magnetischen Felde ebenso verhält wie ein nicht beeinflußtes, bestätigt sich auch bei den Messungen der Wärmewirkung und der Helligkeit. Es werden daher auch die lang-

sameren Strahlen nicht nennenswert stärker abgelenkt als die schnelleren.

Ferner zeigt sich die magnetische Einwirkung bei annähernd gleichem Vakuum nicht merklich abhängig von der Entladungsspannung.

Um diese Beobachtungen auch auf niedrigere Spannungen auszudehnen, für die die Entfernung der Thermosäule von der Kathode zu groß war, wurde die Thermosäule in eine Entfernung von 55 cm von der Kathode gebracht.

In Tabelle IV a und b ist unter *C* die nach Erregung von Magnet I übrigbleibende Wärmewirkung oder Helligkeit in Prozenten der ursprünglichen angegeben. IV a enthält die Messungen im Gase von höheren Druck, IV b die bei niedrigem Druck. Die Einwirkung der Magneten auf die Helligkeit war im letzteren Falle so gering, daß sie nicht mehr gemessen werden konnte.

Tabelle IV a.

Anordnung II.

Abstand der Thermosäule von der Kathode 55 cm.

Druck	Wärmewirkung		Helligkeit	
	C	Spannung	*C*	Spannung
0,107	40,5 %	24500		
„	40,4	„		
0,119			58 %	17400
0,102	42,3	26100		
„	43,6	„		
0,132			53,4	14400
„	46,7	15400		
0,102	41	25200		
0,139	44,3	13000	53,1	„
„	42,0	„	52,5	„
0,137	44,4	14400	49,3	„
0,117	43,4	16000		
0,077	38,2	37700[1]		
0,137			53	„
„			54	„

[1]) Entladung nicht ganz regelmäßig.

Tabelle IV b.

Anordnung II.

Abstand der Thermosäule von der Kathode 55 cm.

Druck	Wärmewirkung	
	C	Spannung
0,0065	64,3 %	16000 [1]
"	62,7	" [1]
0,0061	67,1	19900
"	66,7	"
0,007	65,6	8100
"	67,8	"
0,005	71,0	6700
"	72,5	"
0,004	70	31200
"	71,8	"

[1]) Entfernung der Thermosäule von der Kathode 81 cm.

Tabelle V.

Anordnung I.

Druck	Reduzierter Ausschlag b	Spannung	Druck	Reduzierter Ausschlag a	Spannung	$\frac{b}{a}$ 100
0,044	104	25200	0,0116	206	25800	50
0,052	104	25800				
0,051	207	27400	0,010	323	27400	64
0,046	237	30000	0,0092	368	30000	65
0,049	253	30000	0,0092	383	30000	66
0,046	215	30100	0,0094	442	30200	49

Anordnung II.

Druck	Reduzierter Ausschlag b	Spannung	Druck	Reduzierter Ausschlag a	Spannung	$\frac{b}{a}$ 100
0,109	41,3	23100	0,0060	197	21200	21
0,107	107	26100	0,0045	262	22300	
0,096	88	30500	0,0053	333	30000	26,5
0,11	58	31200	0,0042	332	31200	17,7
0,091	80,8	35400				

Weder bei höheren noch bei niederem Gasdruck ist die magnetische Einwirkung in erkennbarer Weise von der Spannung abhängig. Auch hier zeigt sich eine stete Abhängigkeit der magnetischen Einwirkung von der Größe des Gasdrucks, in dem bei niedrigen Drucken die positiven Strahlen weniger stark magnetisch beeinflußt werden.

Schließlich wurde noch das Verhältnis der Wärmewirkung zur Helligkeit bei verschiedenen Gasdrucken miteinander verglichen und zwar zunächst bei den beiden ursprünglichen Anordnungen in großer Entfernung von der Kathode (I und II, S. 5). Unter der Überschrift „Reduzierter Ausschlag" sind die Ablenkungen des Galvanometers, bezogen auf dieselbe Helligkeit, in willkürlichen Einheiten in die Tabelle V aufgenommen. Man ersieht, daß sowohl bei Anordnung I wie noch mehr bei Anordnung II, wo die Druckunterschiede größer sind, die linksstehenden reduzierten Ausschläge bei gleicher Spannung wesentlich kleiner sind als die rechtsstehenden. Die ersteren sind bei höheren, die letzteren bei niedrigen Gasdrucken beobachtet.

Hieraus folgt, daß bei gleicher Wärmewirkung die Lichtintensität bei derselben Spannung im höheren Vakuum wesentlich kleiner ist als bei niedrigem Vakuum. Jedoch bleibt noch zu untersuchen, wie weit die stärkere Lichtemission bei höherem Gasdruck auf Rechnung der ruhenden Atome zu setzen ist.

Die letzten Beobachtungen wurden noch unter anderen Bedingungen ausgeführt. Die Thermosäule wurde mehr an die zweite Glaskapillare geschoben, so daß ihr Abstand von C_2 13,5 cm betrug. Dann gingen die Kanalstrahlen noch als scharf begrenztes Bündel bis auf die Thermosäule und wurden vollständig von ihr aufgefangen. Die Beobachtung geschah hier bei gleicher photometrischer Helligkeit, indem durch Regulierung der Touren der Influenzmaschine gleiche Lichtemission erreicht wurde; die Photometrie geschah in der Weise, daß zwei von den Herren Schmidt & Hünsch montierte totalreflektierende Prismen (Fig. 2), die von dem Kanalstrahlenbündel A

A C B

Fig. 2.

kommenden Strahlen und die einer Glühlampe B, die durch einen Spalt und geeignete Farbenfilter gingen, so nach C lenkten, daß man hier die beiden gleich großen Felder unmittelbar nebeneinander sah. Trotz der viel größeren Helligkeit des Kanalstrahlenbündels war doch die Genauigkeit der photometrischen Einstellung geringer als bei den an sich lichtschwächeren, aber ausgedehnteren Feldern der zerstreuten Kanalstrahlen in größerer Entfernung.

Die Beobachtungen sind in Tabelle VI zusammengestellt. Auch hier bestätigt sich die Tatsache, daß die Lichtemission bei höherem Druck bei gleicher Spannung erheblich größer ist als bei niederem Druck, beide auf gleiche Wärmewirkung bezogen.

Tabelle VI.

Anordnung II.

Entfernung der Thermosäule von der Kathode 34,5 cm.

Spannung	a		b		$\frac{b}{a}$ 100
Volt	Druck mm	Ablenkung des Galv.	Druck	Ablenkung des Galv.	
20400	0,0058	580	0,112	160	28
23100	0,0060	742	0,108	258	36
26100	0,0050	534	0,102	294	55
26300	0,0068	706	0,105	340	48
26100	0,0050	538	0,075	228	42
26100	0,0047	642	0,077	312	49
28800	0,0050	889	0,087	412	46

Die Beobachtungen selbst ergaben, daß bei gleicher Spannung im hohen Vakuum die Lichtemission etwas kleiner war, wenn die Influenzmaschine konstant blieb, während die Wärmewirkung erheblich größer war als im niedrigeren Vakuum.

II. Beobachtungen an positiven Strahlen des Quecksilbers.

Gegenüber den aus Gasen erzeugten Kanalstrahlen bieten die in Dämpfen erzeugten mancherlei Vorteile, insbesondere den, daß man nach Kondensation des Dampfes einen Raum

herstellen kann, in den die positiven Strahlen eintreten und der so hoch evakuiert ist, wie es die modernen Hilfsmittel überhaupt gestatten. Ich habe deshalb einige vorläufige Beobachtungen am Quecksilberdampf angestellt.

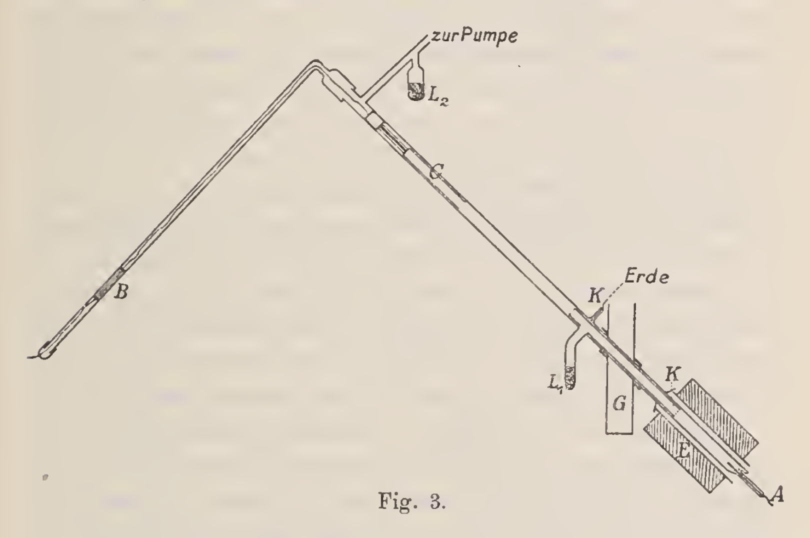


Fig. 3.

Die Versuchsanordnung zeigt Fig. 3. In ein schräg gestelltes langes Glasrohr ist ein Eisenzylinder *K* geschoben, der an dem einen Ende ein doppeltes Drahtnetz mit zwei 5 mm von einander entfernten Drahtlagen aus Nickeldraht trägt Am andern Ende ist ein Diaphragma befestigt und bei *K* ist ein Stift eingeschraubt, der den Zylinder in seiner Lage hält und die Zuführung nach außen vermittelt. Die Anode *A* ist ein Eisenstift, der durch einen angelötheten Platindraht eine Stromleitung nach außen erhält.

Über die eigentliche Entladungsröhre ist ein elektrischer Ofen *E* geschoben, durch den die Röhre gleichmäßig erhitzt werden kann. Die Röhre ist dann wasserdicht in das Gefäß *G* eingekittet, welches mit Eis gefüllt wird. Der sich aus dem Quecksilber in der Röhre entwickelnde Dampf erfüllt den Teil, durch den die Entladung geht, gleichmäßig, während er sich in dem Gefäß *G* kondensiert und zurückfließt. Am

Ende des Eisenzylinders ist an die Röhre das mit Kohle gefüllte Gefäß L_1 angesetzt. An dem andern Ende der Röhre befindet sich ein zur Pumpe führender Ansatz, der ebenfalls ein mit Kohle gefülltes Gefäß L_2 trägt. In der Röhre ist ferner ein verschiebbarer Auffänger C, der aus einem 20 cm langen hohlen Messingzylinder besteht, der durch ein Gegengewicht B am Heruntergleiten verhindert wird. Der Eisenzylinder kann durch eine über die Röhre geschobene stromdurchflossene Spule beliebig verschoben werden.

Wenn die Elektroden von Gasen befreit sind und man schickt die Entladung der Influenzmaschine durch den Quecksilberdampf, so füllt sich die Röhre bei höherer Spannung mit leuchtenden Strahlen auch bei dem extremsten Vakuum, wenn die Gefäße L_1 und L_2 in flüssige Luft eintauchen. Auch nach langem Erhitzen gibt die Pumpe, sobald die Entladung auch nur kurze Zeit hindurchgegangen ist, wieder Gasspuren ab.

Ein mit dem Auffänger verbundenes Galvanometer von $2{,}8.10^{-10}$ Empfindlichkeit gibt dann negativen Strom, der wegen der starken Ablenkbarkeit auch durch schwache Magnetfelder offenbar aus Elektronen besteht. Diese Elektronen sind Sekundärstrahlen, die aus dem Quecksilberdampf stammen und in ihm außerordentlich reichlich vorhanden sind. Ein dünner offener Messingzylinder, den man an dem Auffänger befestigt und als Sonde in den Quecksilberdampf führt, gibt in der Entfernung 2—4 cm vom Drahtnetz außerordentlich starke negative Ströme, welche zuweilen stärker sind als der ganze Entladungsstrom, während bei größerer oder geringerer Entfernung von der Kathode der negative Strom schwächer wird.

Aus dem das Diaphragma verlassenden Strahlenbündel kann man mit einem kleinen Elektromagneten ein Bündel negativer Strahlen ablenken, welche die Wand zur Fluoreszenz erregen.

Ein großer Elektromagnet in einer Entfernung von 100 cm von der Kathode lenkt die negativen Strahlen vollständig ab. Wenn dann die Gasreste ausgepumpt sind, gibt das Galvanometer überhaupt keinen erkennbaren Strom an, der jedenfalls

kleiner ist als 10^{-10} Amp. Auf das leuchtende Bündel übt der Elektromagnet auch bei den stärksten Feldern keinen erkennbaren Einfluß aus.

Wir können die Beobachtungen in folgenden Sätzen zusammenfassen:

1. Die positiven Strahlen des Wasserstoffs sind in hohen Verdünnungen magnetisch weniger stark beeinflußbar wie in niedrigeren.
2. Die Strahlen, welche durch ein Magnetfeld geschwächt sind, werden auch in ihrer Wärmewirkung und Lichtemission durch ein zweites Magnetfeld annähernd in demselben Verhältnis geschwächt wie solche Strahlen, auf die das erste Magnetfeld nicht eingewirkt hat.
3. Die Lichtemission ist unter sonst gleichen Bedingungen bei hoher Verdünnung erheblich geringer als bei niedriger.
4. Die magnetische Einwirkung ist nicht merklich von der Spannung abhängig.
5. Die Kanalstrahlen des Quecksilbers transportieren keine merkliche positive Ladung und eine Ablenkung ist auch in starken magnetischen Feldern durch direkte Beobachtung der Lichtemission nicht wahrzunehmen.

Diese Ergebnisse der vorliegenden Beobachtungen ergeben folgendes Bild. Die positiven Atome streben wieder dem neutralen Zustande als dem stabilen Gleichgewichtszustande zu. Wenn also Veranlassung zur Neubildung fehlt, so werden sie sich sämtlich durch vorhandene Elektronen neutralisieren. Die Versuche in verschiedenen Verdünnungen zeigen nun, dass bei höheren Gasdrucken stärkere magnetische Beeinflussung eintritt, was darauf hinweist, daß hier mehr positiv geladene Atome vorhanden sind. Es sind daher wahrscheinlich die Zusammenstösse mit ruhenden Gasmolekülen, welche zur Bildung positiver Atome führen. In einer bestimmten Gasverdünnung stellt sich somit ein stationärer Zustand her, bei welchem ebensoviel positive Atome sich neu bilden wie sich neutralisiren. In sehr hohen Verdünnungen ist die Zahl der Zusammenstöße gering, dann bilden sich nur wenige neue positive Jonen. Im Queck-

silberdampf wird nun die Neutralisation der positiven Atome durch dies erwähnte massenhafte Vorhandensein von Elektronen wesentlich begünstigt und hieraus erklärt es sich, daß überhaupt keine positiven Atome nachweisbar sind. Die Tatsache, daß die Quecksilberstrahlen trotzdem leuchten macht es wahrscheinlich, daß das Leuchten im neutralen Zustande geschieht. Die Vermutung, daß die positiven Jonen im neutralen Zustande leuchten ist von Herrn Lenard bereits vor längerer Zeit ausgesprochen.[1]) Diese Annahme stimmt auch mit der Ansicht überein, daß dies Leuchten bei Aufnahme eines negativen Elektrons erregt wird[2]) und mit meinen Beobachtungen des Leuchtens der Wasserstoffkanalstrahlen im magnetischen Felde.[3])

Auf eine nähere Diskussion der quantitativen Ergebnisse will ich zunächst nicht eingehen, da mir eine solche erst einer theoretischen Unterlage zu bedürfen scheint, die sich aus kinetischen Betrachtungen ergeben muß. Ich behalte mir dann vor aus diesen Beobachtungen weitere Schlüsse zu ziehen.

---

[1]) Lenard, Ann. d. Phys. 9, S. 649, 1902. Nach ihm sollen die neutralen Jonen die Hauptserie des Spektrums aussenden. Für den Wasserstoff wäre dann die Balmersche Serie als Hauptserie zu bezeichnen.

[2]) W. Wien, Ann. d. Phys. 23, S. 433, 1907.

[3]) W. Wien, Ann. d. Phys. 27, S. 1039, 1908.

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 13. Abhandlung

Zur Kritik der flächentreuen Projektionen der ganzen Erde und einer Halbkugel

von

Dr. Walter Behrmann

Mit 3 Tafeln

Vorgelegt am 12. Juni 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Die Lehre von den Kartenprojektionen ist durch die berühmte Arbeit von Tissot[1]) in völlig neue Bahnen gelenkt worden. Stand man bis zum Erscheinen dieser Arbeit trotz der Ausführungen Lamberts[2]) der Menge der Entwurfsarten ziemlich kritiklos gegenüber, so ermöglichte der von Tissot eingeschlagene Gedankengang eine exakte Untersuchung der Naturtreue einer Projektion und somit ein gegenseitiges Abwägen verschiedener Entwürfe.

Anstatt die Abbildungen der Meridiane und Parallelkreise, also schwierige Kurven, ihre Schnittwinkel und die von ihnen eingeschlossenen Flächen zu untersuchen und zu vergleichen, zeichnet Tissot einen kleinen Kreis (mit dem Radius 1) im Durchschnittspunkt der Gradnetzmaschen und studiert die Abbildung dieser „Indikatrix“, die im allgemeinen eine Ellipse (mit den Achsen a und b) wird. Die Verzerrungen dieses Kreises sind die Verzerrungen der Projektion an diesem Punkte überhaupt. Man ist somit in die Lage versetzt, die Längenverzerrungen und bei flächentreuen Projektionen die Winkelverzerrungen, bei winkeltreuen Projektionen die Flächenverzerrungen punktweise zu bestimmen. Diese Arbeit ist für die bis zum Erscheinen des Werkes bekannten Projektionen schon

---

1) M. A. Tissot: Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques, Paris 1881; auch in deutscher Übersetzung von E. Hammer: Die Netzentwürfe geographischer Karten etc. Dieses Werk wird nach der deutschen Ausgabe mit „Tissot“ zitiert werden.

2) Lambert: Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Erd- und Himmelskarten. Berlin 1772. Ostwalds Klassiker LIV, vgl. auch Siegmund Günther: Handbuch der Geophysik. Stuttgart 1897, I, p. 293.

vom Autor selbst ausgeführt, die Resultate sind in einer Fülle von Tabellen niedergelegt. Um sich ein klares Bild von der Zunahme der Verzerrung zu verschaffen, also die in den Tabellen und Formeln enthaltenen Werte leicht zu überschauen, kann man die Punkte gleicher Verzerrung durch Kurven verbinden. Diese in die Karte eingetragenen „Äquideformaten“[1]) geben ein leicht erkennbares Bild von der Verläßlichkeit einer Karte.

Trotzdem nun die Naturtreue eine Grundforderung ist, die an jede Karte gestellt werden muß, man also bei jeder Karte die Abweichungen von diesem Erfordernis, das keine Karte ganz erfüllen kann, genau kennen müßte, wurde die Zeichnung von Linien gleicher Verzerrung bislang nur sehr wenig ausgeführt. In der neuen Projektionslehre von Zöppritz-Bludau[2]) z. B. finden sich solche Kurven nur für die leicht auszurechnende Sanson-Flamsteedsche Projektion und für einen Spezialfall der Bonneschen Projektion. Die Untersuchungen Hammers geben für die azimutalen Projektionen, sowie die flächentreue Kegelprojektion die kreisförmigen Verzerrungskurven; auch zeichnet er die geraden Linien bei den Zylinderprojektionen.[3]) Die Debatte über die beste Projektion des Afrikanischen Kontinents[4]) hat mehrere Karten mit diesen

---

[1]) Die erste Verzeichnung rührt von dem Niederländer Schols, die Namengebung von Günther her.

[2]) Karl Zöppritz: Leitfaden der Kartenentwurfslehre für Studierende der Erdkunde und deren Lehrer. 2. Aufl. von Alois Bludau. Leipzig 1899, p. 148 und 121.

[3]) E. Hammer: Über die geographisch wichtigsten Kartenprojektionen, insbesondere die zenitalen Entwürfe. Stuttgart 1889, Taf. I—IV; vgl. auch Bludau: Flächentreue Azimutalprojektion bei Karten von Asien und Europa. Ztschr. d. Ges. f. Erdk., Berlin XXV, Taf. IV.

[4]) Zöppritz: Die Wahl der Projektionen für Atlanten und Handatlanten. Ztschr. d. Ges. f. Erdk., Berlin XIX, p. 1 ff. E. Hammer: Über Projektion der Karte von Afrika. Ebenda XXIV, p. 222 ff. A. Bludau: Die flächentreue transversale Kegelprojektion für die Karte von Afrika. Ebenda XXVI, p. 145 ff., Taf. III. Hammer: Bemerkungen über die Projetion der Karte von Afrika. Ebenda XXVII, p. 69 ff. Bludau: Die flächentreue Azimutalprojektion Lamberts für die Karte von Afrika. Pet. Mitt. 1892, p. 214 ff.

Kurven ausgestattet. Aber trotz allem kann man sich, vielleicht wegen der Fülle der ausgerechneten Tabellen, von dem Verlaufe dieser Kurven bei den wichtigsten Projektionen nur schwer eine Vorstellung machen.

Im allgemeinen wird die Untersuchung der Verzerrungen vornehmlich von Seiten der Geodäten vorgenommen, um bei der Konstruktion topographischer Karten eine der Genauigkeit der Aufnahme entsprechende Abbildungsart zu ersinnen. Doch sind schon nach dem Urteil von H. Wagner[1]) „die Theoretiker mit einzelnen Anforderungen an eine Grenze gelangt, welche einerseits mit den topographischen Kenntnissen fremder Gebiete vielfach im grellen Wiederspruch steht, andererseits von der heutigen Technik des Kartenzeichnens nicht überschritten werden kann, solange sie mit den unvermeidlichen und unberechenbaren Fehlern, die das je nach Feuchtigkeitsgehalt mehr oder weniger eingeschrumpfte Papier hervorruft, zu rechnen hat".

Dieses Urteil dürfte wohl eine gewisse Sorte von Karten unberührt lassen. Handelt es sich nämlich darum, die ganze Erde, sei es in Planigloben oder in einem Planisphäre abzubilden, so sind die Winkel- oder Flächenverzerrungen teilweise so beträchtlich, daß gerade diese Bilder, die berufen sein sollten, uns in schwacher Weise den dreidimensionalen Globus zu ersetzen, die Schuld tragen an den merkwürdigsten Entstellungen in den Köpfen der Allgemeinheit. (Ich erinnere nur an die Unkenntnis der Lage des Meridians von New-York zu Südamerika, an die falschen Flächenvorstellungen, hervorgerufen durch die Mercator-Projektion.) Man müßte also hier wohl wirklich eine möglichst geringe Verzerrung anstreben. Eine Untersuchung gerade dieser Projektionen dürfte nicht verlorene Mühe sein, zumal da in letzter Zeit eine Reihe von neuen Entwürfen in Vorschlag gebracht ward. Eine Auswahl darf nur erfolgen nach dem Gesichtspunkt der größeren und kleineren Verzerrung; erst wenn diese fast gleich sein sollten, können andere Gesichtspunkte in Frage kommen.

---

[1]) Hermann Wagner: Lehrbuch der Geographie, 8. Aufl., 1908, p. 195.

Ich beschränke mich auf die flächentreuen Projektionen. Die winkeltreuen Abbildungen haben so entschiedene Vorteile in dieser oder jener Hinsicht aufzuweisen (das Kreisnetz bei der stereographischen, die geradlinige Loxodrome bei Mercators Projektion), daß man ein absolutes Werturteil über sie nicht zu fällen vermag. Der Zweck der Karte wird hier ihre Abbildungsart fordern. Die Unterschiede der flächentreuen Entwürfe aber sind nicht so einschneidend, als daß man die eine nicht bereitwillig gegen die andere eintauschen möchte. Außerdem tritt in neuerer Zeit die große Wichtigkeit gerade der flächentreuen Entwürfe für die ganze Erde in der Geographie mehr und mehr in den Vordergrund.

Wie nun gelangt man zu einem Werturteil über flächentreue Projektionen der ganzen Erde?

Da bei allen flächentreuen Projektionen die Längen der großen und kleinen Achse der Indikatrix (a und b), also die Längenverzerrungen mit der Maximalwinkelverzerrung $2\,\omega$, d. h. der größten Winkelverzerrung, die überhaupt an dem betreffenden Punkte stattfinden kann, durch die Formeln

$$a \cdot b = 1;\ \sin \omega = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \quad \text{also} \quad a = \operatorname{tg}\left(45 + \frac{\omega}{2}\right),$$
$$b = \operatorname{cotg}\left(45 + \frac{\omega}{2}\right)$$

verbunden sind, so ist es möglich, aus der Winkelverzerrung sofort die Längenverzerrung zu berechnen.[1]) Es braucht also eine Untersuchung der Verzerrungsverhältnisse nur auf die Winkel Rücksicht zu nehmen; mit ihren Verzerrungen nehmen die der Längenverhältnisse ab und zu. „Auf flächetreuen Karten gibt es . . . nur einerlei Linien gleicher Verzerrung, indem die Linien gleicher Maximalwinkelverzerrung auch die Punkte gleicher extremer Längenverhältnisse verbinden. Ganz ähnlich gibt es auch auf winkeltreuen Karten nur einerlei Linien, welche zugleich die Äquideformaten für Flächen- und auch für Län-

[1]) Vgl. Hammer, l. c. XXIV, p. 238.

genverhältnisse sind; dagegen sind auf einer ganz beliebigen vermittelnden Abbildung vier Systeme von Äquideformaten zu ziehen."[1]) Daher können uns geringere oder größere Winkelverzerrungen ein Maßstab für die Güte flächentreuer Projektionen sein.

Es erhebt sich nun die Frage, ob man die durchschnittliche Maximalwinkelverzerrung ($2\omega_d$) oder überhaupt den größtmöglichen Wert einer Winkelverzerrung ($2\omega_{max}$) als Kriterium für den geringeren oder größeren Wert der Projektion anzusehen hat. Hammer hat a. a. O. eine Methode angegeben, die durchschnittliche Verzerrung einer Karte zu bestimmen; er vergleicht die Verzerrung der Karte Afrikas in Sansonscher und in seiner flächentreuen schiefachsigen konischen Projektion und benutzt $2\omega_d$. Bludau will in seiner Erwiderung als ausschlaggebenden Wert den maximalen Betrag der Verzerrung bevorzugt wissen, weil die Wahl der Abgrenzung die Lage des Hauptpunktes oder Mittelmeridians eine Veränderung des Mittelwertes wie des Maximalwertes hervorruft, ersterer also ebenfalls nur relativ sei. Hammer weist mit Recht darauf hin, daß die Abgrenzung und Lage des Gradnetzes nie willkürlich bei einer Karte sind, somit auch der Durchschnittswert in organischer Verbindung mit dem Kartenbilde steht. Aber für unsere Untersuchungen kommen eine Abgrenzung oder die Wahl eines Augenpunktes nicht einmal in Frage. Handelt es sich doch bei uns um die Darstellung der ganzen oder halben Erdkugel, eines eindeutig umrissenen Gebiets, dessen Hauptpunkt stets im Äquator liegt. Und für diese Art der Entwürfe sagt Bludau selbst:[2]) „Dem Verfahren Hammers, die durchschnittlichen Verzerrungen zu ermitteln und zu vergleichen und nach ihnen den Wert der Projektionen festzulegen, so interessant es auch an und für sich ist, möchte ich nur in besonderen Fällen eine absolute Bedeutung beilegen. Es sind dies diejenigen Fälle, wo Projektionen zum Vergleiche stehen,

[1]) Hammer, l. c. XXIV, p. 233.
[2]) l. c. XXVI, p. 148.

bei denen Haupt- (Mittel-) Punkt und Mittelmeridian dieselben sind.“ Dies trifft in unserem Falle der Darstellung der ganzen oder halben Erde zu. Ja, in seinem späteren Aufsatz[1]) benutzt Bludau selbst den von Hammer beschrittenen Weg zu einer Abwertung der Karten, stellt sich also völlig auf Hammers Standpunkt.[2]) Daß nicht die extremen Werte der Verzerrung von ausschlaggebender Bedeutung bei der Abwertung der Projektionen sein können, ergibt sich schon daraus, daß anderenfalls alle Entwürfe, bei denen im Pol $2\omega_{max} = 180^0$ also $a = \infty$, eintritt, also die flächentreuen Zylinder-, die Mollweidesche und die Eckertschen Projektionen, sowohl für die Darstellung der ganzen als wie der halben Erdkugel debattelos aus dem Vergleich ausscheiden mußten, was man wohl nicht zugeben wird. Es ergibt sich vielmehr:

Zur Abwertung der Güte der flächentreuen Projektionen kann einzig und allein der Wert der durchschnittlichen Maximalwinkelverzerrung $2\omega_d$ maßgebend sein.[3]) Erst wenn diese bei zwei Projektionen fast gleich gering sein sollte, können andere Fragen, als da sind bequeme Zeichnung, geradlinige Parallele oder Meridiane u. s. w. in Frage kommen.

---

[1]) Pet. Mitt. 1892, p. 217.

[2]) Vgl. ferner Pet. Mitt. 1899, Literaturbericht 574 und die Erwiderung Hammers, Pet. Mitt. 1899, p. 246.

[3]) In jedem Punkte der Abbildung wird der Maximalwert der Verzerrung nur von zwei bestimmten Winkeln erreicht, und zwar sind die beiden Winkel, die die maximale Verzerrung erleiden, Scheitelwinkel und werden durch die große Achse der Indikatrix halbiert. Zu jeder beliebig gezogenen Richtung läßt sich aber eine zweite angeben, deren Winkel in der Abbildung nicht verändert wird. (Vgl. Zöppritz-Bludau, p. 20). Die Verzerrung 0 wird also in jedem Punkte unendlich oft erreicht, das Maximum 2ω dagegen nur zweimal. Es ist also unmöglich, einen Mittelwert der Verzerrung für irgend einen Punkt anzugeben, und folglich hat auch die Projektion als ganze keine mittlere Winkelverzerrung. Man kann nur von einer mittleren Maximalwinkelverzerrung reden. Ich füge daher ständig das Wort „Maximal“ hinzu, damit dieser wichtige Punkt immer im Auge behalten wird.

Hammer bestimmt seine durchschnittliche Maximalwinkelverzerrung,[1]) indem er die Flächen innerhalb zweier Äquideformaten planimetriert; die durchschnittliche Verzerrung dieser Fläche ist das Mittel der Randwerte. Aus der Summe dieser Werte ergibt sich die durchschnittliche Maximalwinkelverzerrung als arithmetisches Mittel. Dieser Weg hat natürlich nur bei eng aneinanderliegenden Äquideformaten Berechtigung; nur dort kann man den Durchschnitt fast gleich dem Mittel der Randwerte setzen.[2])

Ich möchte bei der Bestimmung einen etwas anderen Weg einschlagen, der im Grunde auf dasselbe Prinzip hinausläuft. Auch ich planimetriere die Flächen und zwar die völlig von einer Verzerrungskurve umschlossenen, also die ganze Fläche innerhalb der Verzerrungskurven $2\omega = 1^0, 5^0, 10^0$ u. s. w. Ich zeichne dann, analog der hypsographischen Kurve, ein Diagramm, indem ich die gemessenen Flächen durch proportionale Teile in der Abszissenachse, die dazugehörigen Maximalwinkelverzerrungen in der Ordinatenachse auftrage und die erhaltenen Punkte durch einen Kurvenzug verbinde. Bestimme ich die mittlere Höhe der vom Diagramm eingeschlossenen Fläche, indem ich sie ausplanimetriere und die erhaltene Flächenzahl durch die Grundlinie des Diagramms dividiere, so kann ich durch die

---

[1]) l. c. XXIV, p. 235. Der hier vorgeschlagene Weg ist wohl dem Autor selbst günstiger erschienen, als das in seiner Schrift über die geographisch wichtigsten Kartenprojektionen p. 83 vorgeschlagene Verfahren, wo er als Maß hinstellt die Größe

$$V = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left| \left(\frac{a}{b} - 1\right)^2 + (a \cdot b - 1)^2 \right| \cos\varphi \, d\varphi \, d\lambda$$

(hier bei flächentreuen Projektionen $a \cdot b = 1$), denn „ein zwingender Grund, gerade diesen Ausdruck zu nehmen, liegt nicht vor“.

[2]) Die Hammersche Methode zerlegt die Kurve des Verzerrungsdiagramms (s. u.) in eine gebrochene Linie, die Diagrammfläche in eine Summe von Trapezen, deren Höhen er gleich dem Mittel der Seitenlängen setzt; die mittlere Höhe ist das Mittel aus der Summe der Trapezhöhen; dies trifft um so eher zu, je kleiner die Grundlinie der Trapeze ist.

mittlere Höhe an der Ordinaten-Achse unmittelbar die gesuchte durchschnittliche Maximalwinkelverzerrung ablesen. Der Vorteil dieser Methode liegt darin, daß die Verzerrungsdiagramme der verschiedensten Projektionen einen weiter gehenden Vergleich der Güte der einzelnen Entwurfsarten zulassen als ein einfacher Durchschnittswert, so daß der Wert der Diagramme selbst dann nicht verloren geht, sollte man sich auf den oben skizzierten Bludauschen Standpunkt stellen oder nach Hammers Vorschlag[1]) einzelne Flächen (Europa) bevorzugen und mit größerem Gewicht in die Durchschnittsrechnung einstellen wollen. Ein Studium des Diagramms und der Äquideformaten kann den Erfolg dieses Verfahrens ahnen lassen, bevor man die mühsame Arbeit des Planimetrierens beginnt.

Der Verlauf der Arbeit wird nach Obigem also folgender sein:

1. Aufstellen der Formeln der Winkelverzerrung.[2]) Diese Arbeit ist für die älteren Projektionen von Tissot geleistet, wie er auch die Formel für den allgemeinsten Fall einer Abbildung der Erde angibt.[3])

2. Berechnen der Zahlenwerte der Winkelverzerrungen. Auch diese Tabellen wurden vielfach von Tissot berechnet und von Bludau erweitert. Es erschien mir aber zum Zeichnen der Verzerrungskurven eine Kenntnis der Zahlenwerte für mindestens alle Gradnetzschnittpunkte von $\varphi = 0, 10, 20$ u. s. w. und $\lambda = 0, 20, 40$ u. s. w. erforderlich. Es müssen also, soweit die Tabellen sie nicht bringen, diese Werte nachgeholt werden. Selbst dann noch können bei weiten Maschen, also meist am Äquator, die Interpolationen Ungenauigkeiten mit sich führen. Ferner ist dort, wo die Verzerrung 0 nicht am Äquator sondern an zwei Punkten des Hauptmeridians eintrifft, eine genaue Zeichnung der Kurven $2\omega = 1^0, 5^0$ zuweilen auch $= 10^0$

---

[1]) l. c. XXIV.

[2]) Ich sehe bei allen meinen Berechnungen ab von der Abplattung der Erde, da die hierdurch hervorgerufenen Abänderungen bei den anderen Fehlerquellen nicht ins Gewicht fallen.

[3]) Tissot, p. 194—196.

nicht zu verbürgen. Je kleiner die eingeschlossene Fläche, um so ungenauer wird in diesem Falle die Kurve ausfallen. Beim Zeichnen der Diagramme aber spielen diese kleinen Flächen keine Rolle; ihre Ungenauigkeit kann also den durchschnittlichen Wert der Maximalwinkelverzerrung nicht beeinflussen.

3. Zeichnen der Äquideformaten. Dieses wurde einheitlich im Maßstab 1:66,66 mm ausgeführt.

4. Bestimmung des Inhalts der Flächen. Soweit dieses keine geometrisch einfachen Gebilde sind, muß die Bestimmung mit Hilfe des Planimeters geschehen. Naturgemäß haftet dem Planimetrieren eine Ungenauigkeit an, zumal eine absolut richtige Linienführung durch die Interpolation nicht gewährleistet wird. Alle Resultate sind daher Näherungswerte.

5. Zeichnen der Verzerrungsdiagramme.

6. Bestimmung der mittleren Höhe dieser Diagramme durch Ausplanimetrieren und somit der mittleren Maximalwinkelverzerrung der Projektion selbst, die auch sofort die mittlere Längenverzerrung uns berechnen läßt (s. o.).

Um die Abhängigkeit der letzteren Werte von der umgrenzenden Fläche hervorzuheben, gleichzeitig aber die Untersuchung über die Brauchbarkeit der Projektionen auf die Halbkugel auszudehnen, mußten bei jeder Projektion die Punkte 4, 5 und 6 wiederholt werden. Erst jetzt konnte an eine begründete Abwertung der verschiedenen Projektionen gedacht werden.

Im folgenden soll die Anwendung dieser sechs Punkte gegeben werden.

A. Die flächentreuen Zylinderprojektionen.

a) Mit längentreuem Äquator.

Die Meridiane sind eine Schar paralleler Geraden im Abstand $R = \operatorname{arc} \lambda$ vom Mittelmeridian, die Parallelkreise sind eine Schar paralleler Geraden im Abstand $R \cdot \sin \varphi$ vom Äquator. Das Verzerrungsgesetz lautet[1]) $\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{2} \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi$, wofür man bequemer schreiben kann

[1]) Tissot, p. 101.

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}.$$

Die Verzerrungskurven sind parallele Geraden zum Äquator, deren Abstand gefunden wird, indem man für 2ω die Werte 0, 1, 5, 10. 20 etc. einsetzt und φ berechnet (Tabelle III), dann aus $h = R \cdot \sin\varphi$ den Abstand bestimmt. (Karte I.) Die von den Verzerrungskurven eingeschlossenen Flächen sind in unserem Falle Rechtecke, deren Basis der Äquator ($2R\pi$), deren Höhe das Doppelte von $h = R\sin\varphi$ also $F = 4R^2\pi\sin\varphi$ ist.

Es läßt sich somit für jedes 2ω die Fläche berechnen, innerhalb der es nur auftreten kann (Tabelle I 1), und das Verzerrungsdiagramm (Diagramm I) konstruieren. Es ist eine Kurve, die sich verhältnismäßig lange Zeit in der Nähe der Abszissenachse hält, dadurch anzeigend, daß die Flächen geringer Verzerrung ziemlich groß sind; dann steigt sie langsam und stetig, um endlich gegen Ende plötzlich emporzuklimmen, wodurch sich ergibt, daß die großen Verzerrungen nur in kleinen Flächenräumen stattfinden. Die mittlere Höhe des Diagramms ergibt eine m i t t l e r e M a x i m a l v e r z e r r u n g von $2\omega_d = 31^\circ 25'$.

Da

$$a = \operatorname{tg}\left(45 + \frac{\omega}{2}\right), \qquad b = \operatorname{cotg}\left(45 + \frac{\omega}{2}\right)$$

ist, so ist die durchschnittliche große und kleine Achse der Indikatrix $a_d = 1{,}320$, $b_d = 0{,}758$, demnach die mittlere Längenverzerrung in Prozenten $+ 32{,}0\,\%$ und $- 24{,}2\,\%$.

Die Halbkugel wird bei dieser Projektion auch als Rechteck erscheinen, indem nur die geographische Länge halbiert wird. Der Wert der mittleren Verzerrung muß, da diese völlig unabhängig von der geographischen Länge ist, der gleiche geblieben sein, wenn auch das Verzerrungsdiagramm eine andere Gestalt erhält. Die nunmehr rasch sich erhebende Kurve gibt zu erkennen, daß die Projektion, für die Erdkugel zwar relativ günstig, jetzt für die Halbkugel, trotz des gleichen numerischen Betrages der mittleren Verzerrung, bei dem kleineren Gebiet wesentlich ungünstiger sich gestaltet.

b) Mit längentreuem Parallelkreis $\varphi = \alpha$.

Hatte die besprochene Projektion den Äquator längentreu dargestellt, die Flächentreue aber erlangt, indem die Gradfelder je näher dem Pol, desto mehr zusammengedrückt werden, so soll jetzt ein Parallelkreis ($\varphi = \alpha$) längentreu dargestellt werden und der Äquator die gleiche Länge dieses Breitenkreises $= 2 R \pi \cos \alpha$ erhalten. Um die Flächentreue zu erlangen, müssen die Gradfelder in der Richtung Nord-Süd von $\varphi = \alpha$ bis 90° zusammengedrückt werden, von $\varphi = 0°$ bis α aber auseinandergezogen werden. Der Abstand des Parallelkreises φ ist

$$h_\varphi = \frac{R \cdot \sin \varphi}{\cos \alpha}.$$

Die Verzerrungskurven sind wieder von λ unabhängig, also parallele Gerade zum Äquator. Auf dem längentreuen Parallelkreis α tritt die Verzerrung 0 ein. Die Verzerrung 2ω tritt zu beiden Seiten (φ_1, φ_2) dieses Breitenkreises auf und zwar wächst die Verzerrung polwärts bis 180°, äquatorwärts aber nur auf den Wert der Verzerrung des Äquators. Es ist für letzteren Fall 2ω zu berechnen aus

$$\cos \varphi_1 = \cos \alpha \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right),$$

für ersteren Fall

$$\cos \varphi_2 = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right)}.$$ [1]

Wir finden wieder die zu einer Winkelverzerrung gehörigen Breiten. Die Verzerrung des Äquators ist

---

[1]) Tissot, p. 100 $n = r_0 = \cos \alpha$. Die von Tissot angegebene „flächentreue Zylinderprojektion, welche für eine gegebene Zone kleinste Winkelverzerrungen verursacht“ kommt für uns nicht in Frage, da hier unter kleinster Winkelverzerrung $2\omega_{max}$ verstanden ist, aber nicht $2\omega_{d}$. Für alle flächentreuen Zylinderprojektionen der ganzen Erde aber ist $2\omega_{max} = 180°$, also für alle der gleiche konstante Wert.

$$2\,\omega = 4 \text{ arc tg} \frac{1}{\cos a} - \pi.$$

Die von einer Äquideformate eingeschlossene Fläche ist wieder ein Rechteck, resp. deren zwei, dessen eine Seite gleich dem Äquator $= 2\,R\pi \cos a$ ist. Die Höhe ist das Doppelte von h_{φ_2}, resp. von $(h_{\varphi_2} - h_{\varphi_1})$, wo

$$h_\varphi = \frac{R \cdot \sin \varphi}{\cos a}$$

ist, also

$$F = 4\,R^2\pi \sin \varphi_2, \text{ resp. } F = 4\,R^2\pi (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1).$$

Die Größe der eingeschlossenen Fläche wird in Tabelle I 2—7 geboten.

Auf Grund dieser Tabelle ergibt sich die Zeichnung der Verzerrungsdiagramme II—VII. Diese halten sich bis zum Verzerrungswert des Äquators in der Nähe der Abszissen-Achse, um dann plötzlich emporzuschnellen. Gleichzeitig sieht man den Einfluß der Verzerrungen der großen Äquatorzone mit wachsendem a. Es ergeben sich aus den Diagrammen die Werte der mittleren Maximalwinkelverzerrungen, die für Halbkugel uud Erdkugel identisch sind (siehe Tabelle I).

Da die mittlere Maximalwinkelverzerrung durch die mittlere Höhe des Verzerrungsdiagramms gemessen wird, aber Grundlinie und Höhe bei allen diesen Entwürfen gleich ist, so wird diejenige die günstigste sein, bei der das Diagramm eine möglichst kleine Fläche umschließt, sich möglichst dem rechten Winkel anschmiegt. Es tritt dies bei $a = 30^0$ ein. Und dies ist verständlich. Es legt sich eine Zone kleiner Verzerrungen zu beiden Seiten des Parallelkreises $a = 30^0$, sie wird also nördlich und südlich auf der Nord- und Südhalbkugel voll verwertet. Diese Zone tritt hier also zweimal auf, während sie bei der Projektion $(a = 0)$ mit längentreuem Äquator nur einmal ausgenutzt wird. Da die Projektionen im Pol $2\,\omega = 180^0$ haben, so werden in der Zone $\varphi = a$ bis 90^0 die Verzerrungen rasch von 0 bis 180^0 zunehmen. Wird a also sehr groß, so wird die günstige Zone nördlich (Südhalbkugel südlich) von a

sehr zusammengepreßt. Einerseits also kann das doppelte Auftreten der Zone kleiner Verzerrungen den Mittelwert günstig beeinflussen, andererseits aber wird mit dem Wachsen von α über eine bestimmte Grenze die Zone zu schmal, die Breitenausdehnung der ganzen Projektion ($2R \cdot \cos\alpha$) zu gering, die Verzerrung der großen Gradfelder am Äquator zu groß, so daß dann wieder eine Verschlechterung des Mittelwertes eintritt. Gleichzeitig eignet sich die Projektion, je größer α, um so weniger zur Darstellung der ganzen Erde, weil die Projektion seitlich zu sehr zusammengedrückt erscheint.[1])

Um uns zu orientieren, welche flächentreue Zylinderprojektion die beste ist, tragen wir die Verzerrungswerte mit wachsendem α auf. (Diagramm XVI.) Wir sehen, daß das Minimum der Kurve unmittelbar bei $\alpha = 30^0$ liegen muß, man also mit ausreichender Genauigkeit den vollen 30. Grad zum Schnittparallel der besten Zylinderprojektion wählen wird.

Es ist von den flächentreuen Zylinderprojektionen der Erd- und Halbkugel die Projektion, deren Zylinder die Erde im 30. Parallel durchdringt, die beste. (Karte II.) Bei ihr ist der Äquator $= R \cdot 5{,}4414$, der Meridian $= R \cdot 2{,}3094$; ihre äußere Umrißform erhält die Gestalt eines Rechteckes mit dem Seitenverhältnis 1 : 2,35. Die mittlere Maximalwinkelverzerrung ist $2\omega_d = 27^0\, 6'$.

B. Die unechten Zylinderprojektionen.

a) Die geradlinigen Projektionen.

Die erste Klasse dieser geradlinigen Projektionen, die die Meridiane im Pol zusammenlaufen lassen, wurde von Tissot[2]) behandelt. Diese Projektionen werden wegen der großen Winkelverzerrungen keine Bedeutung gewinnen können. Trotzdem aber schien mir eine Behandlung des bekannten Spezial-

---

[1]) Bei $\alpha = 55^0\, 39'$ ist die Umrißform der Erde ein Quadrat. Bei $\alpha = 60^0$ ist der Äquator schon auf die Hälfte reduziert $= R\pi$, der Meridian aber $= 4R$, also größer als der Äquator.

[2]) p. 108—110.

falles von Collignon, wo die Halbkugel als Quadrat dargestellt wird, wertvoll, um den Übergang zu anderen Projektionen klar zu erfassen.

Die Formel der Winkelverzerrung dieser Projektion ist nach Tissot

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos\frac{\delta}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - \sec^2\frac{\delta}{2}\right)^2 + \lambda^2},$$

wo $\delta = 90^0 - \varphi$ ist.

Die Zahlenwerte werden von Tissot nur für sehr wenige Punkte angegeben, sie mußten auf die ganze Erde ausgedehnt werden; Tabelle IV gibt diese Werte. Die nach ihr gezeichneten Verzerrungskurven (Karte III) zeigen deutlich das ungünstige Bild, das die Projektion bietet. Die Flächen innerhalb der Kurven sehr geringer Verzerrungen sind sehr klein; erst wenn man Verzerrungen bis 30^0 in den Kauf nehmen will, läßt sich ein etwas größeres Gebiet darstellen (113,7 Mill. qkm), die Lage des Gebietes aber längs des Meridians ist so ungünstig, daß die Karte zur Darstellung kaum eines Gebietes verwendbar ist. Erschwerend fällt noch die Knickung der Meridiane am Äquator ins Gewicht, die diesen zu einer Unstetigkeitslinie macht, in der die Verzerrungen größer sind, als sie die eingezeichneten Kurven angeben. Das gleiche Bild zeigt das auf Grund der Tabelle I 8 gezeichnete Diagramm VIII. Zwar ist der größtmögliche Wert der Verzerrung nur 103^0 44′, die Kurve aber entfernt sich derartig von der Abszissen-Achse, daß die mittlere Höhe, also die mittlere Maximalverzerrung, den nicht unbeträchlichen Wert von $2\,\omega_d = 55^0\,23'$ erhält, wobei die Unstetigkeit des Äquators nicht berücksichtigt werden konnte, durch die der Wert noch merklich in die Höhe gedrückt würde.

Würde man die Projektion zur Darstellung einer Halbkugel benutzen, so ergäbe sich die Gestalt eines Quadrats, das auf der Spitze steht. Die günstigsten Flächen der Projektion bis zur Kurve $2\,\omega = 50^0$ würden voll zur Darstellung kommen (vgl. Diagramm VIII und Tabelle II 8); trotzdem aber sinkt die

mittlere Maximalwinkelverzerrung nicht unter den Wert von $32^0\ 54'$, also einen Wert, der bei vielen Projektionen der ganzen Erde nicht einmal erreicht wird. Diese Projektion erweist sich also als völlig unbrauchbar.

Bei der allgemeinen flächentreuen Trapezprojektion tritt in der Formel für $\operatorname{tg}\omega$ an die Stelle von π der Ausdruck n^2, wo n den halben Mittelmeridian bedeutet. Der Punkt $2\omega = 0$, der Punkt ohne Winkelverzerrung, ergibt sich für $\frac{n}{\sqrt{2}} = \sec\frac{\delta}{2}$. Je größer also n wird, um so kleiner wird φ, um so näher wird der Punkt ohne Verzerrung an den Äquator rücken. Er fällt in den Äquator- und Mittelmeridian-Schnittpunkt im Falle $n = \frac{\sqrt{2}}{\cos 45^0} = 2$, also für den Fall, daß der Meridian $4R$, der Äquator $2R\pi$, also der Äquator längentreu dargestellt wird.

Eine nähere Untersuchung der Veränderung der mittleren Verzerrungen mit variierendem n dürfte sich bei der mühsamen Berechnung nicht lohnen; wenn auch durch geeignete Wahl des n wohl eine bessere Projektion als die Collignonsche zu erzielen wäre,[1]) so wird doch eine Trapezprojektion, schon wegen der Knickung der Meridiane, nicht mit anderen Projektionen konkurrieren können.

Dasselbe wird auch von der Eckertschen flächentreuen Trapezprojektion gelten, die er in Pet. Mitt. 1906, p. 97 ff. vorgeschlagen hat, wenn sie auch wesentlich besser als die Collignonsche Projektion ist. Wir müssen für sie die Formel für 2ω entwickeln.

Eckert zieht bei allen seinen Projektionen den Pol auseinander zu einer Linie gleich der Hälfte des Äquators. $ABCD$ (Fig. 1) ist die Nordhälfte der Projektionsfläche, wo $AB = \frac{1}{2} CD = b$ ist; $\operatorname{tg} \sphericalangle EBD = \operatorname{tg}\vartheta_1 = 1$.

---

[1]) Die beste Projektion wird den Nullpunkt der Verzerrung um ein Geringes polwärts verschieben müssen zur besseren Ausnutzung der guten Flächen. Es werden hier ähnliche Gesichtspunkte gelten, wie oben bei den flächentreuen Zylinderprojektionen.

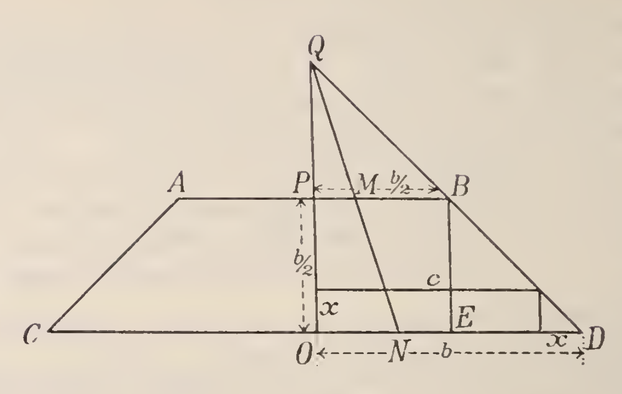


Fig. 1.

Es ist

$$b = R \cdot \sqrt{\frac{8\pi}{3}}.$$

Wir setzen

$$R = 1.$$

Ein Parallelkreis $2c$ und sein Abstand vom Äquator x bestimmt ein Flächenstück $(2b + 2c)\frac{x}{2}$, das wegen der Flächentreue der Projektion dem Kugelstreifen der Erde $2R\pi \sin\varphi$ gleich ist. Da aber $x = b - c$ ist, so wird

$$(b + c)(b - c) = 2\pi \sin\varphi,$$

also

$$c = \sqrt{b^2 - 2\pi \sin\varphi}.$$

Der Anstand eines Meridianschnittpunktes auf c vom Mittelmeridian ist

$$y = \frac{c \cdot \lambda}{\pi}.$$

Bei allen Projektionen ist die Längenverzerrung in der Richtung des Parallelkreises $K = \frac{\partial\tau}{\partial\lambda} \cdot \sec\varphi$,[1]) wo $\partial\tau$ ein kleiner

[1]) Tissot, p. 94.

Bogen des Parallelkreises in der Projektion, $\partial\lambda$ auf der Erde bedeutet. In unserem Falle einer geradlinigen Projektion ist

$$\frac{\partial\tau}{\partial\lambda} = \frac{y}{\lambda}, \quad \text{also} \quad K = \frac{y}{\lambda \cdot \cos\varphi};$$

alles eingesetzt ergibt

$$K = \frac{1}{\cos\varphi} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{4}{3} - \sin\varphi\right)}.$$

Alle Meridiane schneiden sich verlängert in der Entfernung b vom Äquator unter dem Winkel ϑ, wo $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{ON}{b} = \frac{\lambda}{\pi}$ ist. Im Grenzmeridian ist $\vartheta_1 = 45^0$.

Somit können wir, da wir K und ϑ als Funktionen von φ und λ kennen, 2ω nach der Tissotschen Formel[1]) für die flächentreuen Projektionen

$$\operatorname{tg}\omega = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(K - \frac{1}{K}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{K}\right)^2} \tag{1}$$

ausrechnen. Tabelle V gibt die Zahlenwerte, Karte IV die Bilder der Verzerrungskurven, wie sie auf Grund dieser Werte gezeichnet wurden. Wieder müssen wir von der Unstetigkeitslinie des Äquators absehen. Die Verzerrungen nehmen längs der Parallelkreise zu, um im Pol 180° zu betragen. Nicht so auf den Meridianen. Vom Äquator polwärts wachsen die Werte zuerst, dann aber verkleinern sie sich, um endlich schnell auf 180° zu wachsen. Der Verlauf der Kurven zeigt deutlich die Zwischenstufe dieser Projektion zwischen den flächentreuen Zylinder- und den flächentreuen Trapezprojektionen. Wie bei letzteren, haben wir hier nur zwei Punkte mit verschwindenden Verzerrungen, im Mittelmeridian gelegen. Der Verlauf der Kurven wird in der Nähe des Äquators durch die schiefschnittigen Meridiane, wie bei den Trapezprojektionen,

---

[1]) p. 93.

in der Nähe des Poles durch die dessen Ausdehnung wie bei den flächentreuen Zylinderprojektionen bedingt. Da der Nullpunkt der Verzerrung sehr nördlich, also in der gemäßigten Zone liegt, die Flächen geringer Verzerrungen aber längs eines Meridians verlaufen, so kann diese Projektion höchstens zur Darstellung von Gebieten, wie etwa Amerika oder des Atlantischen Ozeans in Frage kommen, wenn schnell durch gerade Linien Flächentreue erstrebt wird. Für die Darstellung der Erde ist sie nicht geeignet, wie das Diagramm IX lehrt, das auf Grund der Tabelle I 9 gezeichnet wurde. Es ähnelt in seinem Verlauf dem der flächentreuen Zylinderprojektion für $a = 50^0$. Die Fläche sehr kleiner und sehr großer Verzerrungen ist gering, dagegen ist die Fläche mittlerer Verzerrungen von 20^0—50^0 sehr groß, dementsprechend auch der Wert der mittleren Maximalwinkelverzerrung $2\,\omega_d = 38^0\,18'$.

Ebensowenig ist die Projektion zur Darstellung der Halbkugel zu verwenden, sollte nicht schnelle Zeichnung verlangt werden. Dann aber erreicht man dieselbe Genauigkeit mit einer flächentreuen Zylinderprojektion für $a = 30^0$, denn bei beiden ist $2\,\omega_d$ etwa 27^0 (hier genauer $27^0\,11'$, Tabelle II 9), bei ihr würde man außer der noch leichteren Zeichnung die Knickung der Meridiane vermeiden. Die Kurve $2\,\omega = 30^0$ fällt bei Eckert schon nicht völlig mehr in das Halbkugelbild, während andererseits auf der ganzen Pollinie $2\,\omega = 180^0$ ist, daher große Verzerrungen in der Nähe des Pols auftreten.

Der von Eckert herausgegriffene Fall ist natürlich nur ein Spezialfall aller denkbaren geradlinigen Projektionen, die dadurch entstehen, daß die Pollinie zwischen 0 und der Größe des Äquators variiert, also gleich $m \cdot 2\,b$ wird. Von dem Werte m hängt die Gestalt der Projektion ab; gleichzeitig müssen wir die Länge des Äquators $= 2\,b$ als gegeben betrachten. Die Wahl von b und m bestimmt die Projektion eindeutig. Wir wollen auch für diesen allgemeinsten Fall der geradlinigen Projektionen die Verzerrungsformel geben, die ganz analog derjenigen der Eckertschen Trapezprojektion entwickelt wird.

Es wird ($R = 1$) der Abstand des Pols vom Äquator:

$$h = \frac{2\pi}{b \cdot (1 + m)},$$

der Abstand eines Parallelkreises:

$$x = \frac{2\pi}{b \cdot (1 - m^2)} \cdot (1 - \sqrt{1 - \sin\varphi \cdot (1 - m^2)}),$$

der Abstand eines Meridians vom Mittelmeridian auf diesem Parallelkreis:

$$y = \frac{b \cdot \lambda}{\pi} \cdot \sqrt{1 - \sin\varphi \cdot (1 - m^2)}.$$

Endlich die Formel der Winkelverzerrung $2\,\omega$ wie oben (1), wo jetzt

$$K = \frac{b}{\pi \cdot \cos\varphi} \cdot \sqrt{1 - \sin\varphi (1 - m^2)}$$

und

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{b^2 \cdot (1 - m^2)}{\pi}$$

ist.

Aus dieser allgemeinen Formel der geradlinigen Projektionen ergeben sich die behandelten als Spezialfälle. Man erhält die Eckertsche Trapezprojektion für $m = \frac{1}{2}$; $b = \sqrt{\frac{8\pi}{3}}$, die allgemeine Trapezprojektion für $m = 0$, $b = \frac{2\pi}{n}$, die wieder durch Wahl von $n = \sqrt{\pi}$, also $b = 2 \cdot \sqrt{\pi}$ in die Collignonsche, durch Wahl von $n = 2$, $b = \pi$ in die Trapezprojektion mit längentreuem Äquator übergeht. Endlich resultiert für $m = 1$, $b = \pi \cdot \cos\alpha$ die allgemeine flächentreue Zylinderprojektion und für $\alpha = 0$ die Lambertsche flächentreue Zylinderprojektion mit längentreuem Äquator.

b) Die Projektionen mit Sinuslinien als Meridiane.

Von den unechten Zylinderprojektionen ist die Projektion, deren Meridiane im Pol sich schneidende Sinuslinien sind, also

der bekannte Spezialfall der Bonneschen Projektion, wo der Berührungskegel im Äquator zum Zylinder wird, der gewöhnlich unter dem Namen „Sanson-Flamsteedsche Projektion“ angeführt wird, genügend untersucht. Die Debatte um die beste Darstellung Afrikas hat die Unbrauchbarkeit dieser Projektion selbst in diesen ihr am besten entsprechenden Gebieten erwiesen. Die Verzerrungsformel[1]) für sie

$$\operatorname{tg} \omega = \tfrac{1}{2} \lambda \sin \varphi$$

ist sehr einfach. Zöppritz-Bludau[2]) gibt die Werte der Verzerrungen von 5° zu 5° für den ersten Quadranten. Da es uns aber auf die Darstellung der ganzen Erde ankommt, müssen wir die Werte für den zweiten Quadranten (Tabelle VI) entsprechend unseren anderen Tabellen nachliefern.

Das Bild der Verzerrungskurven (Karte V) ist bekannt. Die Flächen geringer Verzerrung, die wie Tabelle I 10 lehrt, ziemlich groß sind, leiden an der Kreuzform, durch welche die günstigsten Gebiete längs des Äquators und Mittelmeridian zu liegen kommen, also in Gebieten, die wohl niemals kartographisch aus dem Gesamtbild herausgeschnitten werden. Das Verzerrungsdiagramm X, welches das gleichmäßige Anwachsen der Verzerrungen durch seinen regelmäßigen Verlauf anzeigt, ergibt die mittlere Maximalverzerrung $2\omega_d = 38^0 40'$ für die Erdkugel, $21^0 25'$ für die Halbkugel.

Die Eckertsche Projektion mit Sinuslinien als Meridianen.

Eckert hat l. c. eine zweite Projektion angegeben, bei der ebenso, wie bei seiner Trapezprojektion und seiner Ellipsenprojektion, der Pol zur Hälfte der Äquatorlänge ausgedehnt wird, außerdem der Mittelmeridian gleich der halben Äquatorlänge wird. Der Grenzmeridian ist eine Sinuskurve, die anderen Meridiane sind ebenfalls Sinuskurven, die durch Teilung der Parallelkreise in gleiche Teile entstehen. Eckert weist nach,

[1]) Tissot, p. 113.

[2]) l. c., p. 148.

daß diese Projektion die Abbildung eines halben Kreisringes[1]) ist. Er selbst hält sie für die beste seiner Projektionen, ohne allerdings scharf seine Anschauung begründen zu können, und führt sie daher in seinem neuen geographischen Praktikum besonders an.[2]) Wir wollen ihren Wert an der Hand der Winkelverzerrungen prüfen. Die Formeln gewinnen wir aus den bei Eckert sich findenden Angaben ($R = 1$) für die Koordinaten der Gradnetzpunkte. Es ist:

$$x = r \cdot a$$

$$y = \lambda \cdot r \cdot \cos^2 \frac{a}{2}; \quad y_{180} = r \cdot \pi \cdot \cos^2 \frac{a}{2},$$

wo

$$r = \frac{2}{\sqrt{\pi + 2}}$$

ist.

a ist eine Funktion von φ und mit φ durch die Gleichung

$$\sin \varphi = \frac{2}{\pi + 2} \cdot (a + \sin a)$$

verbunden und von Eckert tabuliert.

Wir suchen wieder K und ϑ (s. o.) zu bestimmen. Bei den geradlinigen parallelen Breitenkreisen ist wieder wie oben:

$$K = \frac{y}{\lambda \cdot \cos \varphi} = \frac{2}{\sqrt{\pi + 2}} \cdot \frac{\cos^2 \frac{a}{2}}{\cos \varphi}.$$

---

[1]) Der Ausdruck „Kreisringprojektion" dürfte sich mehr empfehlen als der, auch von ihm gebrauchte, „Polarogkoid".

[2]) Gegr. Prakt. für den Gebrauch in den geographischen Übungen an Hochschulen von O. Krümmel und M. Eckert. Leipzig 1908.

Wenn er sie mit der Sanson-Flamsteedschen Projektion vergleicht und behauptet (Pet. Mitt. 1906, p. 107): „Die Randkurve 180° Ö. u. W. hat noch nicht die Winkelverzerrung des 90° Ö. u. W. bei Sanson", so meint er damit die Verzerrungen des Schnittwinkels der Meridiane und Parallelkreise. Diese sind aber durchaus nicht identisch mit 2ω, der größten Verzerrung an diesem Punkte. Vielmehr ist z. B. für $\varphi = 80^0$, bei Sanson $\lambda = 90^0$, $2\omega = 75^0 26'$, bei Eckert $\lambda = 180^0$, $2\omega = 98^0 41'$. Man sieht, daß der Satz in dieser Allgemeinheit unrichtig ist, wenn auch nicht gezweifelt werden kann, daß die Projektion die Sansonsche bei weitem überragt; s. u.

Bei allen unechtzylindrischen Abbildungen ist:[1])

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}},$$

also:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\frac{\partial y}{\partial a}\cdot\frac{da}{d\varphi}}{\frac{dx}{da}\cdot\frac{da}{d\varphi}} = \frac{\frac{1}{2}\lambda r\cdot\sin a\,\frac{da}{d\varphi}}{r\cdot\frac{da}{d\varphi}},$$

$$\operatorname{tg}\vartheta = \tfrac{1}{2}\lambda\cdot\sin a.$$

Da wir jetzt K und ϑ als Funktionen von φ, λ und a, a aber als Funktion von φ kennen, können wir $2\,\omega$ ausrechnen nach der Formel (1):

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\left(K-\frac{1}{K}\right)^2+\left(\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{K}\right)^2}.$$

Hieraus ergibt sich Tabelle VII.

Nicht so deutlich wie bei den anderen Eckertschen Projektionen zeigen die Äquideformaten (Karte VI) die Zwischenstufe dieser Projektion zwischen der flächentreuen Zylinder- und der Sansonschen Projektion. Die Zone kleinster Verzerrung ist zusammengeschrumpft in ein Oval, das in der Nähe des 50° auf dem Mittelmeridian liegt. Zum Pol nehmen die Verzerrungen rasch bis 180°, zum Äquator langsam bis 14° 21′ zu. Auf dem Äquator und der Pollinie haben wir konstante Werte von $2\,\omega$, auf den anderen Parallelkreisen wachsen sie vom Mittelmeridian mit zunehmenden λ. Man sieht, daß sich beträchtliche Flächen der Erde mit Verzerrungen unter 30°, ja schon unter 20° darstellen lassen, wenn auch die scharfe Knickung der Kurve $2\,\omega = 20°$ störend das Bild einengt. Die Größe der eingeschlossenen Flächen gibt Tabelle I 11.

---

[1]) Tissot, p. 105. — Es ist hier das partielle Differential zu nehmen, weil $y = f(\varphi, \lambda)$, während x nur $= f(\varphi)$ ist.

Das Verzerrungsdiagramm XI hält sich in mäßiger Entfernung von der Abszissenachse, um erst bei Verzerrungen über 70° rasch emporzusteigen. Die mittlere Verzerrung ist 32° 19′. Die Eckertsche Behauptung trifft also voll zu. Diese neue Projektion übertrifft die Sanson-Flamsteedsche weit, trotzdem hier nur zwei Punkte, dort aber das Hauptachsenkreuz des Entwurfes ohne Verzerrungen sind.

Umgekehrt allerdings wird die Sachlage, wenn wir nicht die volle Erdkugel, sondern nur die Halbkugel zur Darstellung bringen. Bei Eckert wird hier $2\,\omega_{\max} = 180°$, während bei Sanson nur $2\,\omega_{\max} = 76°\,18'$ vorkommt. Wenn auch die Flächen übertrieben großer Verzerrungen bei Eckert sehr klein sind, so beeinflussen sie jetzt doch derart den Mittelwert, daß für die Halbkugeldarstellung Sanson bessere Resultate bietet als Eckert ($2\,\omega_d = 21°\,25'$ resp. $24°\,23'$). Immerhin wird wegen der unschönen Umrißfigur wohl ernstlich keine der beiden in Frage kommen, zumal wir bessere Projektionen der Halbkugel besitzen (s. u.).

c) Die unechtzylindrischen Projektionen mit Ellipsen als Meridianen.

Unter den flächentreuen unechtzylindrischen Projektionen genießt am meisten Ansehen die Projektion Mollweides.[1]) Wie bei einem unechtzylindrischen Entwurf werden die Parallelkreise naturgemäß als parallele Geraden dargestellt, während die Meridiane Ellipsen sein sollen. Tissot behandelt sie als Spezialfall der unendlich vielen Projektionen dieser Art, der dadurch erzielt wird, daß die Halbkugel als Kreis abgebildet wird. Der Abstand der Geraden regelt sich durch die Bedingung der Flächentreue. Die von ihm entwickelten Verzerrungsgesetze geben für K (s. o.) den Ausdruck:

[1]) So sagt Emmanuel de Martonne in seiner soeben erschienenen Traité de Géographie physique, Paris 1909 auf p. 69, wo er nach einer nicht sehr tiefgehenden Behandlung der Projektionen von der Choix des projections spricht: „La meilleure projetcion pour la planisphère est celle de Mollweide“.

$$K = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sec \varphi \cdot \cos \varphi',$$

wo φ' der der Breite φ entsprechende Zentriwinkel in der Projektion und mit φ durch die Formel

$$2\varphi' + \sin 2\varphi' = \pi \sin \varphi$$

verbunden ist. φ' findet man in allen Projektionswerken tabuliert. Für den Winkel ϑ ergibt sich die Formel:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{2}{\pi} \operatorname{tg} \varphi' \cdot \lambda.$$

Es sind φ', K und ϑ als Funktionen von φ und λ bekannt, also kann wieder nach Formel (1)

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{2} \sqrt{\left(K - \frac{1}{K}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{tg} \vartheta}{K}\right)^2}$$

die Winkelverzerrung ermittelt werden. Die von Tissot ausgerechnete Tabelle[1]) genügt nicht zur Zeichnung der Kurven. Tabelle VIII muß an ihre Stelle treten. Das Kurvenbild (Karte VII) ähnelt dem der Eckertschen Sinuskurven-Projektion, ist aber insofern etwas günstiger, weil die Flächen kleiner Verzerrung (s. Tabelle I 12) ausgedehnter sind als dort. Dagegen macht sich das Zusammenrücken sämtlicher Meridiane zum Pol in großen Winkelverzerrungen in hohen Breiten und Längen bemerkbar, so daß der Wert der mittleren Maximalwinkelverzerrung $2\,\omega_d = 32^0\,7'$ (s. Diagramm XII) die Eckertsche Projektion nur wenig übertrifft.

Für die Halbkugel ist das gleiche wie bei Eckert zu sagen, denn auch hier werden alle Flächen, deren Verzerrungen größer sind als die des Äquators, seitlich kupiert. Sanson übertrifft für die Halbkugel nicht nur Eckert, sondern auch Mollweide ($2\,\omega_d = 22^0\,2'$), wenn man auch wegen der Kreisform des Randmeridians Mollweide vorziehen wird.

Eckertsche Ellipsenprojektion. Da bei Mollweide die Verzerrungswerte auf allen Meridianen im Grenzwert 180°

---

[1]) l. c., Tafel XIII.

erreichen, was bei Sanson, Collignon und Hammer (s. u.) nicht der Fall ist, — bilden doch hier die Meridiane völlig geschlossene Ellipsen — so ist vorauszusehen, daß, wenn wieder der Pol nach Eckerts Methode zur halben Äquatorlänge ausgedehnt wird, der Pol dadurch also keine größeren Verzerrungen erhält, die Projektion eine günstige Abänderung erfährt. Zwar sehen wir die Stellen geringer Verzerrung seitlich zusammengedrückt (Karte VIII), zwar erhöht sich der Wert der Verzerrung am Äquator von 12° 1′ bei Mollweide auf 19° 16′ bei Eckert, die Fläche aber mit mäßigen Verzerrungen unter 20° resp. unter 30° übertrifft durch die Änderung (Tabelle I 13) die bei Mollweide um 46 Mill., resp. um 60 Mill. qkm. So resultiert ein günstiger Mittelwert.

Die Formel für 2ω gewinnt man analog, wie bei den anderen Eckertschen Projektionen, indem man für Formel (1) die Ausdrücke K und ϑ berechnet. Eckert entwickelt die Werte der Gradnetzkoordinaten:

$$x = a \sin \sigma$$

$$y = \frac{\lambda \cdot a \cdot (1 + \cos \sigma)}{\pi},$$

wo

$$a = \sqrt{\frac{4\pi}{4+\pi}}$$

ist, wo ferner σ als Funktion von φ bekannt und tabuliert ist nach der Gleichung:

$$(\pi + 4) \sin \varphi = 2\sigma + 4 \sin \sigma + \sin 2\sigma.$$

Aus dem allgemeinen Ausdruck $K = \frac{y}{\lambda \cdot \cos \varphi}$ folgt:

$$K = \frac{4}{\sqrt{\pi \cdot (4 + \pi)}} \cdot \frac{\cos^2 \frac{\sigma}{2}}{\cos \varphi}.$$

Es ließe sich ϑ durch die Differentiationsformel (s. oben) finden. Da aber alle im Schnittpunkt der Parallelkreise an die Meridiane gelegten Tangenten sich hier, wie bei Mollweide,

in einem Punkt des verlängerten Mittelmeridians und zwar unter dem Winkel ϑ schneiden, so ist einfach durch Proportion:

$$\operatorname{tg}\vartheta : \operatorname{tg}\vartheta_{180} = y : y_{180}; \quad \vartheta_{180} = \sigma; \quad y_{180} = a \cdot (1 + \cos\sigma),[1]$$

also:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\operatorname{tg}\sigma \cdot \lambda}{\pi}.$$

Es ist mithin σ, ϑ und K als Funktion von φ und λ gegeben und somit $2\,\omega$ zu berechnen. (Tabelle IX.) Das Verzerrungsdiagramm XIII schmiegt sich in günstiger Weise dem rechten Winkel der Abszissen- und Ordinatenachse an, die Fläche ist somit klein, die mittlere Verzerrung hat das überaus günstige Resultat $2\,\omega_d = 27^0\,34'$. Es ist somit von den Eckertschen Projektionen die Ellipsenprojektion die beste und nicht, wie er annimmt, der Entwurf mit den Sinuskurven. Alle drei aber stellen sich wesentlich besser als die Projektionen, von denen sie abgeleitet sind.

Es läßt sich bei der Eckertschen Projektion der gleiche Gedankengang fortsetzen, den ich für die geradlinigen Projektionen durchführte. Durch Variation der Länge der Pollinie kann man wieder unendlich viele flächentreue Entwürfe ersinnen. Ja, es ist denkbar, daß sich durch geeignete Wahl ein noch günstigeres Endresultat ersinnen läßt. Das aber ist festzuhalten: Will man künftighin Projektionen in Vorschlag bringen, so hat man zu erweisen, daß bei ihnen der Mittelwert der Verzerrungen sich geringer darstellt als bei der besten bis jetzt bekannten Projektion. Nicht vermehren, nein vermindern muß man die Unzahl der Entwurfsarten.

C. Die flächentreue Azimutalprojektion und ihre Abwandlung.

Da es uns nur darauf ankommt, brauchbare Projektionen der ganzen Erdoberfläche zu untersuchen (wir fügen die Projektionen der Halbkugel nur hinzu, um sofort die Veränderung

[1]) Siehe die Figur bei Eckert.

von $2\omega_d$ mit Veränderung des Projektionsgebietes vor Augen zu führen), so werden wir sämtliche Kegelprojektionen, die echten, wie die unechten, ja auch den Grenzfall der Stab-Wernerschen Projektion aus unserer Betrachtung ausschließen. Denn bei sämtlichen Darstellungen der ganzen Erde wird als erstes Erfordernis gelten müssen, daß der Äquator und der Mittelmeridian oder jedenfalls zwei Großkreise als Symmetrielinien in der Projektion auftreten. Stellt man sich auf den Standpunkt, daß die Halbkugeln der Erde gleichwertig für die Darstellung sind, so können nur die behandelten und noch zu behandelnden Entwürfe, wo der Hauptpunkt der Projektion zusammenfällt mit dem Schnitt von Meridian und Äquator, in Frage kommen. Denkbar ist noch der Fall, daß ein Ort oder eine Gegend aus irgendwelchen Rücksichten (vgl. Handels- und Wirtschaftsgeographie) zum Zentrum der Erdoberfläche genommen würde. Nie wird ein ganzer Parallelkreis dies Interesse beanspruchen, nie wird eine Kegelprojektion mit ihrer asymmetrischen Randkurve für die Süd- und Nordhalbkugel, die den oder die Parallelkreise ohne Verzerrung noch dazu gekrümmt darstellen, ein befriedigendes Abbild der ganzen Erde geben.[1]) So lehrreich die Bilder der Verzerrungskurven für Einzelgebiete[2]) sind, so werden wir doch bei unserem Gedankengang darauf verzichten können.

Ebensowenig können uns Spekulationen wie die ringförmigen flächentreuen Azimutalprojektionen, die von Tissot; p. 131, behandelt werden, aufhalten; sagt er doch selbst: „Der günstigste Fall ist die eigentliche flächentreue Azimutalprojektion.“

Diese ist eben die einzig mögliche Azimutalprojektion, die Flächentreue mit zusammenhängender Darstellung ver-

---

[1]) Nur für Untersuchungen, die einzelne Gebiete mit größerem Gewicht im Sinne Hammers (s. o.) in Rechnung bringen wollen, könnten die Darstellungen vielleicht in Frage kommen, die einem bestimmten Parallelkreis die Verzerrung 0 geben zu Ungunsten der Gebiete der entgegengesetzten Halbkugel.

[2]) Vgl. Zöppritz-Bludau, p. 121 für die Bonnesche Projektion.

bindet. Bei ihr sind die Äquideformaten naturgemäß Kreise, da die Verzerrungen nicht vom Azimut abhängen, sondern durch das Zusammenrücken der konzentrischen Kreise mit der Entfernung vom Hauptpunkt hervorgerufen werden. (Karte IX.) Der Radius der Verzerrungskurven ist $(R = 1)$ $\varrho = 2 \sin \frac{\delta}{2}$, wo δ zu bestimmen ist aus der Formel:

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}},$$

wenn wir für 2ω die Werte 10°, 20° u. s. w. einsetzen.[1]) Also der Inhalt $4\pi \sin^2 \frac{\delta}{2}$. Tabelle I 14.

Die Projektion hat bis $\delta = 90°$ mäßige Verzerrungen, dann aber wachsen sie beträchtlich; werden doch die in Wahrheit wieder abnehmenden Kreise zu immer größeren Kreisen ausgedehnt, so daß dem Nadirpunkt der größte Kreis entspricht. Das gleiche Bild zeigt das Verzerrungsdiagramm XIV, ja die großen Verzerrungen wirken so ungünstig, daß der Mittelwert der Verzerrung $2\omega_d = \mathbf{49° 40'}$ den Entwurf nicht mit anderen in Konkurrenz treten läßt. Dagegen ist der Mittelwert der Halbkugeldarstellung (Tabelle II 14) nur $2\omega_d = 18° 0'$, da die Flächen geringerer Verzerrung groß sind und ein Maximalwert der Verzerrungen von nur 38° 57′ vorliegt. Für die Halbkugel ist die Lambertsche Azimutalprojektion die günstigste; sie ist sowohl die Projektion mit der geringsten durchschnittlichen Maximalwinkelverzerrung $2\omega_d$ als auch mit dem geringsten Maximalwert der Verzerrung $2\omega_{max}$. Beides trifft bei der Halbkugeldarstellung nur für eine einzige Projektion ein, während bei der Erddarstellung verschiedene Entwürfe diesen geringsten Werten entsprechen.

Gehen wir endlich zu der Abänderung der Azimutalprojektion über, die wohl den Namen Hammers verdient.[2])

[1]) Tissot, p. 130.
[2]) Pet. Mitt. 1892, p. 86.

Sie entsteht aus der soeben besprochenen Projektion, indem man diese unter einem Winkel von 45° dreht und durch Parallelstrahlen die Projektion wieder auf die Ebene projiziert, dann aber, zur Wahrung der Flächentreue, die Meridiane doppelt numeriert.

Wir suchen die Koordinaten des Punktes φ, λ als Funktionen dieser Größen. Der Punkt φ, λ der Erdkugel habe die Polarkoordinaten ψ, δ, so ist:

$$\cos\delta = \cos\lambda \cdot \cos\varphi$$

$$\sin\psi = \frac{\sin\lambda \cdot \cos\varphi}{\sin\delta} = \frac{\sin\lambda\cos\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\lambda\cos^2\varphi}}.$$

Bei der flächentreuen Azimutalprojektion ist die Entfernung des Punktes $x_1 y_1$ (Fig. 2) vom Mittelpunkt:

$$r_1 = 2R\cdot\sin\frac{\delta}{2} = 2R\cdot\sqrt{\frac{1-\cos\varphi\cos\lambda}{2}}.$$

Die Koordinaten der azimutalen Projektion sind

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= r_1\cos\psi \\ y_1 &= r_1\sin\psi \end{aligned}\right\};$$ eingesetzt und umgeformt ergibt:

$$x_1 = \frac{2R\sin\varphi}{\sqrt{2+2\cos\lambda\cos\varphi}}$$

$$y_1 = \frac{2R\cdot\sin\lambda\cos\varphi}{\sqrt{2+2\cos\lambda\cos\varphi}}.$$

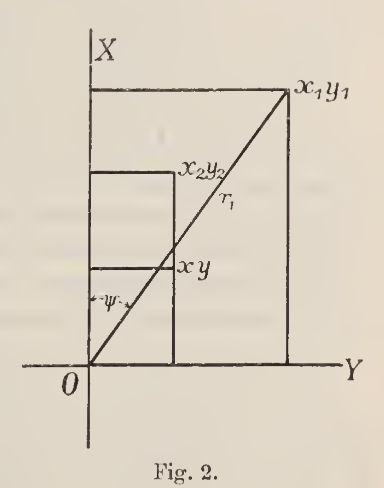


Fig. 2.

Wir zerlegen die doppelte Verwandlung der Projektion in die beiden Einzelhandlungen. Die „doppelte Numerierung“ der geographischen Länge bedeutet, daß ein Projektionspunkt φ, λ bei Hammer dem Punkt φ, $\frac{\lambda}{2}$ bei Lambert entspricht. Es wird also für ihn:

$$x_2 = \frac{2\,R \sin\varphi}{\sqrt{2 + 2\cos\frac{\lambda}{2}\cos\varphi}}; \quad y_2 = \frac{2\,R \cdot \sin\frac{\lambda}{2}\cos\varphi}{\sqrt{2 + 2\cos\frac{\lambda}{2}\cos\varphi}}.$$

Die Drehung der Projektion um 45° um den Äquator als Achse und erneutes Projizieren auf die Ebene bedeutet nur ein Halbieren der Ordinate. Es werden also die Koordinaten der Hammerschen Projektion:

$$x = \frac{x_2}{2}, \quad y = y_2,$$

somit:

$$x = \frac{R \cdot \sin\varphi}{\sqrt{2 + 2\cos\frac{\lambda}{2}\cos\varphi}}; \quad y = \frac{2\,R \sin\frac{\lambda}{2}\cos\varphi}{\sqrt{2 + 2\cos\frac{\lambda}{2}\cos\varphi}}.$$

Wir setzen wieder $R = 1$ und entwickeln die Formel für $2\,\omega$ nach der von Tissot, p. 196 angegebenen Formel für den allgemeinsten Fall einer Kartenprojektion:

$$\sin\omega = \frac{a - b}{a + b},$$

wo:

$$a - b = \left[\frac{1}{R}\frac{\partial x}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right]^2 + \left[\frac{1}{R}\frac{\partial y}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right]^2$$

$$a + b = \left[\frac{1}{R}\frac{\partial x}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right]^2 + \left[\frac{1}{R}\frac{\partial y}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right]^2$$

(R, der Krümmungshalbmesser des Meridians, r, der des Parallelkreises werden in unserem Fall einer Kugel $R = 1$, $r = \cos\varphi$).

Differentieren wir unsere Werte von x und y partiell nach φ und λ, setzen die Werte ein und formen um, so erhalten wir die Formel für die Maximalwinkelverzerrung:

$$\sin\omega =$$

$$\sqrt{\frac{\left(\cos\varphi - \cos\frac{\lambda}{2}\right)^2 \cdot \left(1 + \cos\varphi\cos\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \sin^2\varphi\sin^2\frac{\lambda}{2} \cdot \left(2\cos\varphi\cos\frac{\lambda}{2} + 3{,}5\right)^2}{\left(\cos\varphi + \cos\frac{\lambda}{2}\right)^2 \cdot \left(3 + \cos\varphi\cos\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \sin^2\varphi\sin^2\frac{\lambda}{2} \cdot \left(2\cos\varphi\cos\frac{\lambda}{2} + 4{,}5\right)^2}}.$$

Diese Formel wurde zur Berechnung der Verzerrungstabelle X benutzt, die dadurch wesentlich vereinfacht wird, daß der Wert von 2ω an der Stelle $\varphi = a$, $\lambda = b$ und $\varphi = \frac{b}{2}$, $\lambda = 2a$ identisch ist.

Es ergibt sich, daß die Verzerrungen mit wachsenden λ und φ zunehmen, um für die Erdkugel den Höchstwert von $102^0\,6'$, für die Halbkugel von $84^0\,36'$ zu erreichen. Für die Erdkugel ist die Hammersche Projektion diejenige, die den kleinsten Wert $2\omega_{max}$ aufweist. Die Verzerrung 0 tritt nur für den Mittelpunkt des Entwurfes ein; die günstigsten Flächen liegen in seiner Nähe. Die entworfenen Äquideformaten (Karte X) sind nicht mehr die Kreise der Azimutalprojektion, vielmehr werden sie in der Richtung der Symmetrieachse der Werte von 2ω $\left(\text{also } \varphi = \frac{\lambda}{2}\right)$ zusammengedrückt. Die Flächen innerhalb der günstigen Verzerrungskurven (Tabelle I 15) sind nicht sehr groß, vielmehr steigt das Verzerrungsdiagramm XV in fast regelmäßiger Weise bis zum Maximalwert. Daher ist die mittlere Maximalwinkelverzerrung $2\omega_d = 37^0\,25'$ nicht die geringste. Man würde also falsch urteilen, wollte man aus der relativ guten Rechtschnittigkeit der Projektion auf einen spezifischen Wert der Abbildungsart schließen. Hammers Urteil: „Die Vergleichung mit dem Mollweideschen Entwurf zeigt, daß in der Tat in der neuen Abbildung eine etwas kleinere Gesamt- und Durchschnittswinkelverzerrung vorhanden ist als in jener“, ist in dem Punkt der mittleren Winkelverzerrung zu rektifizieren. (Mollweide $2\omega_d = 32^0\,7'$.) Die Überlegenheit des Mollweideschen Entwurfes kommt wohl vornehmlich durch die geringen Verzerrungen des Äquators zustande, die bei Mollweide bis zum Rande den konstanten Wert 2ω von $12^0\,1'$ haben, während bei Hammer 2ω von 0 bis $38^0\,56'$ wächst; entsprechend verhalten sich die Nachbargebiete.

Für das Halbkugelbild, das aber bei Hammer nicht wie bei Mollweide von einem Kreis umschlossen wird, resultiert ein besserer Wert (Hammer $2\omega_d = 19^0\,37'$, Mollweide $2\omega_d$

$= 22^0\,2'$), weil hier die Partien geringster Verzerrung um den Projektionsmittelpunkt günstig einwirken; ist doch die Verzerrung im Äquator am Rande des Halbkreises ($\varphi = 0$, $\lambda = 90$) erst $2\,\omega = 9^0\,4'$.

Zusammenfassung.

I. Die beste flächentreue Projektion der ganzen Erdkugel.

Überblicken wir kurz die gewonnenen Resultate, so ist es erforderlich, noch einmal darauf hinzuweisen, daß durch die Untersuchungsmethoden eine nicht unbeträchtliche Anzahl von Fehlern den Ergebnissen anhaften muß. Hoffen wir, daß die Tabellen möglichst fehlerfrei berechnet sind, was der stetige Verlauf der Kurven in etwas verbürgt, so liegt in dem Ziehen der Kurven durch Interpolation zwischen den berechneten Werten schon eine geringe Willkürlichkeit, die sich wiederholt beim Zeichnen der Verzerrungsdiagramme. Durch das Planimetrieren der Kurven und Diagramme stellen sich neue Fehler ein. Ein Abschätzen der Größe dieser Fehler ist unmöglich.[1]) Es wurden die Resultate der mittleren Maximalwinkelverzerrung bis auf Minuten genau gegeben in der Annahme, daß die negativen Fehler die positiven aufheben.

Wir hatten postuliert, daß bei den flächentreuen Projektionen nur die Größe der mittleren Maximalwinkelverzerrung

[1]) Um die Fehler einzuschränken, wurde die Zeichnung der Kurven sowohl, wie der Diagramme in sehr großem Maßstab 1 : 66,666 Mill. ausgeführt. Da die Kurven stetige Linienzüge sind, so ist die Größe des Planimeterfehlers sehr gering; sowohl der der Planimeterkonstante, die stets von neuem aus der ganzen Erdfläche bestimmt wurde, als der Beobachtungsfehler beim Umfahren der Flächen. Die größten Fehler werden durch die Zeichnung der Diagramme entstehen; hier ist erstlich das Millimeterpapier nicht absolut zuverlässig, zweitens ist der Kurvenzug nicht immer eine stetige Linie, daher die Interpolation erschwert und drittens wird gerade durch diese Unstetigkeit beim Umfahren der Fläche die größere Ungenauigkeit eintreten.

über den Wert oder Unwert der Projektion entscheiden kann. Erst in zweiter Linie kommen andere Gesichtspunkte in Frage. Betrachten wir zuerst die Darstellungen der ganzen Erde und schreiben also die Projektionen in der Reihenfolge ihrer Güte, so folgt:

		$2\,\omega_d$
1.	Flächentreue Zylinderprojektion für $a = 30^0$	$27^0\,6'$
2.	Eckerts Ellipsenprojektion	$27^0\,34'$
3.	Flächentreue Zylinderprojektion für $a = 20^0$	$28^0\,5'$
4.	„ „ „ $a = 40^0$	$29^0\,46'$
5.	„ „ „ $a = 10^0$	$29^0\,51'$
6.	„ „ „ $a = 0^0$	$31^0\,25'$
7.	Mollweides Projektion	$32^0\,7'$
8.	Eckerts Sinuslinienprojektion. . . .	$32^0\,19'$
9.	Hammers Projektion	$37^0\,34'$
10.	Eckerts Trapezprojektion	$38^0\,18'$
11.	Sanson-Flamsteeds Projektion . . .	$38^0\,40'$
12.	Flächentreue Zylinderprojektion für $a = 50^0$	$38^0\,40'$
13.	Lamberts Azimutalprojektion . . .	$49^0\,40'$
14.	Flächentreue Zylinderprojektion für $a = 60^0$	$55^0\,1'$
15.	Collignons Trapezprojektion	$55^0\,23'$.

Wie stellen sich nun diese Projektionen im praktischen Gebrauche?

1. Die beste Projektion, die flächentreue Zylinderprojektion für $a = 30^0$, also auf dem Zylinder, der die Erde im dreißigsten Parallelkreis durchdringt, hat eine gute äußere Form, ein Rechteck. Sie hat den großen Vorteil, nur durch gerade Linien in kürzester Zeit hergestellt werden zu können. Ein Nachteil des Entwurfes ist, daß der Pol zu der Länge des dreißigsten Parallels ausgedehnt wird, daß ferner die Äquatormaschen keine völligen Quadrate sind, trotzdem der Unterschied der Seitenlängen nicht sehr ins Gewicht fallen dürfte. Ohne Verzerrungen werden die Gebiete um den dreißigsten Grad geogr. Breite, also die Gebiete, die in der Südhalbkugel etwa mit den Kulturzentren zusammenfallen, in der Nordhalbkugel Gebiete wie die Jang-tsze-kiang-Ebene, den Himalaja, das Nil- und

Mississippi-Delta umfassen. Die Gebiete Mitteleuropas erhalten Verzerrungen von 30° bis 40° im Maximum. Die doch entschieden wertlosesten Gebiete der Erde, die Pole, erhalten die größten Verzerrungen. Ferner ist ein großer Vorteil der Projektion, daß kein Mittelmeridian vorhanden ist, also kein Meridian bevorzugt werden muß, daß ganz ähnlich wie bei der Merkatorprojektion ein Gebiet, das östlich vom Nachbargebiet durch den Kartenrand getrennt ist, westlich wiederholt werden kann. Es erscheint nach allem als die beste flächentreue Projektion der ganzen Erde die flächentreue Projektion auf den Schnittzylinder im dreißigsten Parallelkreis, berufen als leicht zu zeichnen und als Projektion mit den geringsten Verzerrungen an die Stelle vieler alter Erdbilder zu treten. Es seien daher kurz die Abstände der Parallelkreise in Tabelle XI gegeben.

2. Will man den Nachteil, daß bei dieser Darstellung die Rundung der Erde verschwiegen wird, als ausschlaggebend empfinden, so kann Eckerts Projektion mit Ellipsen als Meridianen empfohlen werden, trotzdem der Entwurf den Pol auch zur Hälfte des Äquators ausdehnt und die Erde künstlich durch den Randmeridian seziert.

Den Vorteil der geraden Parallelen, den Eckert an seinen Entwürfen rühmt, hat in gleicher Weise jede Zylinderprojektion.

3. Will man im Hammerschen Sinne einige Gebiete der Erde wertvoller einschätzen als andere und ihnen größeres Gewicht bei der Darstellung geben, so kämen wohl nur die Gebiete um den 40. Grad nördlicher Breite in Frage. Die Projektion auf dem Schnittzylinder in diesem Parallel erweist sich als keine schlechte Darstellung.

4. Von den Projektionen, die den Pol als Punkt darstellen ist die Mollweidesche die beste.

5. Will man endlich, was wohl selten der Fall sein dürfte, einen Punkt der Erde als Zentrum des Interesses ansehen und die ganze Erde von ihm aus gesehen darstellen, so kann eine Hammersche Darstellung der Forderung Genüge leisten, die allerdings nicht den Äquator, sondern einen Großkreis durch

jenen Punkt als Achse ihrer Ellipse zeichnet, die also nicht von der flächentreuen azimutalen Äquatorialprojektion, sondern der Horizontalprojektion ausgehend, die einzelnen Gradnetzschnitte berechnet. Die Verzerrungskurven bleiben natürlich die gleichen wie bei Hammers Darstellung. Sie zeigen, daß das Gebiet um den Hauptpunkt verzerrungsfrei ist.

Die übrigen Projektionen dürften zur Darstellung der Gesamterde ungeeignet sein, weil durch bessere zu ersetzen.

II. Der Wert der Verzerrungskurven.

Der Wert der gezeichneten Kurven und Karten dürfte aber noch in einem anderen Punkte liegen. Gilt es für irgend ein größeres Gebiet der Erde, sich eine flächentreue Projektion auszuwählen, so wird man diese Kurven zu Rate ziehen müssen. Man sucht sich unter den vorliegenden Zeichnungen diejenige aus, auf der das darzustellende Gebiet möglichst innerhalb einer Kurve mit geringen Verzerrungen fällt. Einen genauen Wert der mittleren Verzerrung kann wieder ein Planimetrieren des Gebietes ergeben. Denn, wie schon oft hervorgehoben, die mittlere Maximalwinkelverzerrung ist abhängig von der Randkurve des darzustellenden Gebietes. Bei Benutzung dieser Tafeln vergesse man aber nicht, daß häufig transversale Azimutalprojektionen, wo es sich um runde Gebiete, transversale Zylinderprojektionen, wo es sich um einseitig ausgedehnte Gebiete, transversale flächentreue Kegelprojektionen, wo es sich um Gebiete mit gekrümmter Längsachse (Afrika) handelt, bessere Resultate, wenn auch kompliziertere Liniensysteme liefern können.

Um die Abhängigkeit der Werte $2\,\omega_d$ von der Randkurve klar vor Augen zu führen, sei die beste flächentreue Projektion der Halbkugel kurz bestimmt.

III. Der beste flächentreue Entwurf der Halbkugel.

Wir stellen die Werte der mittleren Maximalwinkelverzerrungen zusammen. (Die Zahlen in Klammern bedeuten die Wertreihenfolge bei der Darstellung der ganzen Erdkugel, sie

zeigen, wie beträchtlich die Verschiebungen sind.) (Vergleiche Tabelle II.)

	$2\,\omega_d$
1. Lamberts Azimutalprojektion (13)	18° 8′
2. Hammers Projektion (9)	19° 37′
3. Sanson-Flamsteeds Projektion (11)	21° 25′
4. Mollweides Projektion (7)	22° 2′
5. Eckerts Ellipsenprojektion (2)	22° 40′
6. Eckerts Sinuslinienprojektion (8)	24° 23′
7. Flächentreue Zylinderprojektion für $a = 30°$ (1) .	27° 6′
8. Eckerts Trapezprojektion (10)	27° 11′.

Es folgen die übrigen Zylinder- und Trapezprojektionen.

Hier ist die Entscheidung klar zu fällen. Die beste flächentreue Projektion für die Halbkugel ist die Lambertsche Azimutalprojektion. Eine Halbkugel soll von einem Kreis begrenzt sein; das trifft hier zu. Der Mittelpunkt der Projektion kann in jeden Punkt der Erde gelegt werden, mit der Entfernung vom Mittelpunkt wachsen die Verzerrungen.

Die Projektionen von Hammer und Sanson liefern kaum Vorteile dem Lambertschen Entwurfe gegenüber.

Dagegen können Fälle denkbar sein, wo gleichzeitig ein Punkt auf dem 40. Grad sowohl für uns, wie bei unseren Antoeken in den Vordergrund gerückt werden soll. Nur in diesem Fall ist es berechtigt, Mollweides Entwurf für die Halbkugel anzuwenden.

IV. Bemerkung.

Zum Abschluß sei noch auf einen Punkt aufmerksam gemacht. Es ist dies die Maßstabsbezeichnung bei flächentreuen Projektionen. Meistens findet man die Bezeichnung „Mittelpunktsmaßstab“. Da aber nur bei der Azimutalprojektion Lamberts, bei den Abbildungen Hammers und Flamsteeds und endlich bei der flächentreuen Zylinderprojektion mit längentreuem Äquator die Verzerrung im Mittelpunkt gleich Null ist, bei allen anderen aber von 0 verschieden, so sind auch die

Längen bei diesen Projektionen im Mittelpunkt nach den verschiedenen Richtungen hin infolge der Verzerrungen in verschiedenem Längenmaßstab dargestellt. Es ist also unrichtig, in diesen Fällen von einem Mittelpunktsmaßstab zu sprechen. Man sollte sich daher daran gewöhnen, den Maßstab bei flächentreuen Projektionen als Flächenmaßstab zu bezeichnen und zu definieren:

$$\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{\text{Bildfläche in der Projektion}}}{\sqrt{\text{Bildfläche auf der Erdoberfläche}}}.$$ [1]

---

[1] Die Anregung zu obigen Untersuchungen erhielt ich in Übungen, die ich im geographischen Seminar der Universität Leipzig im Auftrage des Herrn Geheimrats Prof. Dr. J. Partsch abhalten durfte. Möge es mir erlaubt sein, ihm auch öffentlich meinen Dank zu sagen.

Nicht minder fühle ich mich Herrn Professor Dr. Siegmund Günther zu Dank verpflichtet für das Interesse an vorstehender Arbeit, das er sogar bis über die Drucklegung hinaus bekundete.

Tabelle I.

Übersicht über die Verzerrungen bei de

		Inhalt der von der Verzerrungskurv											
$2\omega =$		1⁰	5⁰	10⁰	20⁰	30⁰	40	50⁰	60⁰	70⁰	80⁰	90⁰	10
Flächentreue Zylinderprojektion mit längentreuem Parallelkreis α	1. $\alpha = 0^0$	67,2	147,5	204,2	277,4	327,0	364,1	392,5	416,3	436,4	451,1	464,1	474
	2. $\alpha = 10^0$	52,2	170,1	219,6	287,2	334,0	369,3	397,1	419,5	437,8	453,0	465,6	476
	3. $\alpha = 20^0$	27,4	125,4	259,3	313,6	353,3	384,0	408,4	429,1	444,7	458,3	469,3	479
	4. $\alpha = 30^0$	13,4	67,9	143,7	350,3	381,0	405,4	425,3	441,6	455,1	466,5	475,8	483
	5. $\alpha = 40^0$	8,0	32,5	83,4	182,5	383,0	430,4	444,0	457,3	467,6	476,3	483,6	489
	6. $\alpha = 50^0$	4,8	24,1	48,6	105,3	165,1	253,1	464,1	473,5	480,5	486,5	491,5	495
	7. $\alpha = 60^0$	2,5	12,9	25,9	53,4	84,1	120,7	167,4	233,2	361,9	495,9	498,7	501
8. Collignons flächentreue Trapezprojektion		—	1,7	21,4	59,2	113,7	165,9	214,1	268,1	319,7	395,0	464,7	506
9. Eckerts flächentreue Trapezprojektion		—	1,1	6,8	74,5	198,9	299,9	390,3	476,8	494,0	498,8	501,4	—
10. Sanson-Flamsteeds Projektion		18,6	68,7	113,0	185,2	244,6	294,4	336,8	377,8	415,9	446,6	476,3	494.
11. Eckerts Sinuslinienprojektion		—	3,2	13,2	193,0	285,3	352,7	415,3	461,3	492,2	496,6	500,9	—
12. Mollweides Projektion		0,5	6,7	31,8	234,4	308,6	362,5	405,0	434,4	459,4	477,5	489,9	499.
13. Eckerts Ellipsenprojektion		—	6,1	25,0[1]	280,5	367,5	414,1	442,9	464,2	477,9	490,9	498,6	504.
14. Lamberts Azimutalprojektiou		8,8	42,6	81,8	150,9	209,7	259,9	302,1	339,9	371,7	399,0	422,4	442.
15. Hammers Projektion		8,2	47,4	93,6	176,5	248,4	317,0	367,9	410,0	444,9	472,8	496,5	508.

[1] $2\omega = 15^0$ Inhalt der Kurve 72,5 Mill. qkm.

flächentreuen Darstellung der ganzen Erdkugel.

eingeschlossenen Fläche in Millionen qkm								Mittlere Verzerrungen			Winkelverzerungen im	
110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°	Winkel $2\omega_d$	Längen in % a	Längen in % b	Pol	Äquator
484,4	491,3	497,2	501,8	505,5	508,0	509,4	509,9	31° 25′	+32,0	−24,2	180°	0°
484,7	491,8	497,6	502,2	505,6	508,0	509,4	509,9	29° 51′	+30,2	−23,2	180°	1° 45′
487.0	493,5	498,7	502,9	506,0	508,2	509,5	509,9	28° 5′	+28,1	−21,9	180°	7° 7′
490,5	496,0	500,5	503,9	506,6	508,4	509,5	509,9	27° 6′	+27,0	−21,2	180°	16° 26′
494,8	499,0	502,5	505,2	507,3	508,8	509,6	509,9	29° 46′	+30,1	−23,1	180°	30° 11′
499,3	502,3	504,7	506,6	508,1	509,1	509,7	509,9	38° 40′	+42,4	−29,8	180°	49° 4′
503,5	505,3	506,8	507,8	508,8	509,4	509,7	509,9	55° 1′	+64,8	−39,3	180°	73° 24′
—	—	—	—	—	—	—	—	55° 23′	+65,4	−39,5	103° 44′	unbestimmt
—	—	—	—	—	—	—	509,9[2]	38° 18′	+40,6	−28,9	180°	unbestimmt
506,6	—	—	—	—	—	—	—	38° 40′	+42,4	−29,8	0° − 116° 15′	0°
—	—	—	—	—	—	—	509,9[2]	32° 19′	+33,1	−24,9	180°	14° 21′
505,4	507.5	—	—	—	—	—	509,9[2]	32° 7′	+32.8	−24,7	180°	12° 1′
—	—	—	—	—	—	—	509,9[2]	27° 34′	+27,4	−21.6	180°	19° 16′
460,1	473,3	481,9	494,1	501,1	504,7	508,9	509,9	49° 40′	+56.5	−36,1	38° 37′	0°—180°
—	—	—	..	—	—	—	—	37° 34′	+39,6	−28,4	38°56′-102°6′	0°-38°56′

[2] Das Planimetrieren wurde nur so weit fortgesetzt, als zur Zeichnung des Verzerrungsdiagramms notwendig erschien. Der Verlauf der Verzerrungskurven ist bei höheren Breiten ungenau. Die Interpolation kann daher genauer am Diagramm als an der Karte ausgeführt werden.

Tabelle II.

Übersicht über die Verzerrungen bei der

		Inhalt der von der Verzerrungskurve											
$2\omega =$		1°	5°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°
Flächentreue Zylinderprojektion mit längentreuem Parallelkreis α	1. $\alpha = 0°$	33,6	73,7	102,1	138,7	163,5	182,0	196,2	204,2	218,2	225,5	232,1	237,5
	2. $\alpha = 10°$	26,1	85,1	109,8	143,6	167,0	184,7	198,6	209,7	218,9	226,5	232,8	238,0
	3. $\alpha = 20°$	13,7	62,7	129,7	156,8	176,7	192,0	204,2	214,6	222,4	229,2	234,7	239,6
	4. $\alpha = 30°$	6,7	34,0	71,9	175,2	190,5	202,7	212,7	220,8	227,6	233,3	237,9	242,0
	5. $\alpha = 40°$	4,0	16,3	41,7	91,3	191,5	215,2	222,0	228,6	233,8	238,2	241,8	244,9
	6. $\alpha = 50°$	2,4	12,1	24,3	52,7	82,6	126,6	232,1	236,8	240,3	243,3	245,8	247,9
	7. $\alpha = 60°$	1,3	6,5	13,0	26,7	42,1	60,4	83,7	116,6	181,0	248,0	249,4	250,5
8. Collignons flächentreue Trapezprojektion		—	1,7	21,4	59,2	113,7	165,9	214,1	246,3	—	—	—	—
9. Eckerts flächentreue Trapezprojektion		—	1,1	6,8	74,5	196,3	236,3	241,8	—	—	—	—	—
10. Sanson-Flamsteeds projektion		18,6	59,4	93,7	145,1	182,8	211,1	230,2	245,6	253,6	—	—	—
11. Eckerts Sinuslinienprojektion		—	3,2	13,2	138,4	208,5	233,0	241,4	244,1	—	—	—	—
12. Mollweides Projektion		0,5	6,7	31,8	165,9	204,7	223,7	236,7	243,4	247,5	—	—	—
13. Eckerts Ellipsenprojektion		—	6,1	25,0[1]	193,5	210,9	224,1	230,9	237,9	242,2	246,1	250,4	—
14. Lamberts Azimutalprojektion		8,8	42,6	81,8	150,9	209,7	—	—	—	—	—	—	—
15. Hammers Projektion		8,2	47,4	90,8	152,0	192,4	219,8	234,5	242,1	245,9	—	—	—

[1] $2\omega = 15°$ Inhalt der Kurve 72,5 Mill. qkm.

flächentreuen Darstellung einer Halbkugel.

eingeschlossenen Fläche in Millionen qkm								Mittlere Verzerrungen			Winkelverzerrungen im	
								Winkel	Längen in %			
110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°	$2\,\omega_d$	a	b	Pol	Äquator
242,2	245,6	248,6	250,9	252,7	254,0	254,7	255,0	31° 25′	+32,0	—24,2	180°	0°
242,4	245,9	248,8	251,1	252,8	254,0	254,7	255.0	29° 51′	+30,2	—23,2	180°	1° 45′
243,5	246,8	249,4	251,5	253,0	254,1	254,8	255,0	28° 5′	+28,1	—21,9	180°	7° 7′
245,3	248,0	250,3	252,0	253,3	254,2	254,7	255,0	27° 6′	+27,6	—21,2	180°	16° 26′
247,4	249,5	251,3	252,6	253,7	254,4	254,8	255,0	29° 46′	+30,1	—23,1	180°	30° 11′
249,7	251,2	252,4	253,3	254,1	254,6	254,9	255,0	38° 40′	+42,4	—29,8	180°	49° 4′
251.8	252,7	253,4	253,9	254,4	254,7	254,9	255,0	55° 1′	+64,8	—39,3	180°	73° 24′
—	—	—	—	—	—	—	—	32° 54′	+32,8	—25,3	67° 33′	unbestimmt
—	—	—	—	—	—	—	255,0[2]	27° 11′	+27,1	—21,3	180°	unbestimmt
—	—	—	—	—	—	—	—	21° 25′	+20,7	—17,1	0—76° 18′	0°
—	—	—	—	—	—	—	255,0[2]	24° 23′	+23,9	—19,3	180°	14° 21′
—	—	—	—	—	—	—	255,0[2]	22° 2′	+21,4	—17,6	180°	12° 1′
—	—	—	—	—	—	—	255,0[2]	22° 40′	+22,0	—18,0	180°	19° 16′
—	—	—	—	—	—	—	—	18° 8′	+17,1	—14,6	38° 37′	0—38° 37′
—	—	—	—	—	—	—	—	19° 37′	+18,8	—15,8	38°56′-84°36′	0 —9° 9′

[2] Das Planimetrieren wurde nur so weit fortgesetzt, als zur Zeichnung des Verzerrungsdiagramms notwendig erschien. Der Verlauf der Verzerrungskurven ist in höheren Breiten ungenau. Die Interpolation kann daher genauer am Diagramm als an der Karte ausgeführt werden.

Tabelle III.

Abstand der dem Äquator parallelen Verzerrungskurven bei den flächentreuen Zylinderprojektionen mit längentreuem Parallelkreis α.

2ω	$\alpha = 0°$	$\alpha = 10°$	$\alpha = 20°$	$\alpha = 30°$	$\alpha = 40°$	$\alpha = 50°$	$\alpha = 60°$
1°	7° 35′	12° 31′ 6° 34′	21° 19′ 18° 34′	30° 51′ 29° 7′	40° 35′ 39° 24′	50° 25′ 49° 35′	60° 17′ 59° 43′
5°	16° 49′	19° 29′	25° 54′ 11° 0′	34° 0′ 25° 13′	42° 50′ 36° 51′	52° 1′ 47° 49′	61° 24′ 58° 31′
10°	23° 26′	25° 32′	30° 34′	37° 28′ 19° 4′	45° 25′ 33° 17′	53° 55′ 45° 27′	62° 44′ 56° 56′
20°	32° 57′	34° 17′	37° 57′	43° 24′	50° 0′ 24° 5′	58° 12′ 40° 0′	65° 12′ 53° 25′
30°	39° 53′	40° 55′	43° 52′	48° 21′	54° 0′ 3° 9′	60° 27′ 33° 6′	67° 26′ 49° 20′
40°	45° 33′	46° 24′	48° 51′	52° 40′	57° 34′	63° 15′ 23° 22′	69° 30′ 44° 26′
50°	50° 20′	51° 9′	53° 14′	56° 31′	60° 47′	65° 50′	71° 26′ 38° 18′
60°	54° 44′	55° 21′	57° 18′	60° 0′	63° 45′	68° 13′	73° 13′ 30° 0′
70°	58° 38′	59° 10′	60° 43′	63° 12′	66° 30′	70° 27′	74° 55′ 16° 10′
80°	62° 12′	62° 40′	64° 1′	66° 11′	69° 4′	72° 34′	76° 31′
90°	65° 32′	65° 56′	67° 6′	68° 56′	71° 30′	74° 34′	77° 57′
100°	68° 39′	69° 0′	70° 0′	71° 38′	73° 49′	76° 28′	79° 16′
110°	71° 47′	71° 55′	72° 46′	74° 9′	76° 1′	78° 18′	80° 56′
120°	74° 27′	74° 42′	75° 25′	76° 35′	78° 9′	80° 5′	82° 18′
130°	77° 12′	77° 23′	77° 59′	79° 11′	80° 13′	81° 48′	83° 38′
140°	79° 51′	80° 0′	80° 28′	81° 13′	82° 14′	83° 30′	84° 57′
150°	82° 26′	82° 33′	82° 54′	83° 27′	84° 13′	85° 9′	86° 14′
160°	84° 59′	85° 3′	85° 17′	85° 39′	86° 9′	86° 47′	87° 26′
170°	87° 30′	87° 32′	87° 39′	87° 50′	88° 5′	88° 23′	88° 45′
180°	90°	90°	90°	90°	90°	90°	90°

Tabellle IV.

Collignons flächentreue Trapezprojektion.

Tafel der Maximalwinkelverzerrung (2ω) vgl. Tissot, p. 11.

φ	λ 0	20	40	60	80	100	120	140	160	180
0	13° 49′	17° 43′	26° 1′	35° 24′	44° 47′	53° 46′	62° 11′	69° 58′	77° 7′	83° 37′
10	4° 40′	13° 2′	24° 30′	35° 46′	46° 24′	56° 17′	65° 21′	73° 35′	81° 1′	88° 11′
20	3° 00′	13° 21′	25° 52′	37° 53′	49° 8′	59° 27′	68° 56′	77° 35′	84° 47′	91° 32′
30	9° 23′	16° 36′	28° 35′	40° 43′	52° 9′	63° 39′	72° 8′	80° 36′	88° 9′	95° 1′
40	14° 34′	20° 22′	31° 36′	43° 34′	55° 1′	65° 33′	75° 3′	83° 31′	91° 1′	97° 38′
50	18° 40′	23° 12′	32° 21′	46° 6′	57° 30′	68° 1′	77° 28′	85° 37′	93° 19′	99° 53′
60	21° 46′	26° 25′	36° 36′	48° 10′	59° 39′	69° 57′	79° 22′	87° 43′	95° 6′	101° 35′
70	23° 57′	28° 21′	38° 15′	49° 41′	60° 55′	71° 20′	80° 43′	89° 2′	96° 21′	102° 47′
80	25° 14′	29° 30′	39° 14′	50° 35′	61° 47′	72° 10′	81° 31′	89° 56′	97° 6′	103° 30′
90	25° 39′	29° 53′	39° 34′	50° 53′	61° 53′	72° 27′	81° 47′	90° 3′	97° 21′	103° 44′

Tabelle V.

Eckerts flächentreue Trapezprojektion.

Tafel der Maximalwinkelverzerrung (2ω).

φ	λ 0	20	40	60	80	100	120	140	160	180
0	9° 23′	11° 41′	16° 36′	22° 28′	28° 34′	34° 42′	40° 42′	46° 32′	52° 9′	57° 31′
10	15° 35′	17° 22′	21° 10′	26° 27′	28° 54′	38° 14′	44° 11′	50° 0′	55° 37′	61° 1′
20	19° 10′	20° 52′	24° 9′	29° 6′	34° 41′	40° 33′	46° 26′	52° 12′	58° 22′	63° 11′
30	19° 44′	21° 27′	24° 39′	29° 33′	35° 6′	40° 57′	46° 49′	52° 35′	58° 11′	63° 33′
40	16° 45′	18° 29′	22° 8′	27° 16′	33° 2′	38° 58′	44° 54′	50° 42′	56° 50′	61° 43′
50	7° 42′	10° 19′	15° 33′	21° 40′	27° 44′	33° 51′	39° 53′	45° 42′	51° 17′	56° 39′
60	9° 57′	11° 31′	14° 35′	19° 57′	24° 59′	30° 8′	35° 58′	40° 18′	45° 14′	50° 1′
70	42° 38′	42° 49′	43° 22′	44° 14′	45° 26′	46° 55′	48° 38′	50° 33′	52° 37′	55° 50′
80	99° 3′	99° 4′	99° 5′	99° 8′	99° 12′	99° 16′	99° 22′	99° 29′	99° 36′	99° 45′
90	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°

Tabelle VI.

Sanson-Flamsteeds Projektion.

Tafel der Maximalverzerrung (2ω) für den zweiten Quadranten, vgl. Zöppritz p. 148, 149.

φ	λ								
	100	110	120	130	140	150	160	170	180
0	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°
10	17° 4′	18° 56′	20° 37′	22° 18′	23° 58′	25° 36′	27° 16′	28° 54′	29° 51′
20	33° 14′	36° 21′	39° 24′	42° 24′	45° 21′	48° 14′	51° 3′	53° 48′	56° 30′
30	47° 5′	51° 17′	55° 16′	59° 7′	62° 50′	66° 24′	69° 50′	73° 8′	76° 18′
40	58° 35′	63° 21′	67° 54′	72° 12′	76° 17′	80° 9′	83° 49′	87° 17′	90° 33′
50	67° 32′	72° 40′	77° 28′	81° 59′	86° 12′	90° 10′	93° 50′	97° 18′	100° 33′
60	74° 10′	79° 28′	84° 24′	88° 59′	93° 14′	97° 10′	100° 49′	104° 12′	107° 22′
70	78° 42′	84° 6′	89° 5′	93° 40′	97° 53′	101° 47′	105° 22′	108° 42′	111° 46′
80	81° 21′	86° 47′	91° 46′	96° 20′	100° 32′	104° 24′	107° 57′	111° 13′	114° 14′
90	82° 13′	87° 38′	92° 38′	97° 12′	101° 24′	105° 15′	108° 47′	112° 2′	116° 15′

Tabelle VII.

Eckerts Sinuslinienprojektion.

Tafel der Maximalwinkelverzerrung 2ω.

φ	λ									
	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180
0	14° 21′	14° 21′	14° 21′	14° 21′	14° 21′	14° 21′	14° 21′	14° 21′	14° 21′	14° 21′
10	14° 2′	14° 16′	14° 55′	15° 55′	17° 9′	18° 46′	20° 29′	22° 20′	24° 20′	26° 0′
20	13° 2′	13° 55′	16° 11′	18° 22′	23° 6′	27° 3′	31° 8′	35° 56′	39° 21′	43° 24′
30	11° 9′	12° 49′	17° 18′	23° 3′	28° 43′	34° 39′	40° 46′	46° 12′	51° 43′	56° 28′
40	6° 47′	10° 36′	17° 34′	25° 3′	32° 31′	38° 41′	46° 46′	53° 24′	59° 43′	65° 39′
50	0° 48′	8° 48′	17° 26′	25° 54′	34° 5′	41° 55′	49° 22′	56° 44′	63° 0′	69° 10′
60	15° 22′	17° 26′	22° 28′	31° 16′	35° 36′	42° 27′	49° 9′	55° 36′	61° 46′	67° 35′
70	43° 30′	43° 56′	45° 8′	47° 6′	49° 39′	52° 39′	55° 59′	59° 31′	63° 11′	66° 55′
80	96° 45′	96° 47′	96° 51′	96° 59′	97° 9′	97° 22′	97° 38′	97° 57′	98° 11′	98° 41′
90	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°

Tabelle VIII.

Mollweides Projektion.

Tafel der Maximalwinkelverzerrung 2ω, vgl. Tissot, p. 8.

φ	λ									
	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180
0	12° 1′	12° 1′	12° 1′	12° 1′	12° 1′	12° 1′	12° 1′	12° 1′	12° 1′	12° 1′
10	11° 30′	11° 38′	12° 4′	12° 47′	13° 43′	14° 50′	16° 4′	17° 32′	18° 52′	20° 22′
20	9° 18′	10° 4′	12° 6′	16° 40′	18° 1′	21° 22′	24° 47′	28° 32′	31° 44′	35° 10′
30	5° 45′	8° 14′	13° 5′	18° 29′	23° 57′	29° 26′	34° 48′	40° 27′	45° 7′	50° 2′
40	0° 28′	8° 1′	15° 54′	23° 40′	31° 12′	38° 30′	45° 28′	52° 37′	58° 23′	64° 18′
50	9° 30′	13° 55′	22° 20′	31° 25′	40° 23′	48° 58′	57° 4′	65° 13′	71° 37′	78° 3′
60	17° 27′	21° 32′	30° 26′	40° 39′	50° 45′	60° 9′	69° 15′	77° 58′	84° 39′	91° 13′
70	32° 38′	35° 52′	43° 51′	53° 48′	64° 2′	73° 45′	82° 38′	90° 32′	97° 39′	103° 52′
80	57° 32′	59° 45′	67° 30′	76° 48′	86° 25′	95° 26′	103° 30′	111° 4′	116° 38′	121° 55′
90	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°

Tabelle IX.

Eckerts Ellipsenprojektion.

Tafel der Maximalwinkelverzerrung 2ω.

φ	λ									
	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180
0	19° 16′	19° 16′	19° 16′	19° 16°	19° 16′	19° 16′	19° 16′	19° 16′	19° 16′	19° 16′
10	18° 13′	18° 15′	18° 22′	18° 32′	18° 47′	19° 5′	19° 27′	19° 53′	20° 22′	20° 54′
20	14° 27′	14° 38′	15° 10′	16° 2′	17° 9′	18° 29′	19° 59′	21° 52′	23° 21′	25° 8′
30	9° 20′	9° 58′	11° 40′	14° 3′	16° 48′	19° 45′	22° 49′	25° 56′	29° 4′	32° 11′
40	0° 40′	4° 47′	8° 28′	14° 10′	18° 49′	23° 23′	27° 54′	32° 19′	36° 38′	40° 52′
50	12° 23′	13° 42′	17° 0′	21° 21′	26° 10′	31° 10′	36° 12	41° 10′	46° 3′	50° 48′
60	31° 22′	32° 4′	34° 7′	37° 12′	40° 37′	45° 50′	49° 56′	54° 37′	59° 19′	63° 56′
70	59° 59′	60° 23′	61° 32′	63° 22′	65° 47′	68° 38′	71° 49′	75° 13′	78° 44′	82° 18′
80	87° 0′	87° 24′	88° 36′	90° 30′	92° 57′	95° 49′	98° 57′	102° 13′	105° 32′	108° 10′
90	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°

Tabelle X.

Hammers Projektion.

Tafel der Maximalwinkelverzerrung.

φ	λ									
	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180
0	0	0° 28′	1° 45′	3° 58′	6° 58′	11° 16′	16° 26′	22° 42′	30° 12′	38° 56′
10	0° 28′	2° 14′	5° 00′	8° 4′	11° 51′	16° 18′	21° 43′	28° 10′	35° 44′	44° 30′
20	1° 45′	5° 00′	9° 38′	16° 22′	20° 2′	25° 55′	32° 25′	39° 38′	47° 35′	57° 26′
30	3° 58′	8° 4′	16° 22′	21° 40′	29° 30′	36° 2′	44° 2′	52° 4′	60° 28′	69° 14′
40	6° 58′	11° 51′	20° 2′	29° 30′	37° 22′	46° 25′	55° 10′	63° 40′	71° 57′	80° 4′
50	11° 16′	16° 18′	25° 55′	36° 2′	46° 25′	56° 14′	65° 20′	73° 46′	81° 30′	88° 32′
60	16° 26′	21° 43′	32° 25′	44° 2′	55° 10′	65° 20′	74° 24′	80° 56′	89° 4′	94° 44′
70	22° 42′	28° 10′	39° 38′	52° 4′	63° 40′	73° 46′	80° 56′	89° 16′	94° 56′	98° 48′
80	30° 12′	35° 44′	47° 35′	60° 28′	71° 57′	81° 30′	89° 4′	94° 56′	98° 50′	101° 20′
90	38° 56′	44° 30′	57° 26′	69° 14′	80° 4′	88° 32′	94° 44′	98° 48′	101° 20′	102° 6′

Tabelle XI.

Entfernung der Parallelkreise bei der flächentreuen Zylinderprojektion auf dem Schnittzylinder im dreissigsten Parallel.

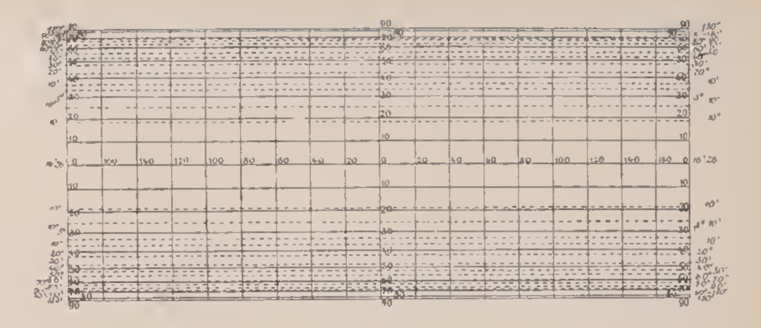
$$h = R \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos 30^0}.$$

φ	km	φ	km
0°	0	50°	5634,9
5°	641,1	55°	6025,4
10°	1277,3	60°	6370,3
15°	1903,8	65°	6666,6
20°	2515,8	70°	6912,3
25°	3108,7	75°	7105,1
30°	3677,9	80°	7244,0
35°	4219,1	85°	7327,7
40°	4728,2	90°	7355,8
45°	5201,4		

Breite der Projektion 2 × 17332 km.

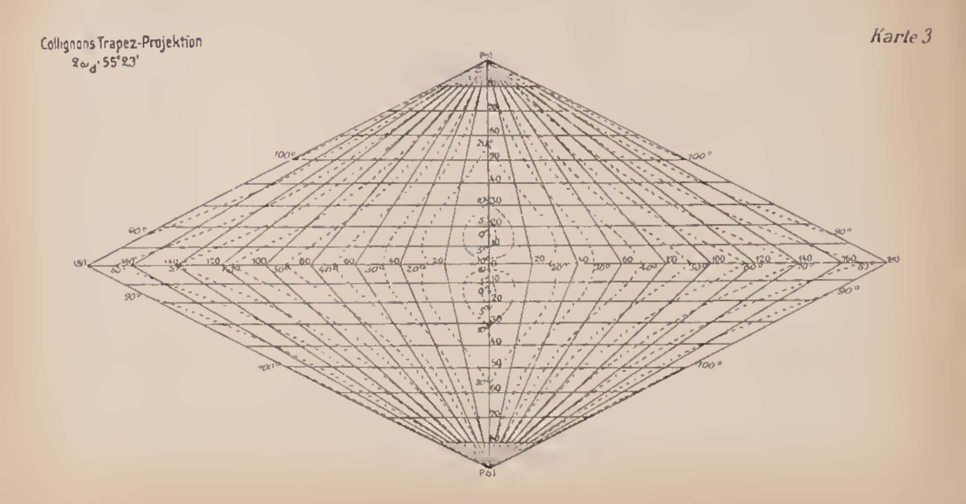
Flächentreue Cylinder-Projektion für $\alpha = 30^\circ$
$2\omega_d = 27^\circ 6'$

Karte 2



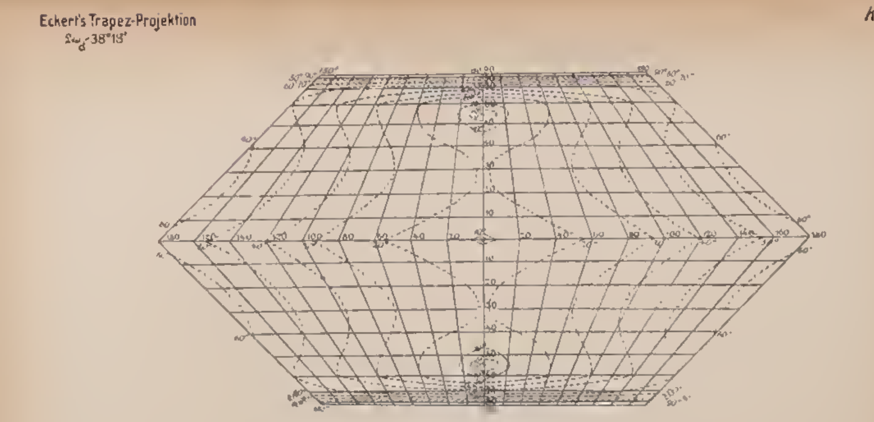
Collignons Trapez-Projektion
$2\omega_d = 55^\circ 23'$

Karte 3



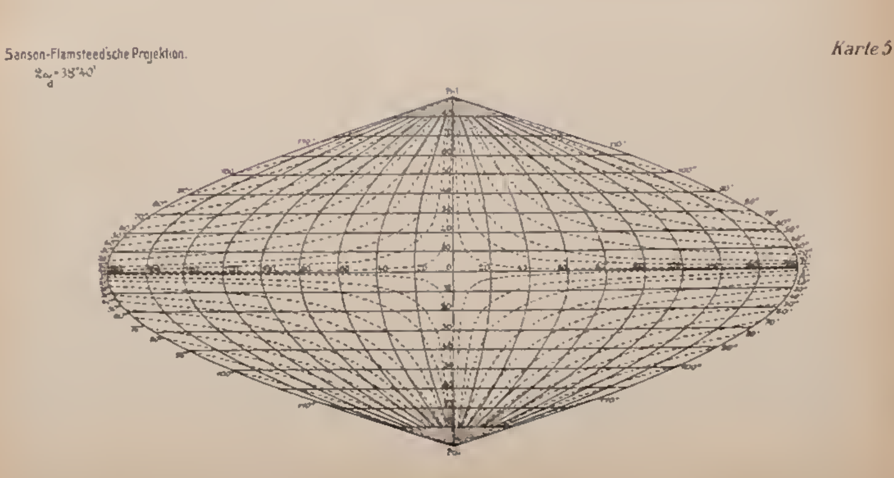
Eckert's Trapez-Projektion
$2\omega_d = 38^\circ 13'$

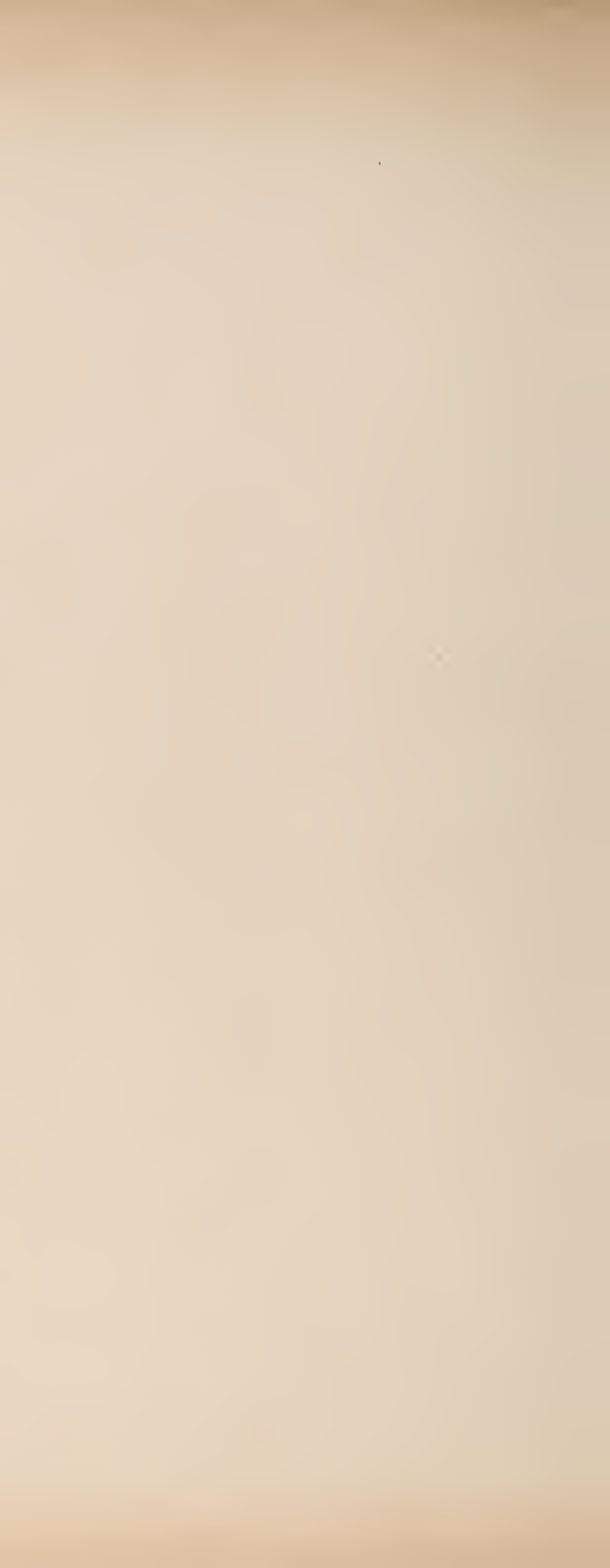
Karte 4



Sanson-Flamsteed'sche Projektion.
$2\omega_d = 35^\circ 40'$

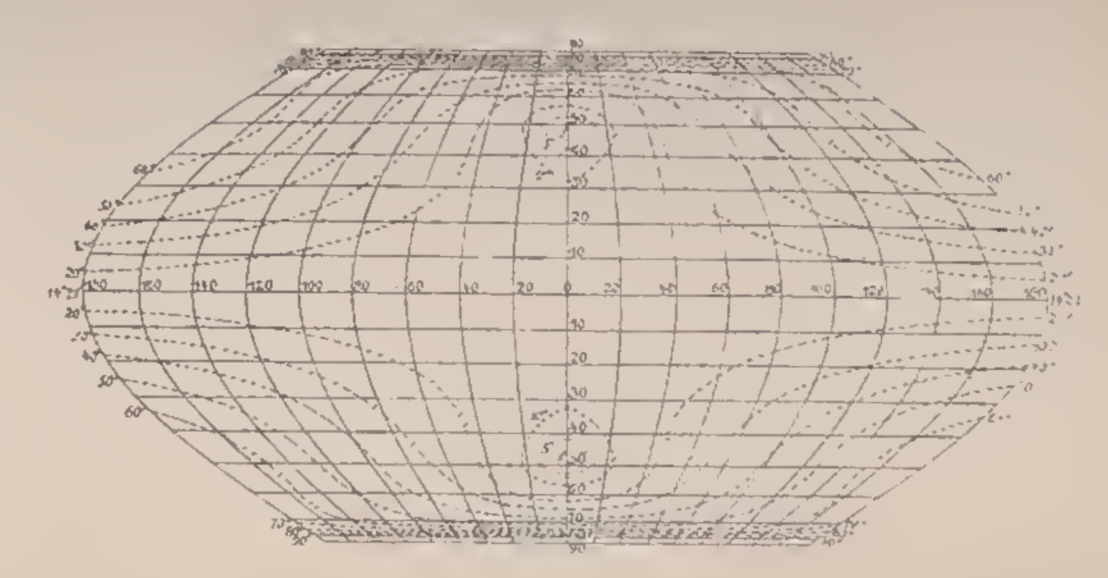
Karte 5





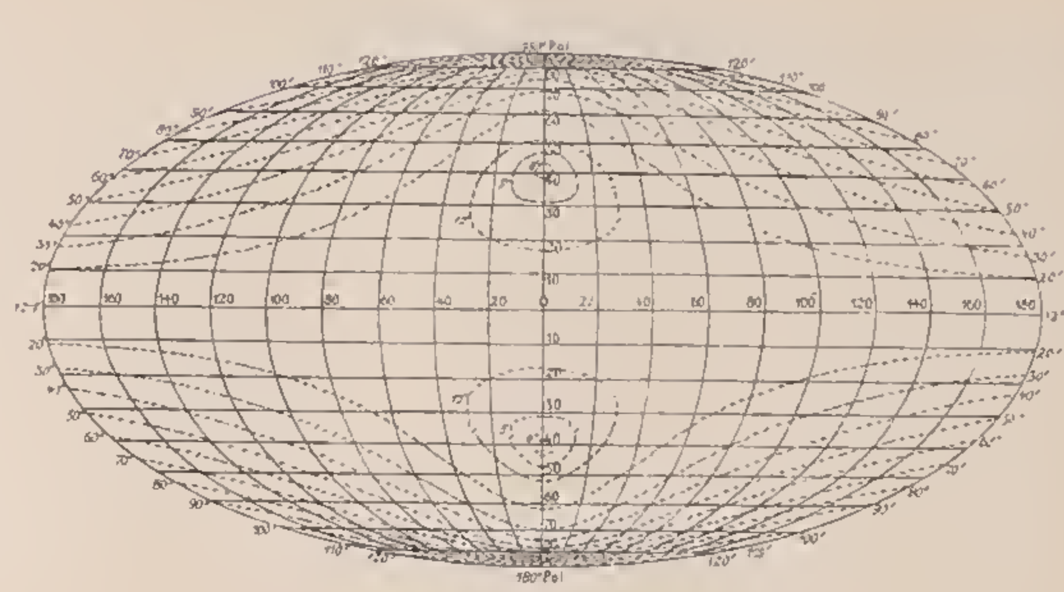
Ekert's Sinuslinien-Projektion
$2\omega_g = 32°19'$

Karte 6



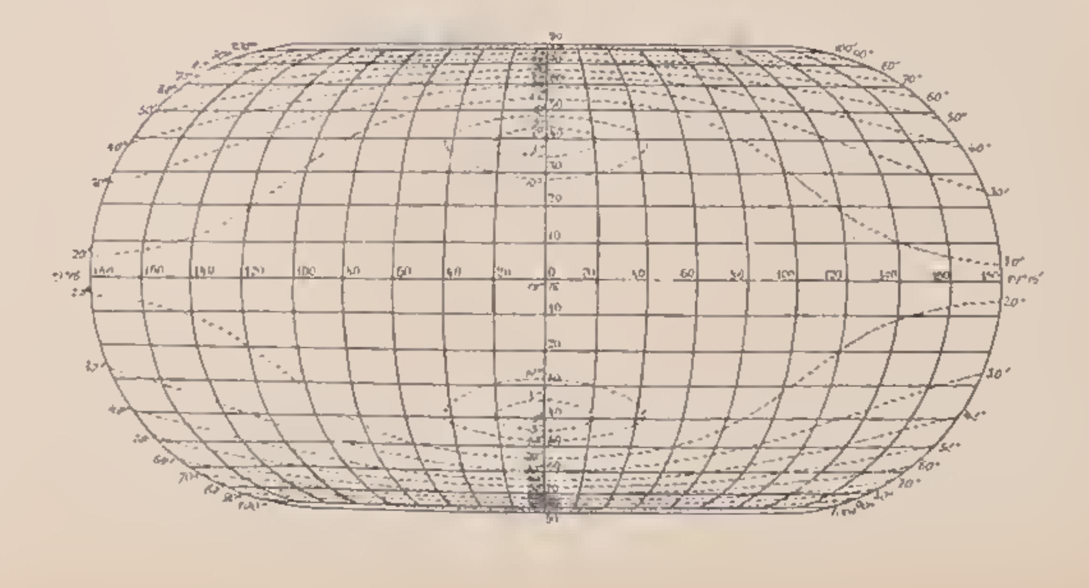
Mollweide'sche-Projektion
$2\omega_g = 32°7'$

Karte 7



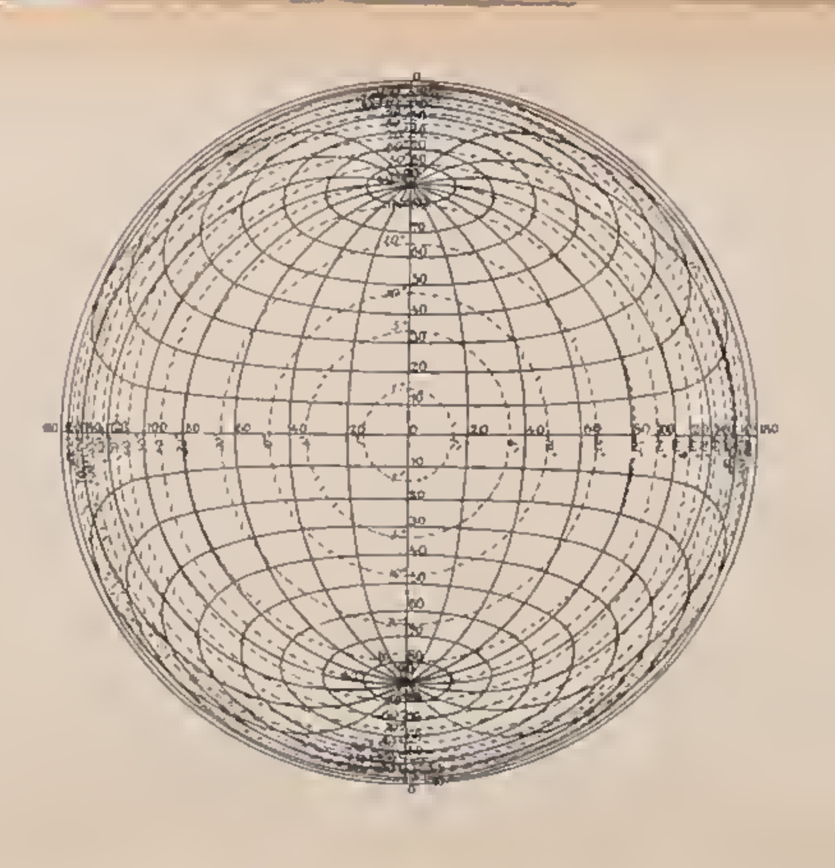
Eckert's Ellipsen-Projektion
$2\omega_g = 27°34'$

Karte 8



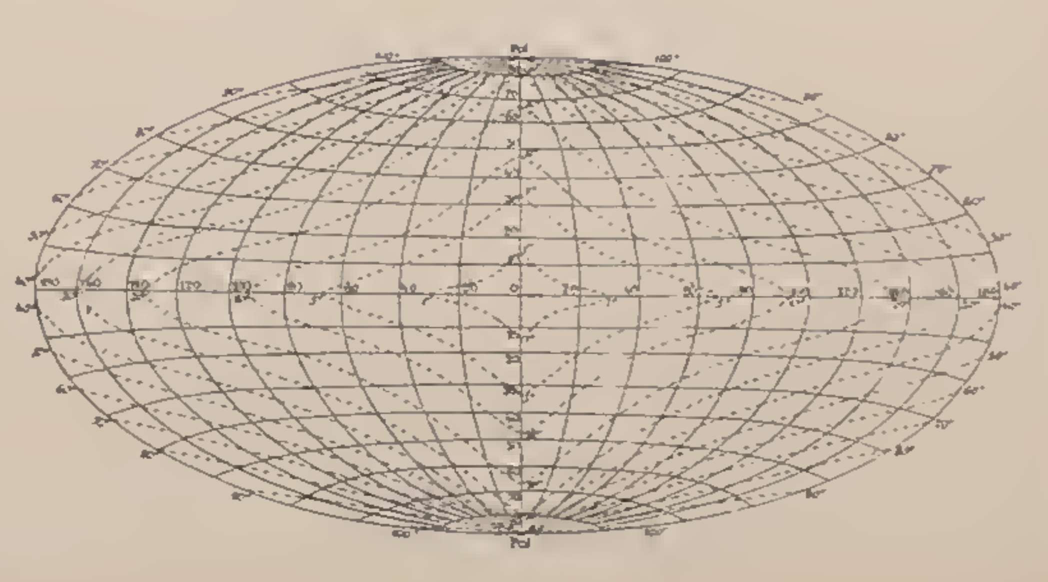
Lambert'sche flächentreue Azimutal-Projektion
$2\omega_g = 49°40'$

Karte 9



Hammer'sche Projektion
$2\omega_g = 37°34'$

Karte 10



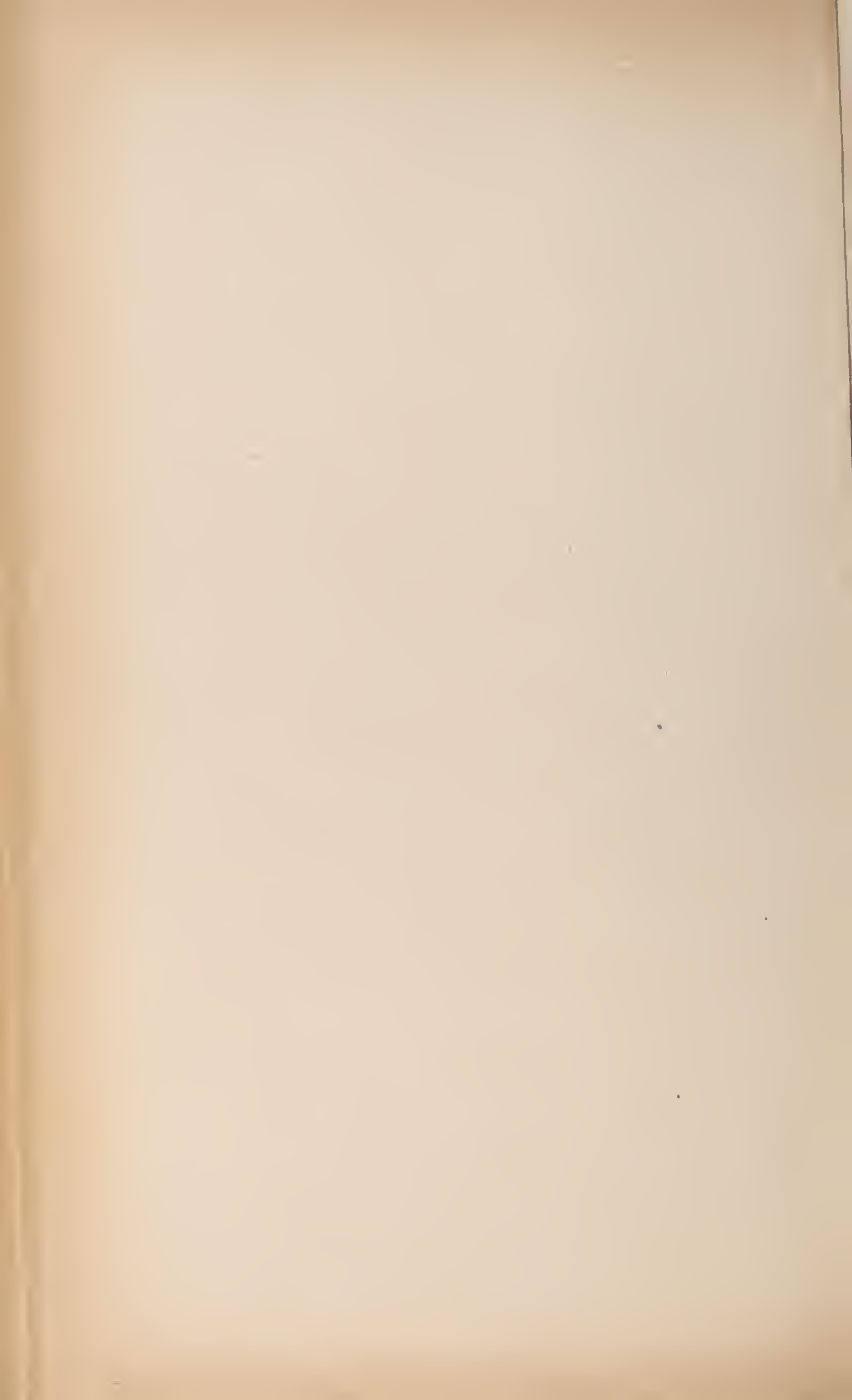


Fig. 1.

Flächentreue Cylinder Projektion für α=0°
$2\omega_d$=31°25' f. E.-K.
=31°25' f. Hlb.-K.

Fig. 2.

Flächentreue Cylinder Projektion für α=10°
$2\omega_d$=29°51' f. E.-K.
=29°51' f. Hlb.-K.

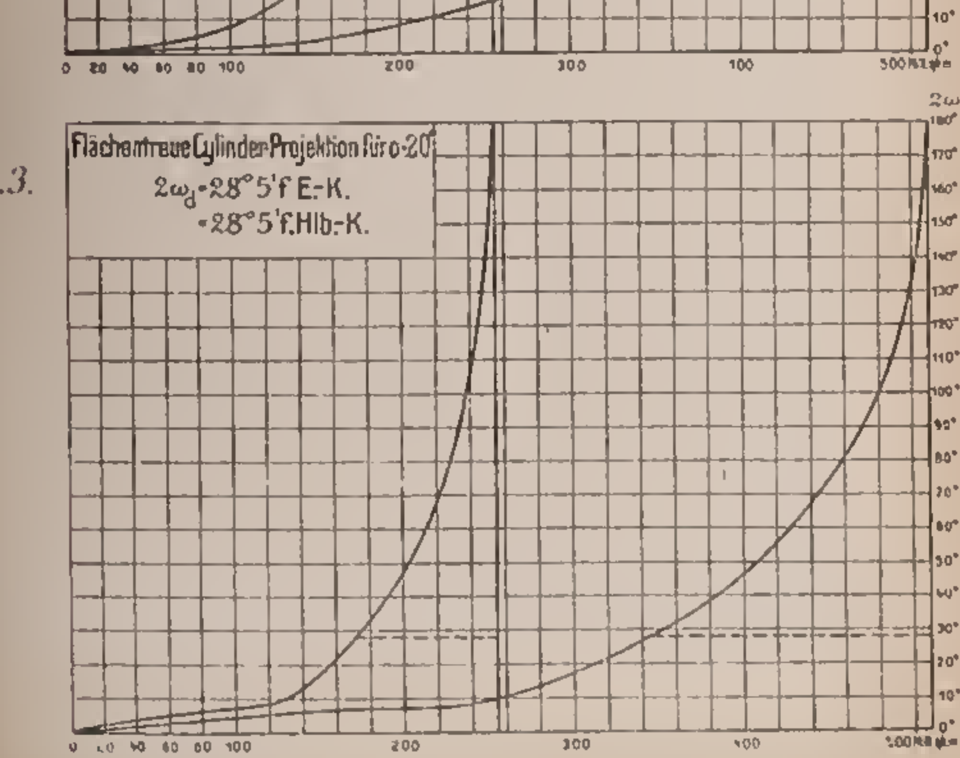


Fig. 3.

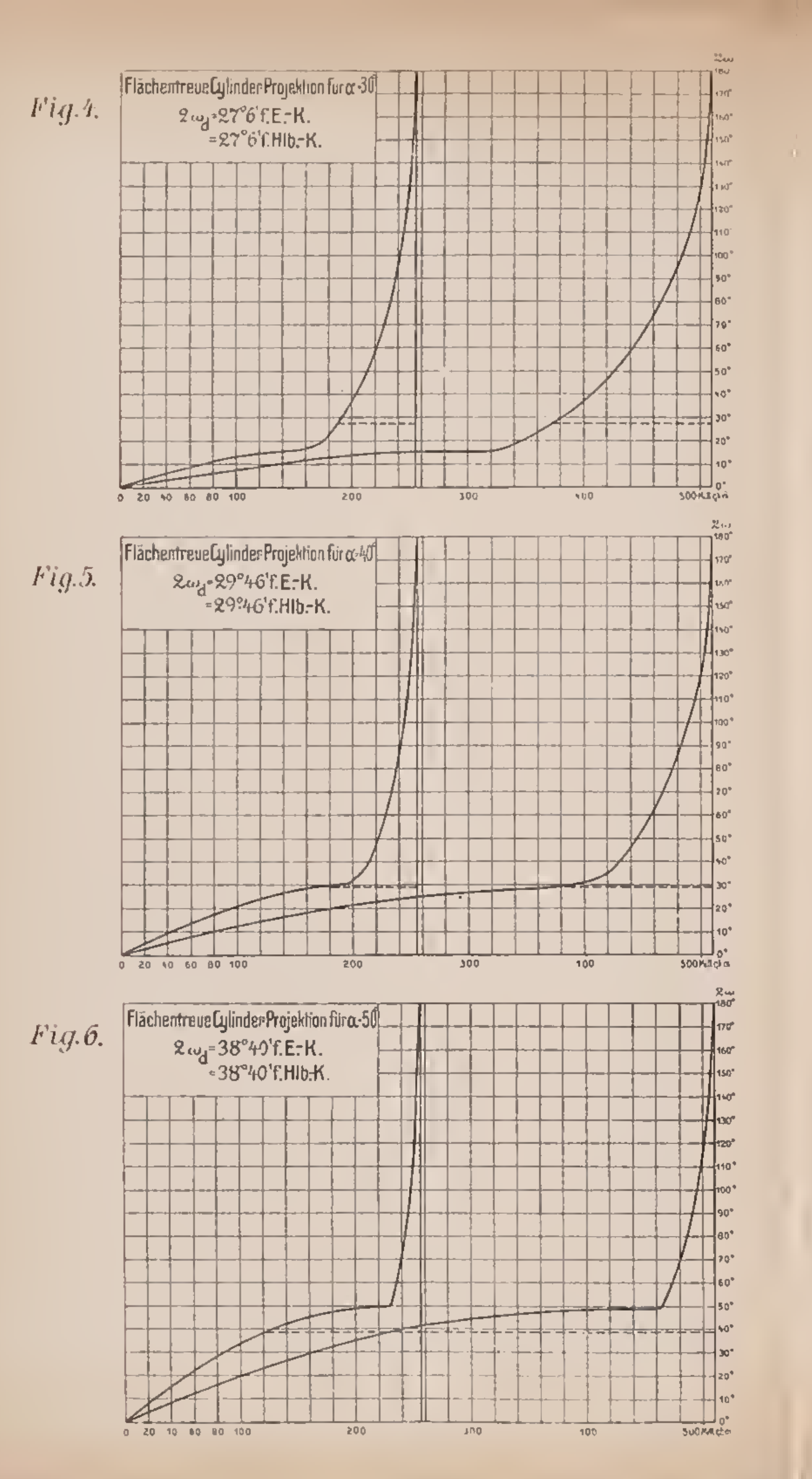


Fig. 4. Fig. 5. Fig. 6.

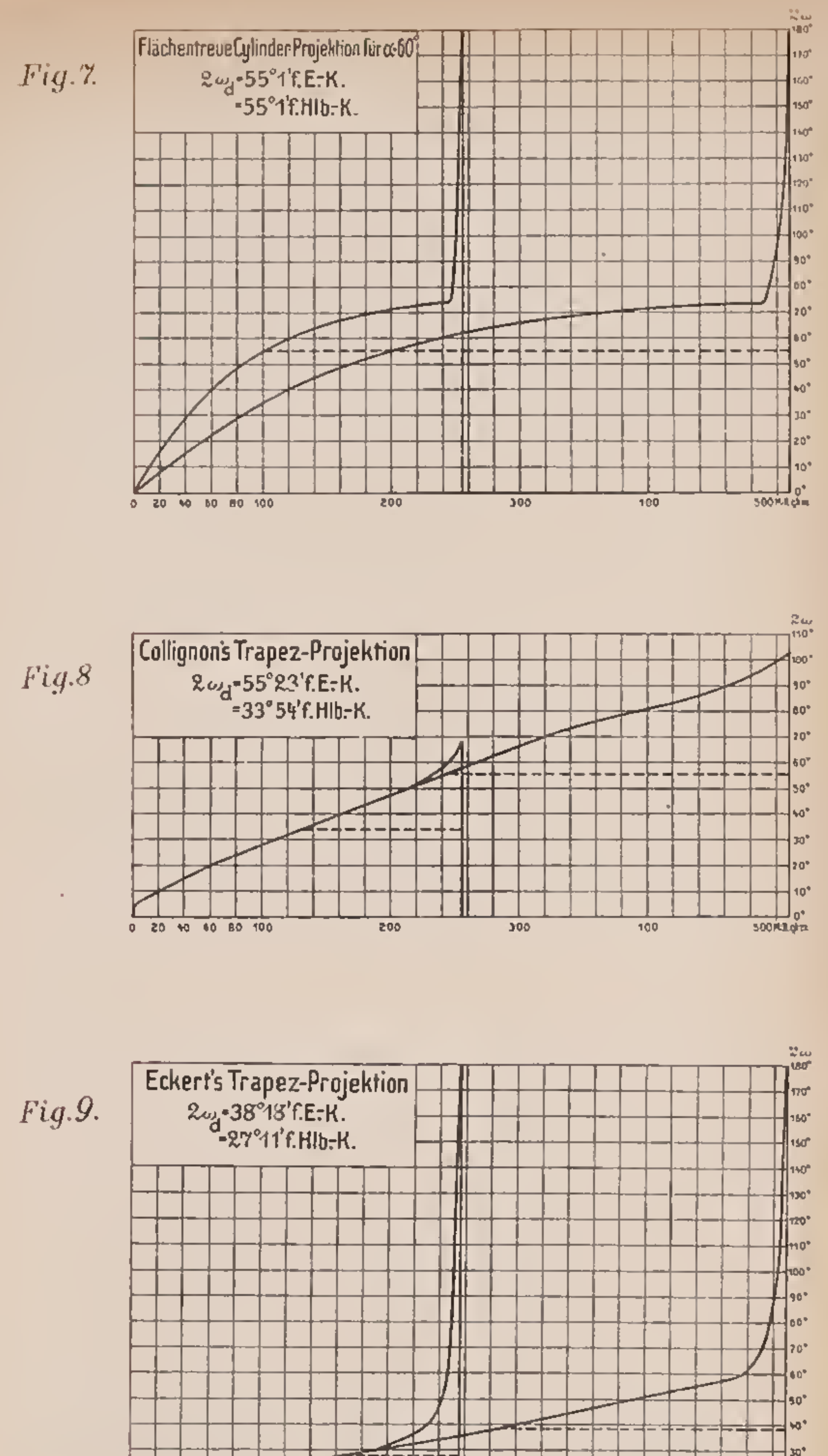
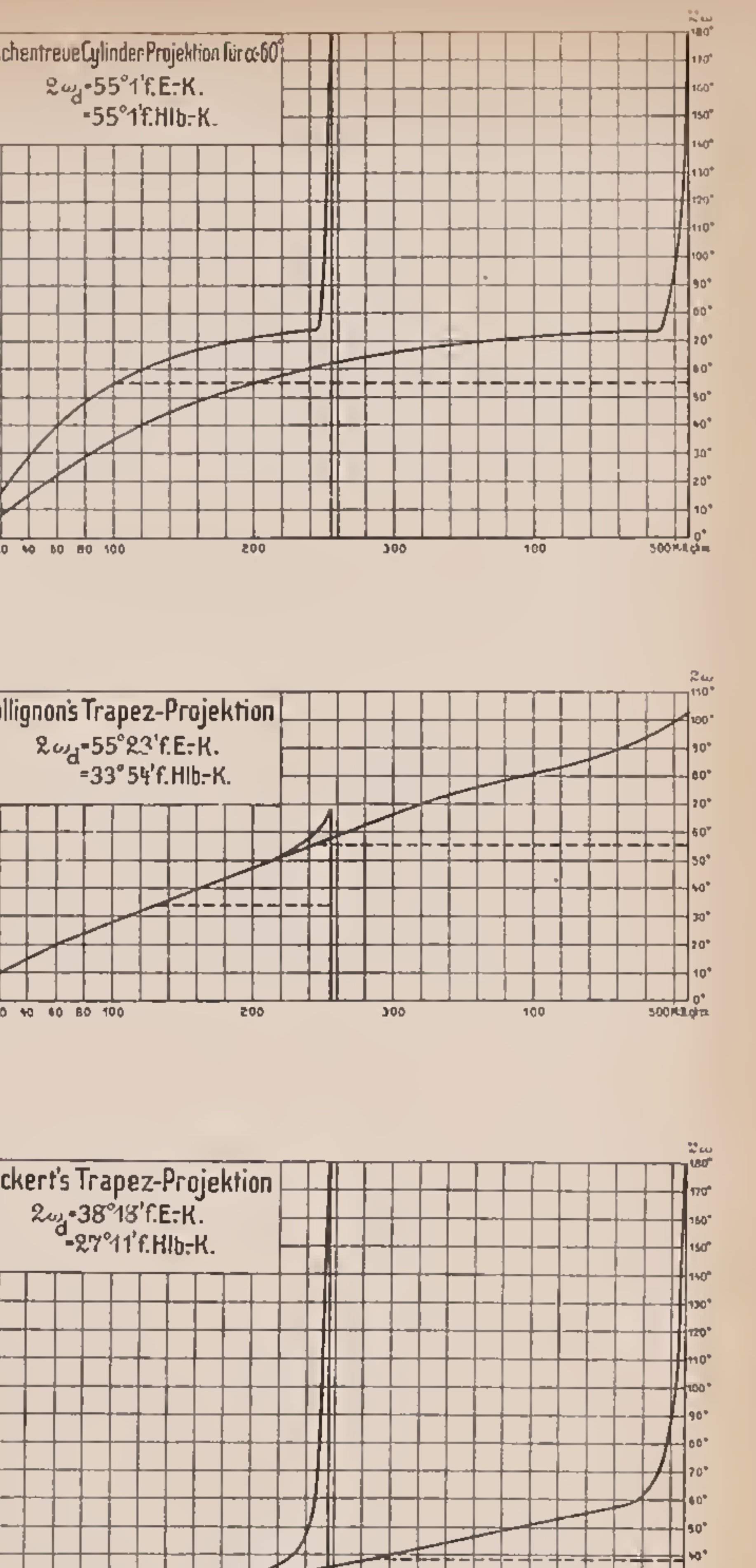



Fig. 7. Fig. 8. Fig. 9.

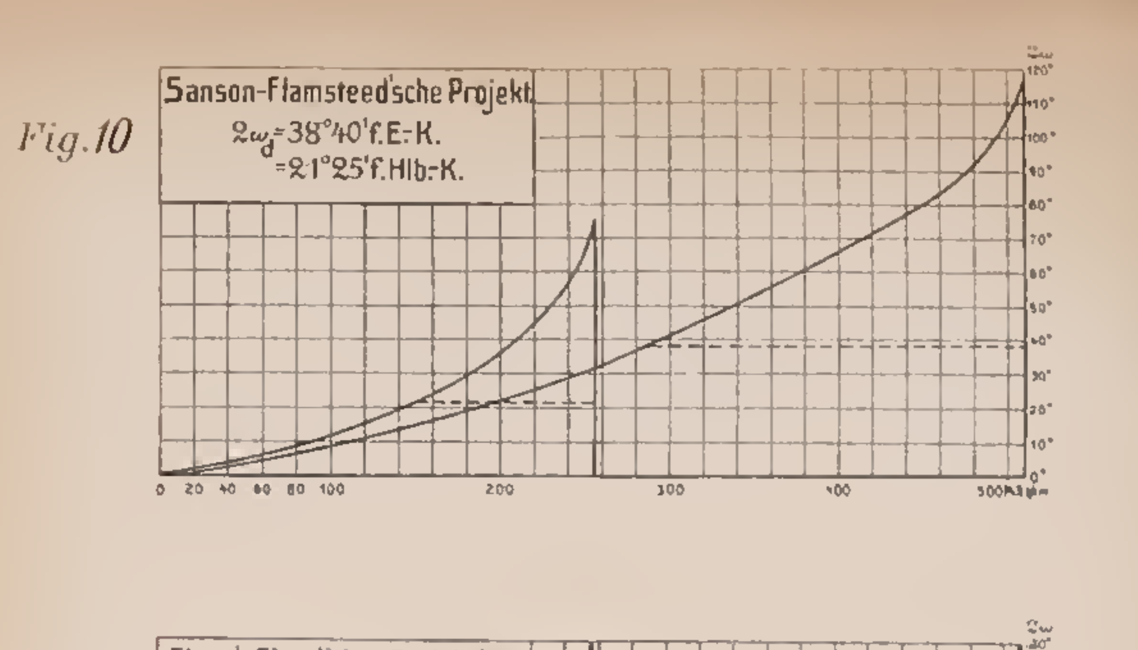


Fig. 10

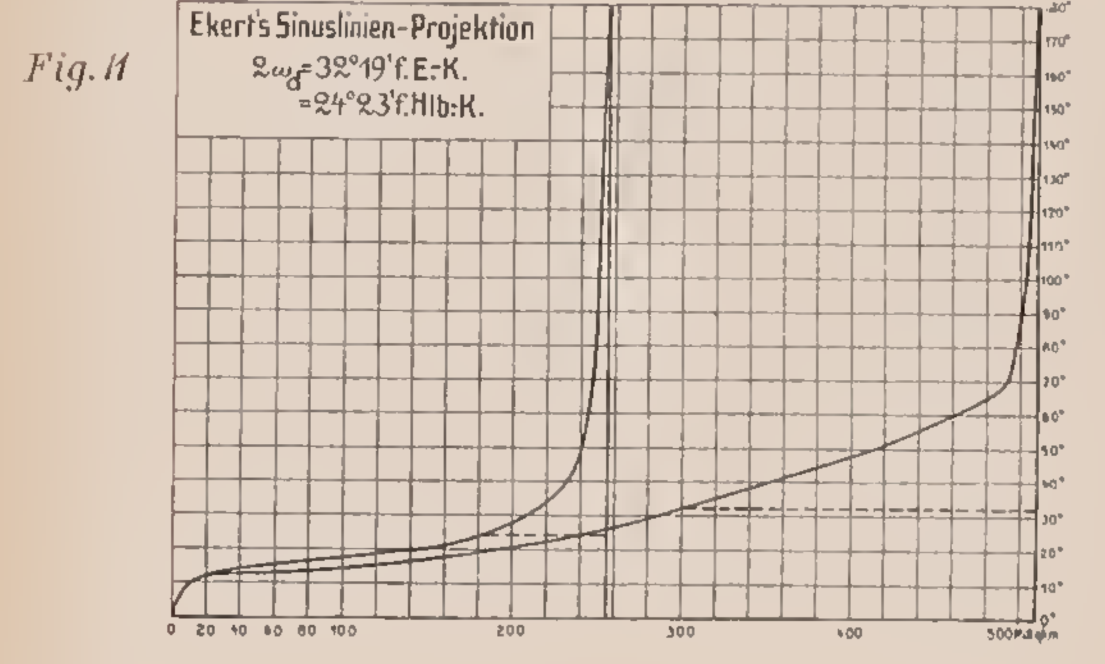


Fig. 11

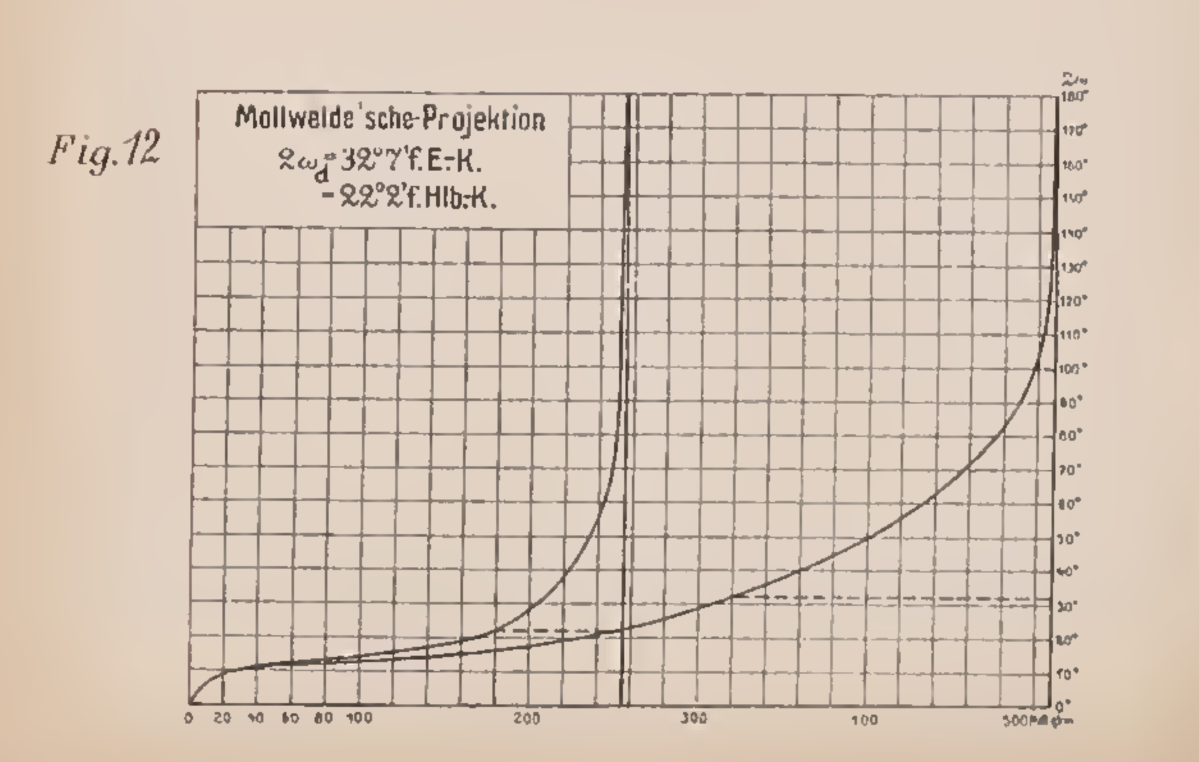


Fig. 12

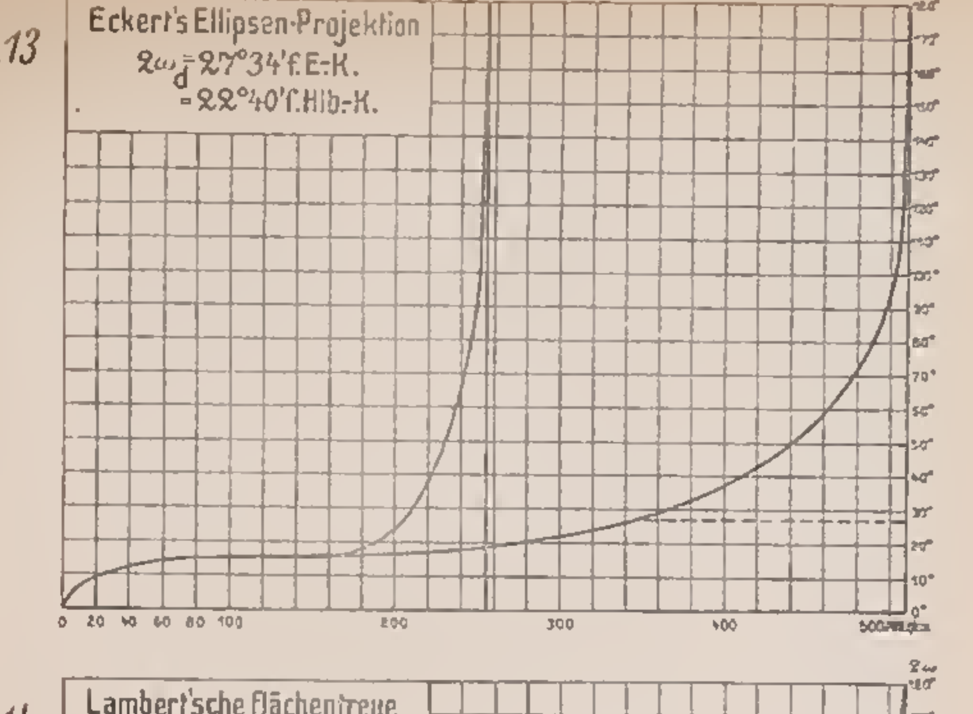


Fig. 13

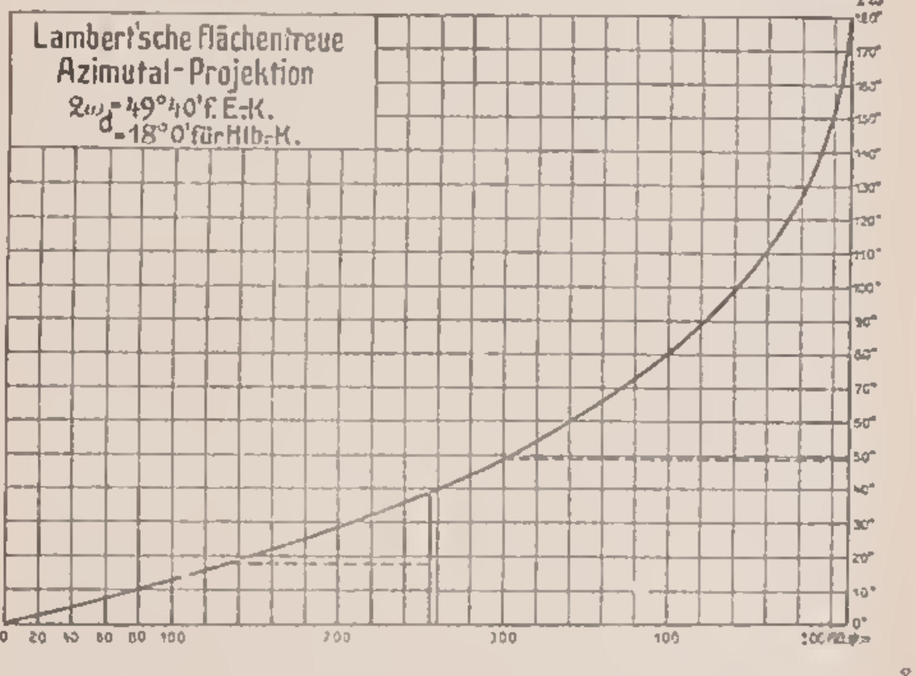


Fig. 14

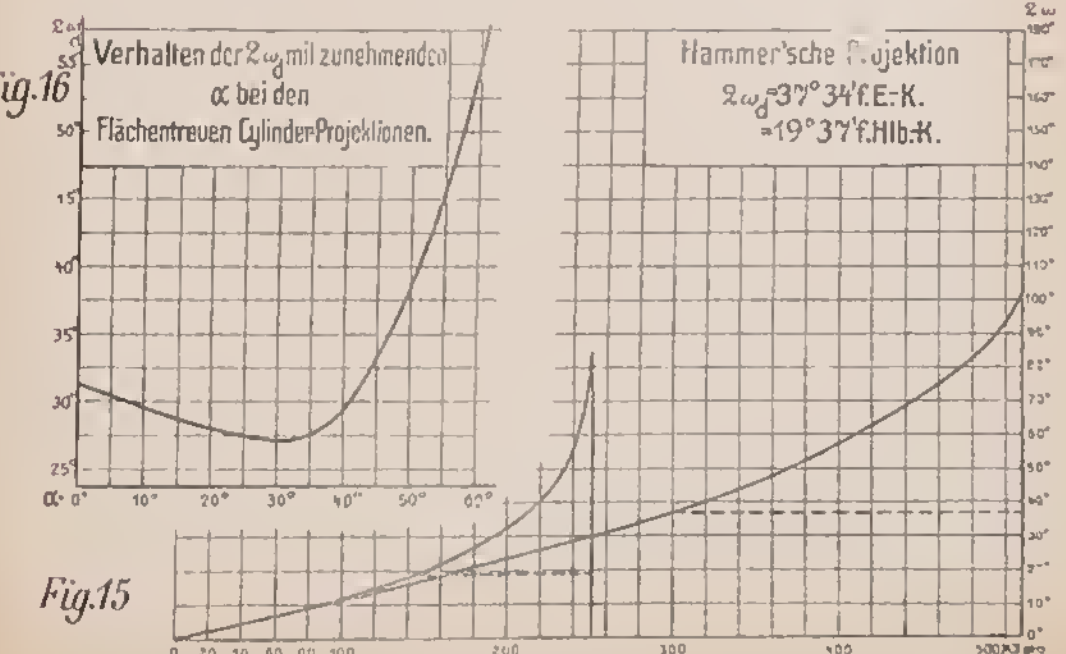
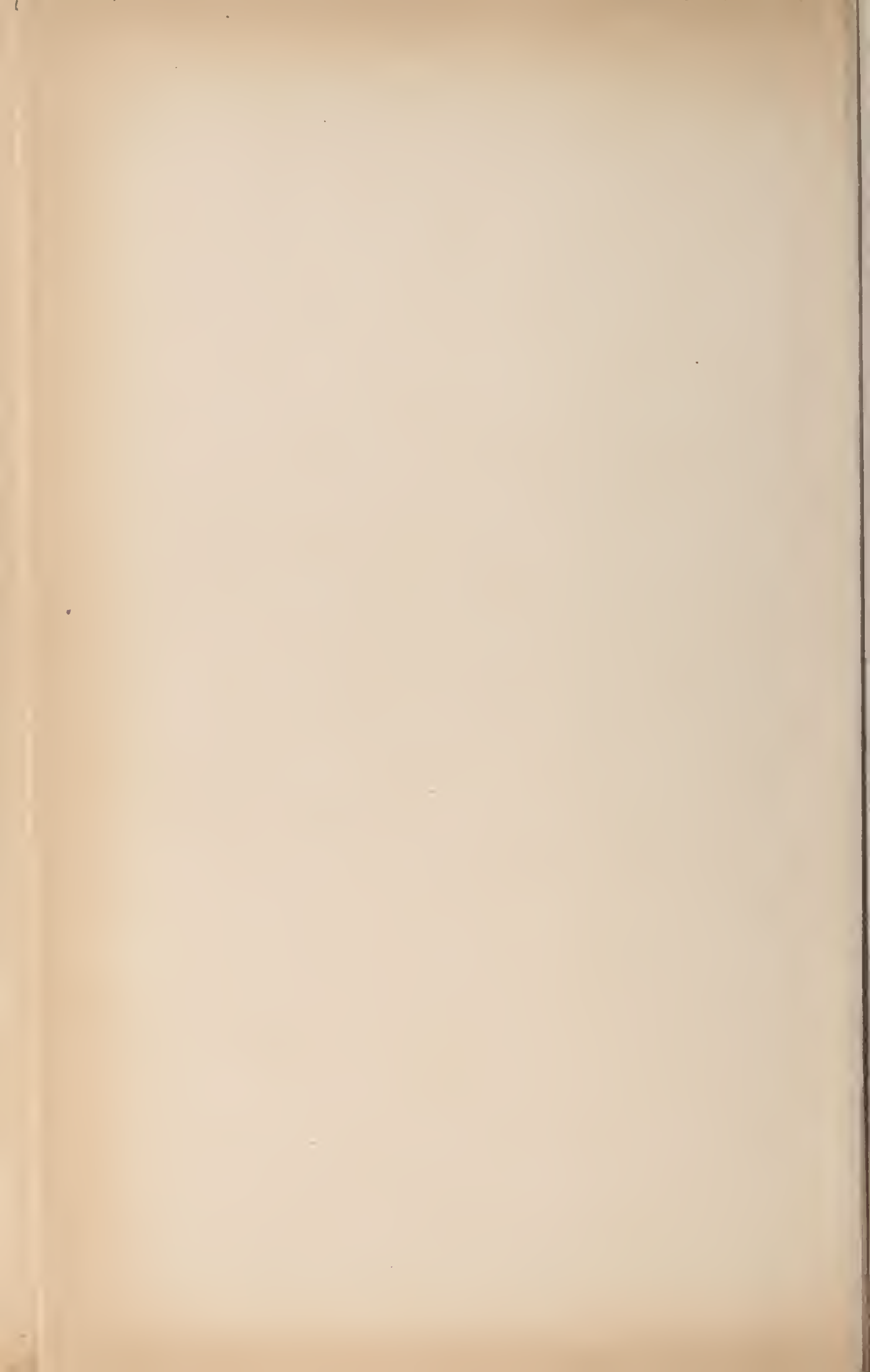


Fig. 16 Fig. 15



Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909. 14. Abhandlung

Eine neue Form des Ebertschen Aspirations-Apparates

von

Dr. C. W. Lutz

Mit 1 Tafel

Vorgelegt am 3. Juli 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Das von H. Ebert[1]) im Jahre 1901 in die luftelektrische Meßtechnik eingeführte Aspirationsprinzip hat sich seither durchaus bewährt. Mit dem „Aspirationsapparat“ gelang es Ebert zuerst, die in der Luft in Form von Ionenladungen vorhandenen positiven und negativen Elektrizitätsmengen in absolutem Maße $\left(\frac{\text{E. st. E.}}{m^3}\right)$ zu bestimmen. Neben den Ionendichten n_+ und n_- lassen sich mit demselben Apparat noch zwei weitere luftelektrische Elemente, die Ionenbeweglichkeiten v_+ und v_- messen.[2])

Zahlreiche Beobachter haben an verschiedenen Orten der Erde ein wichtiges Beobachtungsmaterial mittels des Ebertschen Apparates gewonnen.[3]) Die dabei in apparattechnischer Beziehung gemachten Erfahrungen haben nun mancherlei Wünsche zwecks weiterer Verbesserung des Aspirationsapparates laut werden lassen, namentlich in Hinsicht auf das Meßinstrument, das Exner-Elster-Geitelsche Elektroskop.[4]) Bekanntlich handelt es sich bei den Aspirationsmessungen um die möglichst genaue Ermittelung eines kleinen Ladungsverlustes. Hierzu wird in der bisherigen Weise der Span-

---

[1]) H. Ebert, Phys. Zeitschr. 2, 662, 1901; Ill. Aeronaut. Mitt. 6, 178, 1902; Verh. d. D. Phys. Ges. 7, 35, 1905.

[2]) H. Mache, Phys. Zeitschr. 4, 717, 1903.

[3]) Eine Zusammenstellung des Beobachtungsmateriales findet sich bei: A. Gockel. Die Luftelektrizität, Leipzig 1908, S. 31 u. f. und H. Mache und E. v. Schweidler, Die atmosphärische Elektrizität. Braunschweig 1909, S. 88 u. f.

[4]) Über Fehlerquellen bei Ionenmessungen siehe u. a.: A. Daunderer, Inauguraldissertation, München (Techn. Hochsch.) 1908, S. 14.

1*

nungsverlust direkt gemessen, den der Innenzylinder des Aspirators beim Durchströmen einer bekannten Luftmenge erfährt. Aus diesen beiden Größen und der Kapazität des Apparates kann dann der Ladungsverlust (gleich der in der durchgesaugten Luftmenge enthaltenen Elektrizitätsmenge) berechnet werden. Um nicht allzu große Fehler bei der Messung des meist kleinen Spannungsrückganges zu begehen, muß die Aspirationsdauer für jedes luftelektrische Element auf ca. 15 Min. ausgedehnt werden; die Gesamtmeßdauer für alle vier Elemente beträgt also über $1^1/_2$ Stunden. Eine wesentliche Abkürzung der Beobachtungszeit dürfte daher, namentlich wegen der meist raschen Veränderlichkeit der luftelektrischen Größen, vor allem anzustreben sein.

Verfeinert man die Ablesung durch Verwendung eines Mikroskopes, so stören die Mängel des Blättchenelektroskopes[1]) (Unregelmäßigkeit des Blättchenganges) erst recht, außerdem muß jetzt der Aspirationsapparat erst genau justiert werden und in seiner Lage auch während der ganzen Messung beharren. Ist eine derartige genaue Einstellung schon bei Messungen im freien Gelände unbequem, so wird sie auf bewegten Schiffen oder im Freiballon völlig unmöglich, wie Versuche erst in letzter Zeit wieder gezeigt haben.[2])

Allen diesen Mängeln abzuhelfen, schien mir das Saitenelektrometer[3]) in Verbindung mit einem von M. Hurmuzescu[4]) angegebenen variabeln Kondensator ganz besonders geeignet. Einen Ebertschen Aspirationsapparat mit Saitenelektrometer und variabler Kapazität hat die Firma Edelmann & Sohn nach meinen Angaben ausgeführt. Fig. 1 zeigt in schematischer Darstellung einen Längsschnitt durch den Apparat, Fig. 2 eine photographische Ansicht von vorne.

---

[1]) Cri-Cri-Erscheinung. H. Ebert, Phys. Zeitschr. 6, 642, 1905.

[2]) K. W. F. Kohlrausch, Wiener Ber. 118 (IIa), 26, 1909; P. H. Dike, Terrestr. Magnet. 13, 120, 1909.

[3]) C. W. Lutz, Phys. Zeitschr. 9, 100 und 642, 1908.

[4]) M. Hurmuzescu, Le Radium 5, 331, 1908.

I. Beschreibung des Apparates.[1])

Der Innenzylinder Z eines Ebertschen Aspirators A (Fig. 1) sitzt mittels des vertikalen Trägers t auf dem Zuleitungsstab st eines Saitenelektrometers S auf und steht so mit der Saite s in leitender Verbindung. Der Saite gegenüber steht in geringem Abstande (1 bis 4 mm) die mit dem Gehäuse (Erde) leitend verbundene Influenzschneide J. Die sonst beim Saitenelektrometer verwendete zweite Schneide kann hier wegfallen, da für diesen Zweck das Elektrometer nur in „Influenzschaltung" verwendet wird. Wird der Innenzylinder Z und damit die Saite geladen, so zieht die Influenzschneide sie zu sich heran, der entstehende Saitenausschlag wird am Okular-Mikrometer des Mikroskopes M (Fig. 2) abgelesen. Verwendet wird ein Zeiß-Mikroskop, Apochromatobjektiv 16 mm und Kompensationsokular Nr. 18 von 281facher Vergrößerung.

Da wir es hier, wie noch näher ausgeführt wird, mit einer Art Nullmethode zu tun haben, bei welcher eine ursprüngliche Saitenstellung durch Verschiebung des Kondensators genau wieder herzustellen ist, so ist eine möglichst große Einstellungsempfindlichkeit anzustreben. Dies wurde durch ein besonderes Okularmikrometer erreicht, welches nach Angaben Eberts durch die Firma Zeiß, Jena angefertigt wurde. Dieses Mikrometer (Fig. 3) trägt über und unter dem Mittelteilstrich (30) je ein kleines liegendes, in der Mitte offenes Kreuzchen. Beim Beginne der Aspiration wird das Mikroskop auf seinem Schlitten seitwärts so verschoben, daß der rechte, scharf zu beleuchtende Rand des Saitenbildes die linken inneren Enden der Kreuzchenstriche eben berührt. Fig. 3 zeigt das im Mikroskope sichtbare Bild. Diese Einstellung kann mit größter Schärfe vorgenommen werden. Schon eine Verschiebung des Kondensators um 0,5 Trommelteile $= \frac{1}{100}$ mm, entsprechend einer Kapazitätsänderung von 0,0077 cm (siehe weiter unten S. 9), bringt eine wahrnehmbare Änderung der Saitenstellung

[1]) Der Apparat wird von der Firma M. Th. Edelmann & Sohn geliefert.

hervor. Hierin tritt deutlich die Überlegenheit der Hurmuzescuschen Methode, den Ladungsverlust mittels variabler Kapazität zu messen, über die alte Methode hervor, nach welcher ein kleiner Spannungsrückgang durch das relativ unempfindliche Blättchenelektroskop gemessen wird.

Das Okularmikrometer wird in Volt geeicht, so daß zu jedem Saitenausschlag (in Mikrometerteilen von 0 links an gerechnet) einer zu zeichnenden Eichkurve das Potential des Innenzylinders Z in Volt entnommen werden kann (s. Fig. 4).

Am oberen Teil des Saitenelektrometers ist der variable Kondensator K (Fig. 1 und 2) angebracht. Er besteht aus einem senkrecht in t eingesteckten dünnen zylindrischen Stiftchen k und einem Röhrchen r, zentrisch in dem verschiebbaren Rohrsystem R_1 R_2 gelagert. Mittels Zahnstange und Trieb läßt sich Rohr R_2 und damit r im Rohr R_1 verschieben und die Größe dieser Verschiebung an der in 100 Teile geteilten Trommel O (Fig. 2) ablesen. Einer vollen Trommelumdrehung entspricht eine Verschiebung des Kondensators um 2,1 cm. In seiner Normalstellung ist der Kondensator völlig zusammengeschoben, der Index i (Fig. 2) steht auf Trommelteil O. Nach Öffnung des Deckels d (Fig. 1 und 2) kann man in den Kondensator blicken, um sich von der richtigen Zentrierung des Stiftes k innerhalb r zu überzeugen. Auch kann man durch diese Öffnung zu der kleinen Schraube a (Fig. 1) gelangen, welche den Träger t im Stift st festklemmt, und so für eine richtige Zentrierung des Innenzylinders Z innerhalb des Aspirationsrohres A sorgen, wenn sich etwa einmal Z seitwärts gedreht haben sollte. Mittels eines Steckdeckels D (Fig. 2) kann der Aspirator vorne und durch den Schieber sch hinten verschlossen werden. Der ganze Aspirations-Apparat ist in einem tragbaren Holzkasten eingebaut, dessen vordere und hintere Seitenwand herausgenommen werden kann. Vor dem Wiedereinstellen dieser Seitenwände ist der vordere Rohrteil des Mikroskopes herauszuziehen und in das Loch l unter der Turbine T einzustecken. Dort wird auch der Schlüssel zum Aufziehen der Turbine beim Trans-

porte verwahrt. Die beiden Holzklötze h_1 und h_2 (Fig. 2) dienen zur Aufnahme der in einer Blechhülse steckenden Zamboni-Ladesäule, die Klötze h_3 und h_4 zur Aufbewahrung des Macheschen Zusatzkondensators U.

II. Wirkungsweise und Konstanten des Apparates.

Der Innenzylinder Z des Apparates (Fig. 1) sei auf ein Potential V Volt aufgeladen. Die Gesamtkapazität (Zylinderkondensator $AZ +$ variabler Kondensator $K +$ Saitenelektrometer S) bei ganz zusammengeschobenem Kondensator K betrage C cm. Während der Aspiration wird die Ladung des Innenzylinders:

$$M = C \cdot V$$

durch die im Luftstrome mitgeführten Ionen mehr und mehr neutralisiert, das ursprüngliche Potential V sinkt nach Durchsaugen einer bestimmten Luftmenge F auf einen Betrag V_1. Verkleinert man nun die Kapazität C des Apparates durch Ausziehen des Kondensators so lange (um ΔC), bis das Anfangspotential V (dieselbe Saiteneinstellung siehe Fig. 3) wieder erreicht ist, so ist der Ladungsverlust ΔM:

$$\Delta M = V \cdot \Delta C.$$

Kennt man also V und ΔC, so läßt sich ΔM, d. i. die in der durchgesaugten Luftmenge F enthaltene Elektrizitätsmenge berechnen.

Zur Ermittelung des Potentiales V aus dem Saitenausschlag muß das Okularmikrometer wie erwähnt in Volt geeicht werden. Die Eichkurve wird zweckmäßig auf Millimeterpapier im Maßstabe 1 Volt = 1 mm (Ordinatenachse), 1 Mikrometerteil gleich 10 mm (Abszissenachse) gezeichnet. Fig. 4a zeigt in kleinerem Maßstabe eine Eichkurve bei stärkster Saitenspannung (Trommelteil O des Spannkopfes), Fig. 4b eine solche bei nur wenig entspannter Saite (Trommelteil 3), beide bei 4 mm Abstand der Influenzschneide von der Saite. Fig. 4c wurde bei stärkster Saitenspannung aber kleinerem Schneiden-

abstand (= 1,5 mm) erhalten. Je nach dem Spannungsbereiche, in dem man zu arbeiten gedenkt, wird man also Schneidenabstand und Saitenspannung[1]) wählen. Direkte Messungen ergaben folgende Empfindlichkeiten bei 4 a : 1 Volt = 0,1 Mikr. T., bei 4 b : 1 Volt = 0,2 Mikr. T., bei 4 c : 1 Volt = 0,3 Mikr. T.

Aus Fig. 4 a ist zu ersehen, daß die Saite erst bei einem Potential von ca. 630 Volt das Ende des Okularmaßstabes erreicht. Um noch höhere Spannungen messen zu können, wie dies vielleicht zum Einfangen besonders träger Ionen gewünscht werden könnte, ist der Schneidenabstand zu vergrößern, was bei einiger Geschicklichkeit vom Beobachter selbst vorgenommen werden kann.[2])

Sollte bei größeren Ausschlägen das Seitenbild im Mikroskop unscharf werden, wie dies nach einer Verstellung der Influenzschneide eintreten kann, so ist der Träger der Schneide um seine Längsachse zu verdrehen. Zu diesem Zwecke lockert man, nach Herausnehmen des Elektrometereinsatzes, die Schraube durch die Deckplatte und verdreht dann den Schneidenträger entsprechend, bis die Bewegung der Saite genau senkrecht zur Mikroskopachse erfolgt, das Saitenbild also an jeder Stelle des Okularmikrometers scharf erscheint. Erst dann wird die Befestigungsschraube des Schneidenträgers wieder angezogen.

Hier sei gleich eine vorzügliche Eigenschaft des Saitenelektrometers erwähnt, nämlich seine äußerst geringe Empfindlichkeit gegen Neigungen und Erschütterungen, die selbst bei etwas entspannter Saite (Eichkurve Fig. 4 b) noch besteht.

---

[1]) Um die Saite beim Transporte nicht zu gefährden, wird sie vom Fabrikanten beim Verschicken eines Elektrometers entspannt. Sie ist daher vor der Eichung ein für allemal anzuspannen, wobei die Regel gilt: Anspannen der Saite = Herausdrehen des Spannkopfes, abnehmende Zahlen der Teiltrommel. Teilstrich 0 (Anschlag) = stärkste Saitenspannung.

Entspannen der Saite = Hineindrehen des Spannkopfes, zunehmende Zahlen der Teiltrommel. Anschlag = schwächste Saitenspannung.

[2]) C. W. Lutz, Phys. Zeitschr. 9, 101, 1908.

Infolge dieser Eigenschaft wird sich jetzt der Ebertsche Aspirationsapparat auch zu Messungen auf Schiffen und im Freiballon verwenden lassen, wobei auch die an jedem Elektrometer angebrachte Temperaturkompensation von Vorteil sein wird.

ΔC kann aus der Trommelablesung berechnet werden, wenn die Kapazitätsänderung c beim Verschieben des Kondensators um seinen ganzen Hub (100 Trommelteile) bekannt ist. Diese Konstante wird auf experimentellem Wege bestimmt.

Mittels eines Harmschen Kondensators[1]) wird die Gesamtkapazität des Aspirations-Apparates für die beiden Endstellungen des Kondensators O und 100 gemessen. Sie beträgt für den beschriebenen Apparat bei ganz zusammengeschobenem Kondensator (Trommelteil 0) 25,59 cm bei ganz ausgezogenem Kondensator (Trommelteil 100) 24,04 cm. Einer Verschiebung des Kondensators um 100 Trommelteile entspricht also eine Kapazitätsverminderung $c = 25{,}59 - 24{,}04 = 1{,}55$ cm. Zu jeder Verschiebung um a Trommelteile läßt sich jetzt die Kapazitätsabnahme ΔC angeben:

$$\Delta C = \frac{1{,}55}{100} \cdot a \text{ cm}.$$

Dies setzt voraus, daß die Kapazitätsabnahme proportional der vom Kondensator zurückgelegten Wegstrecke erfolgt, was zu erwarten ist, wenn die Bewegung des Kondensatorröhrchens r (Fig. 1) achsial zum Stift k erfolgt. Um dies nachzuprüfen, ladet man das Saitenelektrometer bei zusammengeschobenem Kondensator auf und liest das zu dieser Kondensatorstellung $a = 0$ gehörige Potential V ab. Nun verschiebt man den Kondensator und erhält zu einer anderen Trommelstellung a_1 einen größeren Saitenausschlag, also ein höheres Potential V_1. So fortfahrend lassen sich eine Reihe zusammengehöriger Werte V und a gewinnen, mit deren Hilfe sich eine Eichkurve (Fig. 5a bis e) zeichnen läßt. Wie man aus der Fig. 5

[1]) F. Harms, Phys. Zeitschr. 5, 47, 1904.

ersieht, ergibt die Eichung des Kondensators für verschiedene Anfangspotentiale (benützt wurde die Eichkurve Fig. 4 b) in der Tat stets eine Gerade.

Hier ist noch ein Umstand zu erwähnen. Die Kapazität des Saitenelektrometers ändert sich mit dem Saitenausschlag. Je größer der Saitenausschlag ist, je näher also die Saite der geerdeten Influenzschneide steht, desto größer ist auch die Kapazität. Freilich kann diese Kapazitätsänderung nur sehr klein sein, denn es ergaben sich bei wiederholten Messungen nach der Harmschen Methode für alle Saitenausschläge stets dieselben, S. 9 angegebenen Kapazitätswerte.

Nach der Methode von Th. Wulf[1]) gelang es, diese geringen Kapazitätsänderungen ihrem absoluten Werte nach zu messen. Steht die Saite bei ungeladenem Elektrometer 4 mm von der Influenzschneide entfernt (Eichkurve Fig. 4 a und b) und nähert sie sich um die ganze Länge des Okularmaßstabes (= 0,6 mm) der Influenzschneide, so wächst dadurch die Kapazität um 0,007 cm. Bei 1,5 mm anfänglichem Schneidenabstande (Eichkurve 4 c) beträgt diese Größe 0,009 cm. Diese Werte sind also so klein, daß sie bei unseren Messungen völlig vernachlässigt werden dürfen, um so mehr, als dabei die Saite nur einen kleinen Teil des Okularmaßstabes durchläuft. Es gelten also für alle Saitenausschläge die S. 9 angegebenen, nach der Harmsschen Methode bestimmten Kapazitätswerte, deren Richtigkeit sich übrigens mit Hilfe des variablen Kondensators leicht in folgender Weise nachprüfen läßt. Bei ganz zusammengeschobenem Kondensator (Kapazität C) ladet man den Apparat auf ein Potential V auf und zieht nun den Kondensator völlig aus. Hierdurch sinkt die Kapazität auf den Betrag C_1, das Potential steigt auf den Wert V_1. Da hiedurch die Ladung (Elektrizitätsmenge) auf dem Elektrometer nicht verändert wurde, so gilt, wie eine einfache Rechnung zeigt:

$$C = C_1 \cdot \frac{V_1}{V}.$$

[1]) Th. Wulf, Phys. Zeitschr. 10, 253, 1909.

Durch Wiederzurückdrehen des Kondensators kann man sich davon überzeugen, daß keine Elektrizität durch Isolationsmangel während der Messung verloren ging. Setzt man für C_1 den nach Harms bestimmten Wert $C_1 = 24{,}04$ cm ein und bestimmt aus den abgelesenen Saitenausschlägen mittels der Eichkurve die Potentiale V und V_1 in Volt, so muß sich für C der bereits bekannte, nach der Harmsschen Methode ermittelte Wert $C = 25{,}59$ cm ergeben. Nachstehende Tabelle gibt in der ersten und zweiten Spalte die Anfangs- und Endpotentiale V und V_1 (aus Eichkurve Fig. 4b), wie sie sich bei der Eichung des Kondensators (S. 9 und Fig. 5) ergaben. In der dritten Spalte sind die Differenzen $V_1 - V$ und in der vierten die nach obiger Formel berechneten Werte für C angeführt.

V	V_1	$V_1 - V$	C
362,5	384,9	22,4	25,53
289,3	306,9	17,6	25,51
227,9	243,0	15,1	25,63
149,7	159,7	10,0	25,65
110,9	118,1	7,2	25,60
		Mittelwert	25,58 cm

Der Mittelwert $C = 25{,}58$ cm stimmt also sehr befriedigend mit dem durch direkte Messung gefundenen Wert $C = 25{,}59$ cm überein.

Ist in der beschriebenen Weise V und ΔC ermittelt, so können wir bei bekannter Fördermenge F (vom Fabrikanten angegeben[1]) die im m^3 durchgesaugter Luft enthaltene Elektrizitätsmenge E berechnen.

$$\Delta M = E = \frac{V}{300} \cdot \frac{1{,}55}{100} \cdot \frac{a}{F} \quad \frac{\text{E. st. E.}}{m^3}.$$

Wie die Messung am zweckmäßigsten im einzelnen durchgeführt wird, soll im nächsten Abschnitt gezeigt werden.

---

[1]) Diese Angaben wurden nach der Ebertschen Rauchmethode (Ill. Aeronautische Mitt., Heft 4, 1902) nachgeprüft. Dabei zeigte sich, daß diese Methode bei einiger Sorgfalt völlig befriedigende Werte liefert.

III. Handhabung des Apparates, Berechnung der Messungen.

1. Ionendichten n_+ und n_-.

Man stellt den Aspirations-Apparat auf einer horizontalen Unterlage auf. erdet ihn (Klemme *e*, Fig. 2), öffnet den Schieber *sch*, entfernt den Deckel *D* und den Verschlußring *v* von der Turbine *T*, zieht diese auf, setzt sie durch Abwärtsdrücken des kleinen Pedales *p* in Gang und rückt die Nummernscheibe *n* auf Ziffer „5“. Mittels einer Zambonisäule wird sodann der Innenzylinder *Z* (Fig. 1) aufgeladen und beim ersten Glockensignal (Glockenzeichen „0“) der Saitenausschlag (rechter scharf zu beleuchtender Saitenrand) abgelesen. Sogleich nachher verschiebt man durch Drehen der Schlittenschraube *sl* (Fig. 2) das Mikroskop so lange, bis das Saitenbild die in Fig. 3 gezeichnete Lage einnimmt. Nach dieser Einstellung zieht man die Turbine neu auf und wartet das nächste Glockenzeichen „1“, das beim vorbeschriebenen Apparat nach 149 sec ertönt, ab. Zwischen je zwei Glockenzeichen fördert die Turbine $F = 0{,}19878$ m³ Luft. Die darin enthaltene Elektrizitätsmenge genügt in den meisten Fällen bereits, um einen deutlich wahrnehmbaren Rückgang des Saitenausschlages hervorzubringen. Wenn nicht, so wartet man ein weiteres Glockenzeichen „2“ ab, vorher neu aufziehend. Man hat dann die doppelte Fördermenge $2F = 2 \cdot 0{,}19878 = 0{,}39756$ m³ in die Rechnuug einzusetzen. Nach Beendigung der Aspiration (bei Glockenzeichen „1“ bzw. „2“) verschiebt man mittels des Triebes *O* (Fig. 2) den Kondensator so lange nach auswärts, bis die Saite genau wieder in ihre Anfangslage zurückgekehrt ist (Fig. 3). Die Größe dieser Verschiebung wird in Trommelteilen *a* abgelesen. Um den toten Gang des Kondensatortriebes zu beseitigen, ist immer nur nach rechts (Uhrzeigersinn) zu drehen. Hat man beim Einstellen der Saite auf die Kreuzchenspitzen die Teilscheibe 0 versehentlich zu weit nach rechts gedreht, so drehe man ein gutes Stück zurück, um durch erneutes Rechtsdrehen nunmehr die richtige Einstellung zu erreichen. Zu demselben Zweck läßt sich die Scheibe 0 einige Teilstriche über Null hinaus zurückdrehen.

so daß auch die Einstellung auf den Nullpunkt durch eine Rechtsdrehung bewirkt werden kann.

Ist in der beschriebenen Weise. etwa für eine + Ladung des Apparates die Messung durchgeführt, so wird der Innenzylinder durch leichtes Berühren mit der Hand entladen, das Mikroskop zurückgedreht, so daß die Saite wieder auf O (links) einsteht, nunmehr — aufgeladen und weiter ganz in derselben Weise verfahren, wie eben angegeben. Während der ganzen Messung braucht die Turbine nicht abgestoppt zu werden, sie ist lediglich nach jedem Glockenzeichen neu aufzuziehen. Mittels der drei Größen V in Volt, a in Trommelteilen, F in m^3 berechnet sich die im m^3 enthaltene — Elektrizitätsmenge (wenn der Innenzylinder + geladen war) oder + Elektrizitätsmenge (bei — geladenem Innenzylinder) nach S. 11 zu:

$$E = \frac{1,55}{300 \cdot 100} \frac{V \cdot a}{F} \frac{\text{E. st. E.}}{m^3}.$$

Von dieser Elektrizitätsmenge E ist noch der Ladungsverlust über die Isolatoren abzuziehen. Zur Messung desselben wird das Elektrometer aufgeladen, das Aspirationsrohr vorne durch den Steckdeckel, hinten durch den Schieber verschlossen, und nunmehr der Apparat längere Zeit sich selbst überlassen. Die durch mangelhafte Isolation verlorengehende Elektrizitätsmenge wird gerade so gemessen, wie E, nur daß jetzt die Turbine stillsteht.

Bei der vorzüglichen Isolation des Elektrometers (zwei Stopfen aus echtem Bernstein) ist dieser Ladungsverlust für die Aspirationsdauer von $2^1/_2$ bis 5 Min. so gering, daß er meist außerhalb der Fehlergrenze der Methode liegt und nicht weiter berücksichtigt zu werden braucht.

Wichtig sind außer den Absolutwerten E_+ und E_- namentlich die Differenzen $E_+ - E_- = Q$, sowie die Verhältnisse $q = \frac{E_+}{E_-}$, welche ein Maß für die Unipolarität geben.

Mit Rücksicht auf die bekannte Ladung der Gasionen $\varepsilon = 4{,}6 \cdot 10^{-10}$ E. st. E. ergiebt sich die + und — Jonendichte zu:

$$n_+ = \frac{E_+}{4{,}6 \cdot 10^{-4}} \text{ + Ionenzahl im cm}^3$$

$$n_- = \frac{E_-}{4{,}6 \cdot 10^{-4}} \text{ — Ionenzahl im cm}^3.$$

2. Ionenbeweglichkeit v_+ und v_-.

Man ladet den Innenzylinder $Z+$, steckt den beigegebenen Macheschen Hilfkondensator[1]) vor, erdet ihn und bestimmt in der unter 1. S. 12 angegebenen Weise den Ladungsverlust E_1.

Hierauf ladet man auch den Innenzylinder des Vorsteckkondensators etwa mittels einer kleinen Kalomelbatterie auf ein niederes, ebenfalls + Potential von ca. $\delta V = +16$ Volt auf und mißt aufs neue den Ladungsverlust E_2, der jetzt bedeutend geringer ausfällt, da ein Teil der — Ionen bereits im Vorschaltkondensator abgefangen wird. E_1 und E_2 seien, wenn nötig, schon wegen der Isolationsverluste korrigiert. Die Berechnung der E_1 und E_2 geschieht nach der Formel S. 13, nur ist hier für F die etwas geringere Fördermenge bei vorgestecktem Kondensator $F_s = 0{,}19020$ m³ (zwischen 2 Glockenzeichen) einzusetzen.

Aus der Gleichung

$$\Delta V = \delta V \cdot \frac{E_1}{E_1 - E_2}$$

berechnet sich jene Potentialdifferenz ΔV, die angelegt werden müßte, um im Vorsteck-Kondensator eben noch alle Ionen abzufangen. Hieraus ergibt sich dann nach Mache die Beweglichkeit der — Ionen zu:

$$v_- = \frac{F_s \cdot \text{lognat}\,\frac{R}{r}}{2\pi L \cdot \Delta V} \quad \frac{\text{cm} \mid \text{sec}}{\text{Volt} \mid \text{cm}}$$

[1]) H. Mache, Phys. Zeitschr. 4. 717, 1903. H. Mache und E. von Schweidler, Die atmosphärische Elektrizität. Braunschweig 1909, S. 95.

worin bedeutet:

F_s = Fördermenge in $\frac{cm^3}{sec}$ bei vorgeschaltetem Kondensator = 1294 $\frac{cm^3}{sec}$.

R = Innerer Radius des Kondensatorrohres (Mache) = 1,5 cm.

r = Radius des Innenzylinders des Vorsteck-Kondensators = 0,25 cm.

L = Länge desselben = 12,0 cm.

In ganz derselben Weise wird bei — geladenen Innenzylindern das v_+ bestimmt.

Aus den vier Größen $n_+ n_-$ und $v_+ v_-$ zusammen läßt sich die spezifische Leitfähigkeit λ der Luft berechnen:

$$\lambda = \varepsilon (v_+ n_+ + v_- n_-).$$

Nachstehendes Beispiel soll die Anwendung der Formeln erläutern:

Am 10. August 1909 3^h p. m. wurden im Garten der Technischen Hochschule bei heiterem Wetter folgende Werte erhalten:

1. Ionendichten n_+ und n_-.

+ Ladung, Saitenausschlag $a = 31{,}9$, $V = 232$ Volt (Eichkurve Fig. 4 b), Kondensatorverschiebung nach 149 sec Aspirationsdauer (1 Glockenzeichen) von 0 auf 8,7, also $a = 8{,}7$ Trommelteile; nach S. 13.

$$E_- = \frac{1{,}55}{300 \cdot 100 \cdot 0{,}19878} \cdot V \cdot a = 2{,}60 \cdot 10^{-4} \cdot 232 \cdot 8{,}7$$

$$E_- = 0{,}52 \frac{\text{E. st. E.}}{\text{m}^3}.$$

— Ladung: $a = 32{,}2$, $V = 236$ Volt, Kondensatorverschiebung von 8,7 bis 18,7, $a = 10{,}0$ Tr. T. Der Kondensator braucht bei der zweiten Messung nicht erst auf 0 zurückgestellt zu werden.

$$E_+ = 2{,}60 \cdot 10^{-4} \cdot 236 \cdot 10{,}0 = 0{,}61 \frac{\text{E. st. E.}}{\text{m}^3}.$$

Isolationsprüfung.

Dieselbe wird am besten am Anfange oder nach Beendigung der gesamten Messung angestellt. Bei geschlossenem Apparat und stillstehender Turbine ergaben sich folgende Werte:

— Ladung $V = 236$ Volt, nach 60 Min. Kondensatorverschiebung $a = 10{,}0$ Tr. T. Verlust e in 149 sec (Aspirationsdauer):

$$e = \frac{1{,}55}{300 \cdot 100} \cdot 236 \cdot 10{,}0 \cdot \frac{149}{60 \cdot 60}$$

$$e = 0{,}005 \text{ E. st. E.}$$

Also zu vernachlässigen.

$$Q = E_+ - E_- = 0{,}61 - 0{,}52 = 0{,}09$$

$$q = \frac{E_+}{E_-} = \frac{0{,}61}{0{,}52} = 1{,}17$$

$$n_+ = \frac{E_+}{4{,}6 \cdot 10^{-4}} = \frac{0{,}61}{4{,}6 \cdot 10^{-4}} = 1330 + \text{Ionen im cm}^3$$

$$n_- = \frac{0{,}51}{4{,}6 \cdot 10^{-4}} = 1110 - \text{Ionen im cm}^3.$$

2. Ionenbeweglichkeiten v_+ und v .

a) Bei geerdetem Vorschaltkondensator:

$+$ Ladung $V = 230$ Volt, $a = 7{,}7$ Tr. T.

$$E_{1-} = \frac{1{,}55 \cdot a \cdot V}{300 \cdot 100 \cdot 0{,}1902} = 2{,}71 \cdot 10^{-4} \cdot 230 \cdot 7{,}7$$

$$= 0{,}48 \frac{\text{E. st. E.}}{\text{m}^3}$$

— Ladung $V = 232$ Volt, $a = 8{,}3$ Tr. T.

$$E_{1+} = 2{,}71 \cdot 10^{-4} \cdot 232 \cdot 8{,}3 = 0{,}52 \frac{\text{E. st. E.}}{\text{m}^3};$$

b) Vorschaltkondensator auf $\delta V = \pm 16$ Volt geladen:

$$E_{2-} = 0{,}17 \cdot \frac{\text{E. st. E.}}{\text{m}^3}$$

$$E_{2+} = 0{,}25 \cdot \frac{\text{E. st. E.}}{\text{m}^3}.$$

$$+ \text{ Ladung } \Delta V = \delta V \cdot \frac{E_1}{E_1 - E_2}$$

$$= 16 \cdot \frac{0{,}48}{0{,}48 - 0{,}17} = 24{,}8 \text{ Volt}$$

$$- \text{ Ladung } \Delta V = 16 \cdot \frac{0{,}52}{0{,}52 - 0{,}25} = 30{,}8 \text{ Volt}$$

$$v_- = \frac{F_s \cdot \text{lognat} \frac{R}{r}}{2 \pi L \cdot \Delta V} = \frac{1294 \cdot \text{lognat} \frac{1{,}5}{0{,}25}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 12{,}0 \cdot \Delta V}$$

$$= v_- = 1{,}24 \frac{\text{cm} \mid \text{sec}}{\text{Volt} \mid \text{cm}}$$

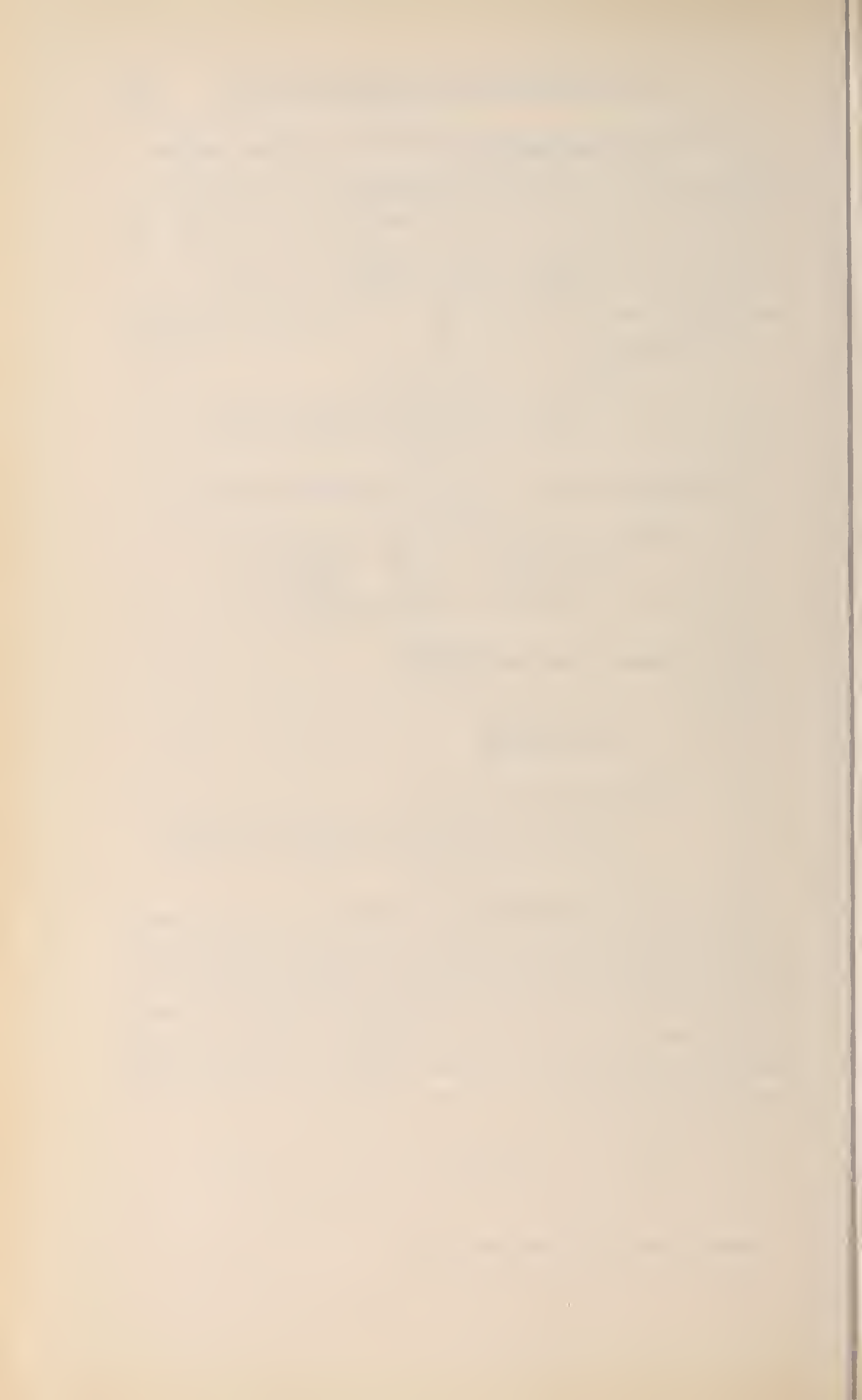
$$v_+ = 0{,}99 \frac{\text{cm} \mid \text{sec}}{\text{Volt} \mid \text{cm}}$$

$$\lambda = \varepsilon (v_+ n_+ + v_- n_-)$$

$$= 4{,}6 \cdot 10^{-10} (0{,}99 \cdot 1330 + 1{,}24 \cdot 1110) \cdot 300$$

$$\lambda = 3{,}71 \cdot 10^{-4} \text{ E. st. E.}$$

Die vorstehenden Messungen wurden alle im Physikalischen Institute der Technischen Hochschule ausgeführt. Herr Prof. Dr. H. Ebert hat mir die hiezu nötigen Apparate in liebenswürdigster Weise zur Verfügung gestellt und auch sonst meine Arbeit durch wertvolle Ratschläge auf das wirksamste gefördert, wofür ich auch an dieser Stelle meinen besten Dank aussprechen möchte.



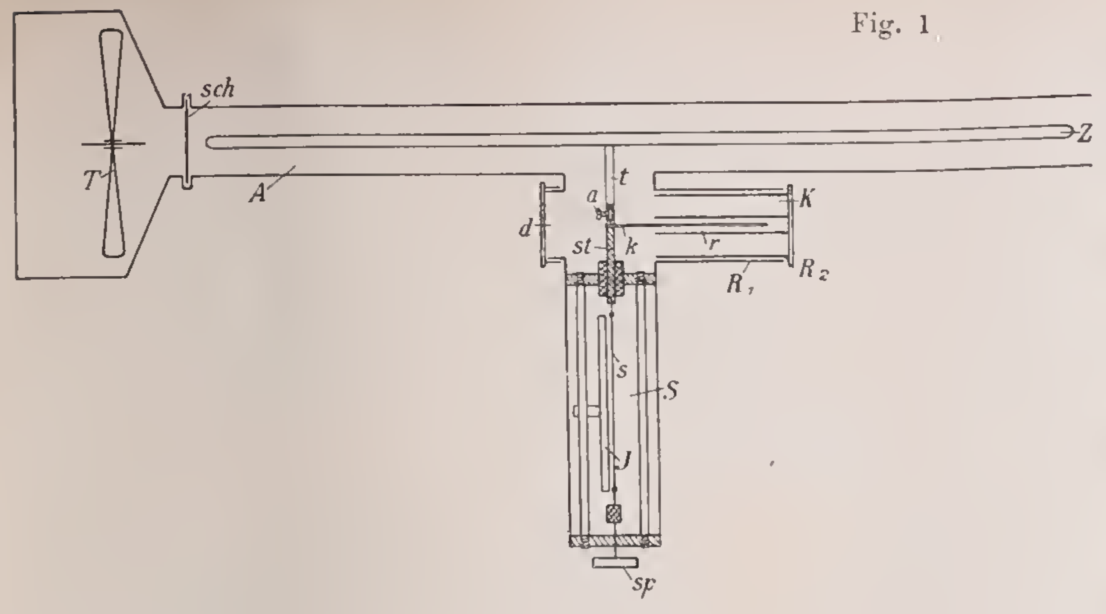
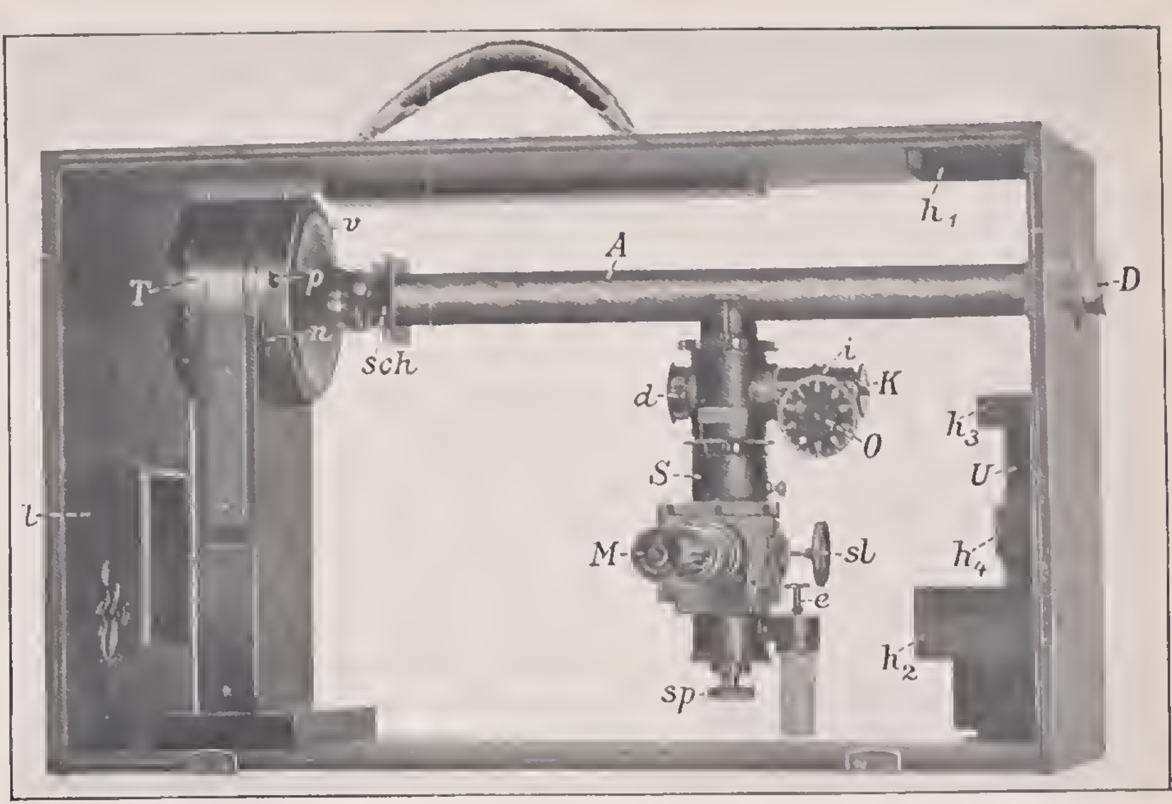


Fig. 1



Fig. 2



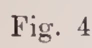
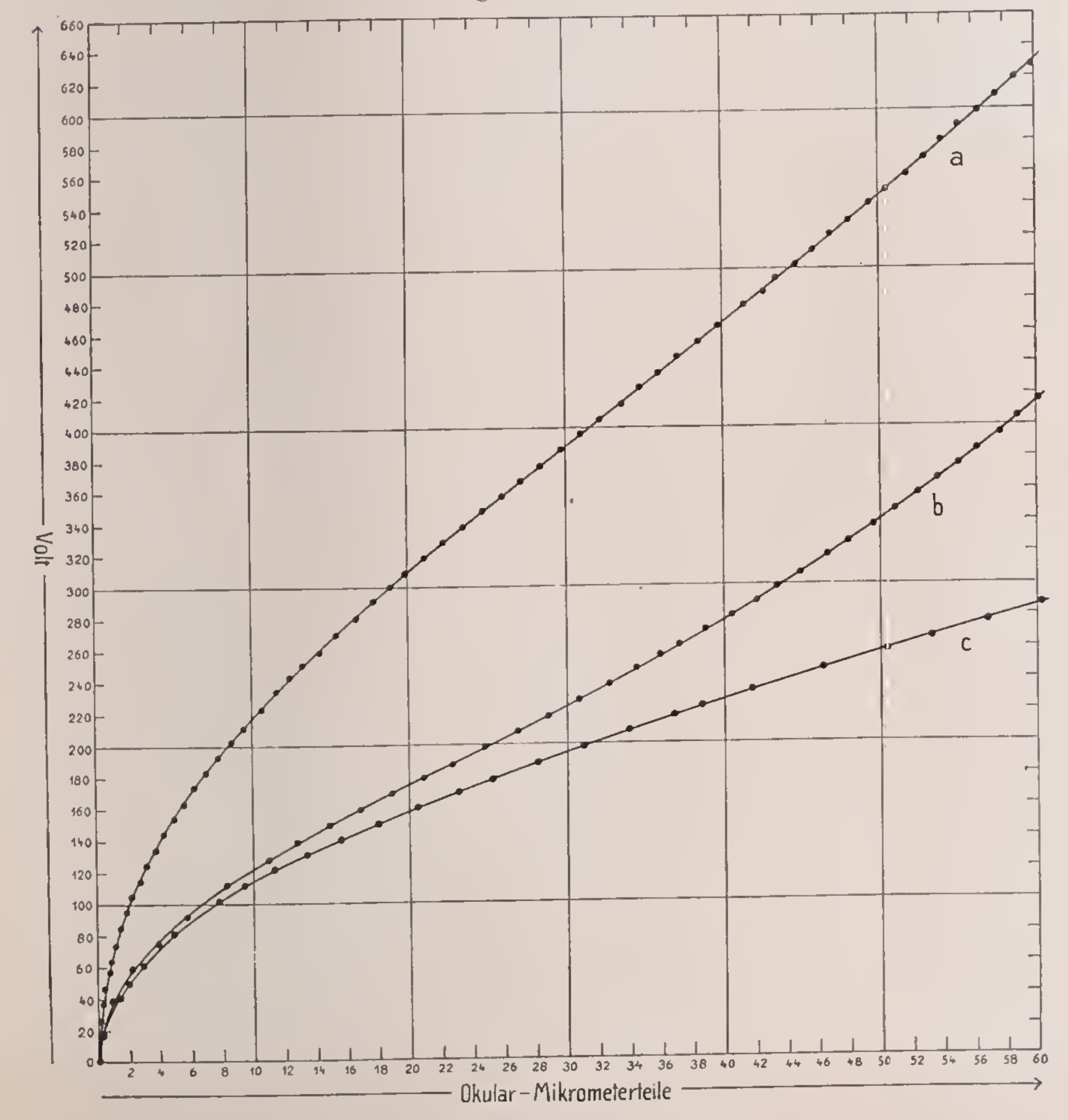


Fig. 4



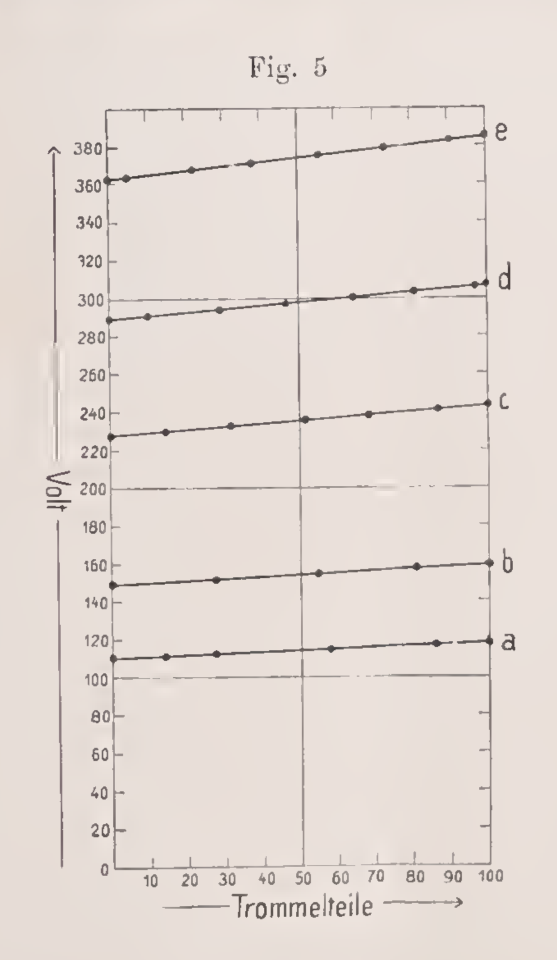


Fig. 5

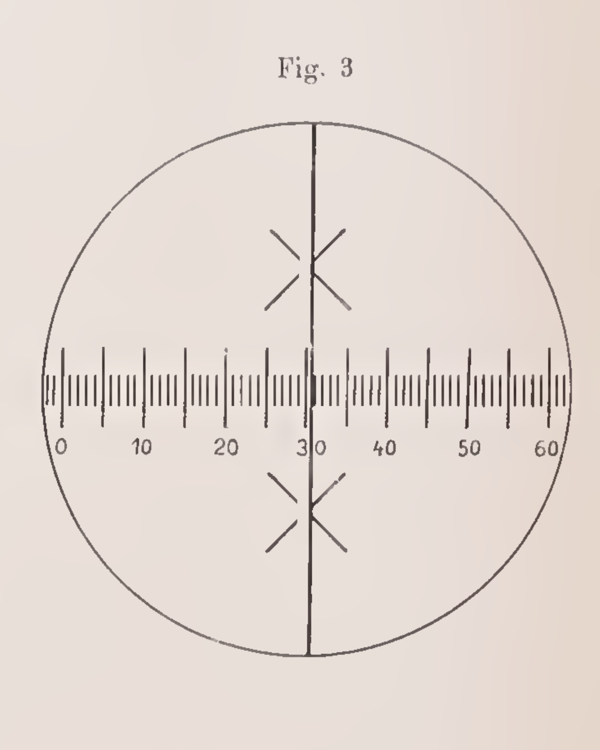


Fig. 3



Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 15. Abhandlung

Über die singulären Stellen eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung

von

Walther von Dyck

Vorgetragen am 6. März 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Die Untersuchungen über die singulären Stellen der durch ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}$$

definierten Kurvensysteme sind qualitativer Art, sofern sie sich mit der Analysis situs solcher Systeme beschäftigen, quantitativer mit Rücksicht auf die Darstellung der Integrale in der Umgebung der singulären Stellen durch konvergente Entwickelungen. Nach beiden Richtungen sind diese Fragen durch die bekannten Aufsätze von Poincaré, „Sur les courbes définies par les équations différentielles“ (im Journal de Mathématiques, 3e Série, tome VII und VIII, 4e Série, tome I und II, 1881—86) gefördert worden und neuerdings vor allem durch die Arbeiten von Bendixson (Acta mathematica, Bd. 24, 1901).

Bei Poincaré tritt dabei schon die Beziehung der Fragen der Analysis situs dieser Kurvensysteme zu den Kroneckerschen Untersuchungen über die Charakteristik eines Funktionensystems zutage, ohne daß indes die hiedurch ermöglichte Form der Darstellung weiter verfolgt würde. Bendixson andererseits hat neuerdings eine Abzählungsformel für den Charakter solcher singulärer Stellen gegeben (a. a. O., S. 39 u. f.), welche gleichfalls wieder auf die Kroneckerschen Sätze hinweist, ohne daß diese Beziehung hervorgehoben wäre. Ich selbst habe mich in früheren Studien („Beiträge zur Analysis situs“, Berichte der K. Sächs. Ges. d. Wiss., Leipzig 1885 und 1886, Mathematische Annalen, Bd. 32 und 37: vergl. auch meine Untersuchungen „Über die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definierten Kurvensysteme“, Sitzber. d. K. Bayer. Akad. d. W. v. J. 1891 und 1892) zunächst für Gebiete von zwei und drei Dimensionen mit Beziehungen der Analysis situs zur

1*

Kroneckerschen Charakteristikentheorie eingehend beschäftigt und dabei Relationen zwischen den singulären Stellen eines eine Fläche einfach überdeckenden Kurvensystems aufgestellt, welche jene von Poincaré gegebenen Beziehungen und die Bendixsonschen umfassen.

Legt man für die Darstellung dieser Relationen das obige System von Differentialgleichungen zu Grunde, für ein ebenes Gebiet zunächst also die Gleichung

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2}$$

und zieht dabei systematisch die Kroneckerschen Sätze heran, so gewinnen diese Untersuchungen eine sehr übersichtliche Form, welche insbesondere den Kern der von Bendixson zur Herleitung seines Satzes angewendeten Methoden klarer hervortreten läßt. Bei der Verallgemeinerung auf das System

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}$$

ergibt sich als neu ein Zusammenhang zwischen den singulären Stellen der im n dimensionalen Raume definierten Kurvensysteme und gewissen auf $(n-1)$ dimensionalen Begrenzungsmannigfaltigkeiten abzuzählenden besonderen Punkten.

Um die Darstellung übersichtlich zu gestalten, schicke ich jene früher von mir aufgestellte Beziehung aus der Analysis situs eines Kurvensystems sowie die zu verwendenden Abzählungsformeln der Kroneckerschen Charakteristikentheorie voraus, wobei ich mich bei den letzteren auf die Summenformeln beschränke.

§ 1. Analysis situs eines einfach unendlichen Kurvensystems.

Eine beliebige, ebene oder gekrümmte, einfach oder mehrfach berandete, aus einem oder aus mehreren Teilen bestehende Fläche sei einfach von einem Kurvensystem überdeckt, so zwar, daß von einem Punkte auf dem Rande im allgemeinen ein

Kurvenzweig, von einem Punkte im Innern im allgemeinen zwei Kurvenzweige auslaufen. Im Innern seien singuläre Punkte P^i_n vorhanden, von denen n Kurvenzweige ausgehen; dabei kann $n = 0, 1, 3 \ldots n$ sein; die Anzahl dieser Punkte sei p^i_n. Weiter bezeichnen wir als Punkte P^i_∞ (ihre Anzahl sei p^i_∞) Punkte, von denen unendlich viele Zweige ausgehen; wir begreifen hier auch solche Punkte mit ein, denen sich unendlich viele Kurvenzweige asymptotisch nähern (Wirbelpunkte). Ebenso seien auf dem Rande, in der Zahl p^r_n Punkte P^r_n vorhanden, von denen aus je n ($n = 0, 2, 3 \ldots n$) Zweige in das Innere der Fläche laufen. Sei endlich K_F die den Zusammenhang der Fläche bestimmende Zahl (für welche ich wieder die Annalen 32 gegebene, dort mit K^{II} bezeichnete Zahl benütze, deren Beziehung zu den Riemann-Neumannschen Zusammenhangszahlen ebendort § 4 erörtert ist), dann besteht zwischen jenen singulären Punkten und der Zahl K_F die Beziehung

$$(1) \qquad 2p^i_\infty - \sum (n-2)\, p^i_n = \sum (n-1)\, p^r_n + 2K_F$$

(Annalen 32, S. 501). Die Formel gibt also eine Beziehung zwischen den „Punktcharakteristiken" der singulären Punkte im Innern und den „Punktcharakteristiken" der Randpunkte, so zwar, daß jeder Punkt im Innern:

$$(2) \qquad \begin{array}{l} P^i_\infty \text{ mit } +2 \\ P^i_n \text{ mit } -(n-2), \end{array}$$

jeder Punkt auf dem Rande

$$(3) \qquad P^r_n \text{ mit } (n-1)$$

zu zählen ist.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß unser Kurvensystem auf dem Rande keine anderen singulären Stellen besitzt als Berührungen einzelner Kurven des Systems mit der Randkurve — eventuell lassen sich solche durch geeignete Verschiebung der Randkurve herstellen. Wir unterscheiden diese Berührungen als „innere Berührungen",

d. h. Punkte P_2^r und als „äußere Berührungen", d. h. Punkte P_0^r; es kommt ihnen der Punktcharakter $+1$ bzw. -1 zu, so daß wir die Formel (1) in vereinfachter Gestalt

$$(1^a) \qquad 2\,p_\infty^i - \sum (n-2)\,p_n^i = p_2^r - p_0^r + 2\,K_F$$

schreiben können. In dieser Form wollen wir die Gleichung benützen als Definitionsgleichung für den Gesamtcharakter aller im **Innern** unseres Gebietes gelegenen singulären Punkte, bestimmt aus der Anzahl der inneren und äußeren Berührungsstellen unseres Kurvensystems mit dem Rande.

Beschränken wir uns auf einen einzigen singulären Punkt (der etwa durch das Zusammenrücken einer Anzahl einfacher singulärer Punkte P_n^i bzw. P_∞^i entstanden sein mag, und grenzen um ihn (etwa durch eine Kreislinie, falls es sich um ein ebenes Gebiet handelt) ein einfach zusammenhängendes, einfach berandetes Elementargebiet, $K_F = 1$, ab, so ist der Charakter i dieses Punktes definiert durch die auf der Begrenzungskurve abzuzählende Zahl:

$$(4) \qquad 2\,i = p_2^r - p_0^r + 2.$$

Poincaré bezeichnet diese Zahl i als den „Index" jenes Punktes.

§ 2. Die Kroneckersche Charakteristik K eines Funktionensystems.[1]

Es seien $F_0, F_1, \ldots F_n$ eindeutige reelle Funktionen der reellen Variabeln $x_1, x_2 \ldots x_n$, die für endliche Werte der Variabeln endliche Werte annehmen und für welche innerhalb des zu betrachtenden Gebietes die $n+1$ aus je n dieser Funktionen zu bildenden Funktionaldeterminanten niemals gleichzeitig mit den betreffenden Funktionen für ein Wertsystem der x verschwinden. Wir setzen dabei diese Funktionen F so normiert voraus, daß das Gebiet $F < 0$ ganz im

[1] Monatsberichte der Berliner Akademie vom März 1869, Werke Band I.

Endlichen liegt, als von $F=0$ umschlossener „Innenraum". Dann gilt zunächst die Formel:

$$(5) \qquad \sum \left[\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & \ldots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \ldots & F_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ F_{n1} & F_{n2} & \ldots & F_{nn} \end{vmatrix} \right] = 0,$$

wenn die Summe ausgedehnt wird über alle Punkte $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, für welche gleichzeitig die Gleichungen

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots \quad F_n = 0$$

bestehen und wenn wir dabei diese Punkte mit $+1$ bzw. mit -1 in der Summe zählen, je nachdem die obige Funktionaldeterminante positiv oder negativ ist. Wir bedienen uns dabei auch in der Folge des Zeichens [ ] um die Zahl $+1$ bzw. -1 dem positiven bzw. negativen Zahlenwerte des in der eckigen Klammer stehenden Ausdruckes gemäß zu charakterisieren. Erstrecken wir aber diese Summation nur auf den Innenraum der Mannigfaltigkeit $F_0 = 0$, dann gelangen wir zu einer charakteristischen Zahl:

$$(6) \qquad K = \sum \left[\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & \ldots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \ldots & F_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ F_{n1} & F_{n2} & \ldots & F_{nn} \end{vmatrix} \right],$$

die Summation erstreckt über die Punkte:

$$F_0 < 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0 \ldots, \quad F_n = 0.$$

Alle $(n+1)$ Summen, welche wir mit Hilfe der $(n+1)$ Funktionen unter Auszeichnung jedesmal einer derselben bilden können, ergeben stets dieselbe Zahl K, welche Kronecker deshalb als Charakteristik des Funktionensystems bezeichnet. Das Vorzeichen von K hängt noch von der Reihenfolge der Funktionen ab.

Aus Gleichung (5) folgt sofort noch eine zweite Reihe von Formeln zur Bestimmung der Zahl K in der Gestalt:

$$(7) \qquad K = \tfrac{1}{2} \sum \left[F_0 \cdot \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix} \right],$$

die Summe erstreckt über alle Punkte:

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \dots \quad F_n = 0.$$

Solange es sich nur um Betrachtungen handelt, bei welchen die $(n+1)$ Funktionen nicht gegeneinander ausgezeichnet sind, bietet die Betrachtung der verschiedenen Darstellungsformen der Charakteristik kein neues Interesse. Aber diese verschiedenen Formen führen sofort zu weiteren Sätzen der Geometrie der Lage, wenn es sich um Betrachtungen handelt, bei denen die einzelnen Funktionen des Systems eine verschiedene Rolle spielen. So habe ich seinerzeit die verschiedenen Möglichkeiten, die „Zusammenhangszahl" einer Fläche mit Hilfe verschiedener Summenformeln abzuzählen, betrachtet. So ergeben sich auch hier unsere Sätze über die singulären Stellen der durch Differentialgleichungen definierten Kurvensysteme eben aus jenen verschiedenen Darstellungsformen der Charakteristik.

§ 3. Abzählung im Gebiete von zwei Dimensionen.

Für das durch eine Differentialgleichung

$$(8) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2}$$

(in welcher X_1 und X_2 eindeutige Funktionen von x_1 und x_2 bedeuten mögen) gegebene Kurvensystem werden die singulären Stellen:

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0,$$

wenn wir von höheren Singularitäten zunächst absehen, bekanntlich nach dem Vorzeichen der Determinante

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{vmatrix} \tag{9}$$

unterschieden in Punkte P^i_∞ für $\Delta_X > 0$ und P^i_4 für $\Delta_X < 0$. Dabei umfassen die Punkte P^i_∞



die Wirbelpunkte (foyers) und die Knotenpunkte (noeuds)

und reihen sich in diese





die isolierten Punkte (P^i_0) (centres) und die Büschelpunkte

als spezielle Fälle ein. Die Punkte P^i_4 sind die



Doppelpunkte (cols) des Kurvensystems.

Für die Abzählung der im Innern eines Gebietes $F(x_1, x_2) < 0$ enthaltenen Punkte P^i_∞, P^i_0 und P^i_4 hat man also zunächst:

$$(10) \qquad p^i_\infty + p^i_0 - p^i_4 = \sum \left[\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{vmatrix} \right] = K_X,$$

die Summe ausgedehnt über die Punkte:

$$F < 0, \quad X_1 = 0, \quad X_2 = 0.$$

Diese Zahl K_X ist demnach (nach Definition (6)) die Kroneckersche Charakteristik des Funktionensystems F, X_1, X_2.

Andererseits sind die Berührungspunkte der Kurven des Systems (8) mit der Randkurve $F = 0$ gegeben durch

$$F = 0, \quad X_1 F_1 + X_2 F_2 = 0$$

und eine einfache Rechnung zeigt, daß der Unterschied der „inneren" und „äußeren" Berührung einer Integralkurve mit $F = 0$ bestimmt wird durch das Vorzeichen von:

$$(11) \quad (X_1 F_2 - X_2 F_1) \cdot \begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ (X_1 F_1 + X_2 F_2)_1 & (X_1 F_1 + X_2 F_2)_2 \end{vmatrix},$$

so zwar, daß man hat:

$$(12) \quad \begin{aligned} p^r_2 - p^r_0 = \sum [(X_1 F_2 - X_2 F_1) \times \\ \times \begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ (X_1 F_1 + X_2 F_2)_1 & (X_1 F_2 + X_2 F_2)_2 \end{vmatrix}] = 2 K_{XF}, \end{aligned}$$

die Summe ausgedehnt über alle Punkte:

$$F = 0, \quad X_1 F_1 + X_2 F_2 = 0.$$

Diese Formel ergibt also nach Definition (7) die Zahl $K_{XF} = \frac{1}{2}(p^r_2 - p^r_0)$ als Kroneckersche Charakteristik des Funktionensystems:

$$F = 0, \quad (X_1 F_1 + X_2 F_2) = 0, \quad (X_1 F_2 - X_2 F_1) = 0.$$

Endlich läßt sich die Zusammenhangszahl K_F des Gebietes $F < 0$ nach meinen früheren Untersuchungen darstellen durch die Formel:

$$K_F = \sum \left[\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} \right], \tag{13}$$

die Summe ausgedehnt über die Punkte:

$$F < 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0.$$

Die Relation 1ª

$$p_x^i + p_0^i - p_4^i = \tfrac{1}{2}(p_2^r - p_0^r) + K_F \tag{1^a}$$

stellt sich also dar als eine lineare Beziehung zwischen den drei Charakteristiken

K_X des Funktionensystems $F = 0, \quad X_1 = 0, \quad X_2 = 0,$

K_F des Funktionensystems $F = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0,$

$K_{X.F}$ des Funktionensystems $F = 0, \quad X_1 F_1 + X_2 F_2 = 0,$
$X_1 F_2 - X_2 F_1 = 0$

in der Form:

$$K_{X,F} = K_X + K_F. \tag{14}$$

§ 4. Umkehrung: Analytischer Beweis der Formel 1.

Die Gleichung (14) zwischen diesen drei Charakteristiken folgt nun aber auf die einfachste Weise direkt aus den Sätzen des § 2 über die verschiedenen Darstellungsformen einer Charakteristik und es ergibt sich damit ein unmittelbarer analytischer Beweis der Formel 1, die ich früher aus Betrachtungen der Analysis situs hergeleitet habe.

In der Tat, betrachten wir das Funktionensystem

$$F = 0, \quad X_1 F_1 + X_2 F_2 = 0, \quad X_1 F_2 - X_2 F_1 = 0 \tag{15}$$

und zeichnen in demselben, wie dies in Formel (12) geschehen,

die Funktion $(X_1 F_2 - X_2 F_1)$ vor den beiden anderen aus, so ergibt sich die obige Bedeutung von K_{XF} als:

$$K_{X,F} = \tfrac{1}{2}(p_2^r - p_0^r).$$

Heben wir aber andererseits $F = 0$ vor den beiden anderen Gleichungen des Systems hervor, so handelt es sich um die Schnittpunkte von

$$X_1 F_1 + X_2 F_2 = 0 \quad \text{und} \quad X_1 F_2 - X_2 F_1 = 0$$

im Innern von $F = 0$. Diese beiden Gleichungen sind aber nur verträglich, wenn entweder

$$X_1 = 0 \quad \text{und} \quad X_2 = 0$$

oder

$$F_1 = 0 \quad \text{und} \quad F_2 = 0$$

ist; d. h. geometrisch für die singulären Punkte der Differentialgleichung einerseits und für die Doppelpunkte des Kurvensystems $F =$ const. andererseits.

Die Charakteristik

$$K_{X,F} = \sum \left[\begin{vmatrix} (X_1 F_1 + X_2 F_2)_1 & (X_1 F_1 + X_2 F_2)_2 \\ (X_1 F_2 - X_2 F_1)_1 & (X_1 F_2 - X_2 F_1)_2 \end{vmatrix} \right]$$

spaltet sich also in zwei Summen, die nach Weglassung je des positiven Faktors $(X_1^2 + X_2^2)$ bzw. $(F_1^2 + F_2^2)$ geschrieben werden können:

$$K_{X,F} = \sum \left[\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{vmatrix} \right] + \sum \left[\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} \right].$$

die erstere Summe ausgedehnt über die Punkte:

$$F < 0, \quad X_1 = 0, \quad X_2 = 0,$$

die zweite Summe ausgedehnt über die Punkte:

$$F < 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0.$$

Das ist aber nach obigem unmittelbar:

$$K_{XF} = K_X + K_F \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Zeichnen wir endlich von den drei Gleichungen (15) die dritte

$$X_1 F_1 + X_2 F_2 = 0$$

für die Berechnung der Charakteristik aus, so handelt es sich um die Abzählung der Punkte $F = 0$, $X_1 F_2 - X_2 F_1 = 0$ analog der Formel (12). Dabei entsteht die neue Formel, wenn wir dort X_1 und X_2 mit X_2 und $-X_1$ vertauschen. Geht man also von der Differentialgleichung:

$$\frac{d x_1}{X_2} = \frac{d x_2}{-X_1},$$

d. h. von dem Orthogonalsystem des ursprünglichen Kurvensystems aus, so handelt es sich jetzt für die Abzählung längs der Kurve $F = 0$ um die Berührungspunkte des Orthogonalsystems. Der Punktcharakter der singulären Stellen $X_2 = 0$, $-X_1 = 0$ dieses Orthogonalsystems aber, gegeben durch das Vorzeichen der Determinante:

$$\begin{vmatrix} X_{21} & X_{22} \\ -X_{11} & X_{12} \end{vmatrix},$$

stimmt überein mit demjenigen des ursprünglichen Systems, ein Resultat, von dessen Richtigkeit man sich auch geometrisch sofort überzeugt.

Allgemeiner gilt dieser Satz bekanntlich, wenn man die Differentialgleichung ersetzt durch die andere:

$$\frac{d x_1}{a_{11} X_1 + a_{12} X_2} = \frac{d x_2}{a_{21} X_1 + a_{22} X_2}.$$

Der Punktcharakter der singulären Stellen $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ bleibt hier erhalten bzw. verwandelt sich in den entgegengesetzten, je nachdem die Substitutionsdeterminante $|a_{ik}|$ positiv oder negativ ist.

§ 5. Formulierung für das Gebiet von n Variabeln.

Gehen wir nunmehr zu dem System von Differentialgleichungen mit n unabhängigen Variabeln

$$(16) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}$$

über, so ergeben sich die analogen Formulierungen folgendermaßen:

Es bezeichne wieder:

$$(17) \qquad K_X = \Sigma \left[\begin{vmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ X_{n1} & \cdots & X_{nn} \end{vmatrix} \right],$$

die Summe ausgedehnt über alle Punkte:

$$F < 0, \quad X_1 = 0, \; \ldots \; X_n = 0,$$

die Charakteristik der singulären Punkte der Differentialgleichung im Innern der $(n-1)$ dimensionalen Mannigfaltigkeit $F = 0$; ebenso sei:

$$(18) \qquad K_F = \Sigma \left[\begin{vmatrix} F_{11} & \cdots & F_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ F_{n1} & \cdots & F_{nn} \end{vmatrix} \right],$$

die Summe genommen über alle Punkte:

$$F < 0, \quad F_1 = 0, \; \ldots \; F_n = 0,$$

die „Zusammenhangszahl" des Raumes $F < 0$; endlich bilden wir die Charakteristik $K_{X,F}$ des Funktionensystems der folgenden $n+2$ Funktionen der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ und des Parameters λ:

$$(19) \qquad \begin{gathered} F = 0, \\ X_1 F_1 + X_2 F_2 + \cdot - X_n F_n = 0, \\ X_1 - \lambda F_1 = 0, \\ X_2 - \lambda F_2 = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ X_n - \lambda F_n = 0. \end{gathered}$$

Stellen wir dabei zunächst $K_{X,F}$ unter Auszeichnung der Funktion F dar in der Form:

$$(20)\; K_{X,F} = \sum\left[\begin{vmatrix} (\sum X_i F_i)_1 & (\sum X_i F_i)_2 & \ldots & (\sum X_i F_i)_n & 0 \\ X_{11}-\lambda F_{11} & X_{12}-\lambda F_{12} & \ldots & X_{1n}-\lambda F_{1n} & -F_1 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ X_{n1}-\lambda F_{n1} & X_{n2}-\lambda F_{n2} & \ldots & X_{nn}-\lambda F_{nn} & -F_n \end{vmatrix}\right],$$

die Summation ausgedehnt über die gemeinsamen Lösungen von

$$\sum X_i F_i = 0, \quad X_1 - \lambda F_1 = 0, \ldots \quad X_n - \lambda F_n = 0$$

im Gebiete $F < 0$. Dann läßt sich die hier verlangte Summation zerlegen in die Summationen über die Punkte

$$F < 0, \quad X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \ldots \quad X_n = 0$$

und

$$F < 0. \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots \quad F_n = 0$$

und man erhält für die einzelnen Summationen gemäß der obigen Formeln (17) und (18) sofort die Zahlen K_X und K_F. Wie in § 3 folgt also die Relation:

$$(21) \qquad K_{X,F} = K_X + K_F.$$

Diese Relation führt nun wieder zu einer Beziehung zwischen den singulären Stellen im Innern des Gebietes $F < 0$ und gewissen Stellen auf der Begrenzung $F = 0$, wenn wir nunmehr, analog wie in § 4. die Zahl $K_{X,F}$ durch eine Abzählung auf der Mannigfaltigkeit $F = 0$ bestimmen.

Stellen wir zu dem Ende die Charakteristik $K_{X,F}$ dar durch eine zweite Summenformel, in welcher wir die Funktion

$$X_1 F_1 + \cdots + X_n F_n$$

auszeichnen. Dann erstreckt sich (gemäß Formel 7) die Summation über alle Punkte:

$$(22) \qquad F = 0, \quad X_i - \lambda F_i = 0,$$

d. i. über die Punkte der Begrenzungsmannigfaltigkeit $F = 0$,

welche von den Integralkurven unseres Systems senkrecht durchsetzt werden. Es ist

$$K_{X,F} = \tfrac{1}{2} \sum \left[(X_1 F_1 + \cdots + X_n F_n) \times \right.$$

$$(23) \quad \times \left. \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & \dots & F_n & 0 \\ X_{11} - \lambda F_{11} & X_{12} - \lambda F_{12} & \dots & X_{1n} - \lambda F_{1n} & -F_1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ X_{n1} - \lambda F_{n1} & X_{n2} - \lambda F_{n2} & \dots & X_{nn} - \lambda F_{nn} & -F_n \end{vmatrix} \right]$$

eine Formel, die wir abkürzend

$$(23^a) \qquad K_{X,F} = \tfrac{1}{2} \sum \left[(X_1 F_1 + \cdots + X_n F_n) \cdot \Delta(\lambda) \right]$$

schreiben wollen, oder mit Berücksichtigung der Gleichungen (22) und nach Unterdrückung des stets positiven Faktors $(F_1^2 + \cdots F_n^2)$ in der Form:

$$(23^b) \qquad K_{X,F} = \tfrac{1}{2} \sum \left[\lambda \cdot \Delta(\lambda) \right].$$

Gemäß dieser Formel zerfallen diese Punkte auf $F = 0$ in zwei Klassen, die wir etwa folgendermaßen geometrisch unterscheiden können:

Es sei unser Raum $x_1, x_2, \dots x_n$ abgebildet in einen Raum $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ durch die Formeln:

$$(24) \qquad \xi_i = X_i - \mu F_i \qquad i = 1, \dots n;$$

es entspricht dann jedem Punkte (x_i) zunächst eine Gerade im Raum der (ξ_i), mit dem Parameter μ.

Jedem Nachbarpunkte $(x_i + dx_i)$ entspricht eine Nachbargerade:

$$\xi_i + d\xi_i = X_i - \mu F_i + dX_i - \mu dF_i - F_i d\mu.$$

Liegen nun die Punkte x_i und $x_i + dx_i$ auf $F = 0$ und stellen wir die Bedingung auf, daß die beiden zugehörigen Geraden im Raum der ξ_i sich schneiden, so folgt in bekannter Weise aus:

$$(25)\qquad \begin{aligned} &F_1\,dx_1 + \cdots + F_n\,dx_n = 0 \qquad \text{und} \\ &\sum_{k=1}^{n} (X_{ik} - \mu F_{ik})\,dx_k - F_i\,d\mu = 0, \end{aligned}$$

daß die Determinante $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in μ

$$(26)\quad \Delta(\mu) = \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & \cdots & F_n & 0 \\ X_{11} - \mu F_{11} & X_{12} - \mu F_{12} & \cdots & X_{1n} - \mu F_{1n} & -F_1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ X_{n1} - \mu F_{n1} & X_{n2} - \mu F_{n2} & \cdots & X_{nn} - \mu F_{nn} & -F_n \end{vmatrix}$$

verschwinden muß. Den reellen Lösungen μ dieser Gleichung entsprechend gibt es also auf jeder Geraden eine gewisse Anzahl reeller Punkte, in welchen sie von einer Nachbargeraden des Systems geschnitten wird. Nun wählen wir speziell auf $F = 0$ die Punkte aus, in welchen die Integralkurven die Mannigfaltigkeit F senkrecht durchschneiden, das sind also die Punkte

$$(27)\qquad F = 0, \quad X_i - \lambda F_i = 0$$

oder anders ausgedrückt, die Punkte auf $F = 0$, deren Bildgerade im Raum der ξ_i durch den Koordinatenanfangspunkt $\xi_i = 0$ hindurchgehen. Jede dieser Geraden wird durch die der Gleichung

$$\Delta(\mu) = 0$$

entsprechenden reellen Punkte in eine Anzahl Stücke zerlegt, in deren einem der Koordinatenanfangspunkt liegt. Der Ausdruck in der Summenformel (23^b)

$$[\lambda \cdot \Delta(\lambda)]$$

entscheidet also, ob der Koordinatenanfangspunkt in einem „positiven" oder „negativen" Stück jener Geraden liegt, er teilt, wie man sich auch ausdrücken mag, die „Berührungen", welche die durch die X_i gegebenen ebenen Elemente des Systems (16) mit der Mannigfaltigkeit F_i eingehen, in positive und negative Berührungen.

Die Unterscheidung ist, wie schon bei Formel (17) ersichtlich, eine definite nur für gerades n. Nur in diesem Falle bildet also (wie schon Poincaré am obengenannten Orte bemerkt) die Zahl $K_{X,F}$ ein absolutes Kriterium für den Punktcharakter der im Bereich $F < 0$ liegenden singulären Punkte des Systems.

§ 6. Die Formeln für einen singulären Punkt.

Beschränken wir uns auf einen einzigen singulären Punkt der Differentialgleichung, den wir in den Koordinatenanfangspunkt legen, und für welchen wir die Entwickelung annehmen

$$(29)\qquad \begin{aligned} X_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ X_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ X_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

und setzen weiter noch $F = 0$ als Kugel vom Radius ϱ um den Punkt gelegt voraus:

$$(30)\qquad F = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 - \varrho^2) = 0.$$

so folgt für die Abzählung auf der Kugel, den Formeln (22) und (23) entsprechend:

$$(31)\qquad \begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n &= 0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad & \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0 \end{aligned}$$

$$(32)\qquad K_{X,F} = \tfrac{1}{2}\sum\left[\lambda\cdot\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & 0 \\ a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} & -x_1 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} & -x_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda & -x_n \end{vmatrix}\right],$$

die Summe ausgedehnt über die durch die obige Gleichung (31) gegebenen Wertsysteme der x_i und des λ ausgedehnt.

Die Formel läßt sich noch einfacher schreiben, wenn man die Variablen x_i eliminiert. Setzen wir zur Abkürzung:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = F(\lambda),$$

so erhält man, nach Unterdrückung stets positiv bleibender Faktoren:

$$K_{X,F} = \tfrac{1}{2} \sum \left[\lambda \cdot \frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda}\right],$$

die Summe ausgedehnt über die reellen Wurzeln der Gleichung:

$$F(\lambda) = 0.$$

Normieren wir schließlich in der bekannten Weise das System (16, 29) in der Form:

$$\frac{d\xi_1}{g_1 \xi_1} = \frac{d\xi_n}{g_2 \xi_2} = \dots \frac{d\xi_n}{g_n \xi_n},$$

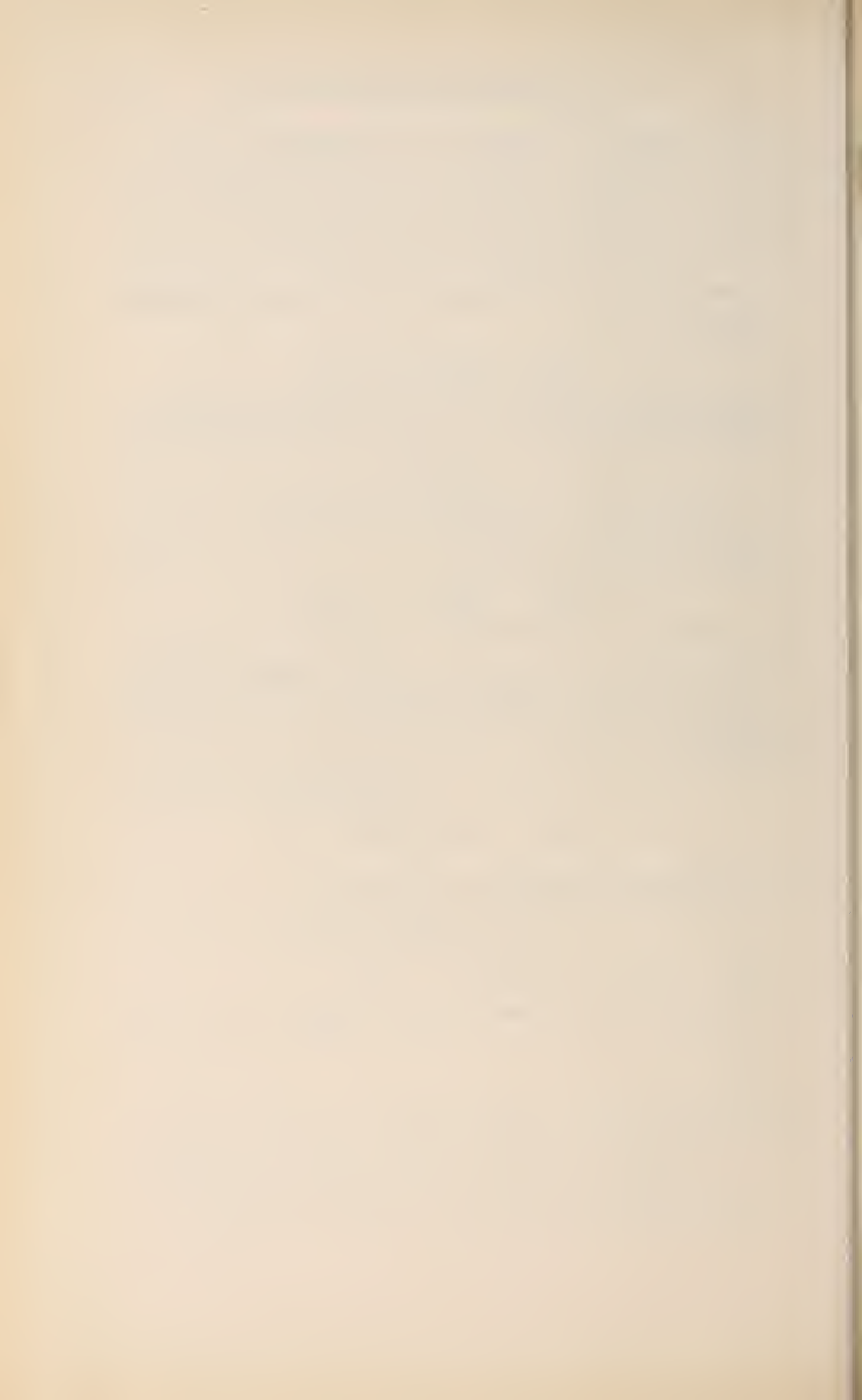
wo die g_i reelle oder komplex konjugierte Zahlen bezeichnen, so haben wir für die Bestimmung von $K_{X,F}$ das Funktionensystem

$$(g_i - \lambda)\,\xi_i = 0$$
$$g_1 \xi_1^2 + \cdots g_n \xi_n^n = 0$$
$$\xi_1^2 + \cdots \xi_n^2 - \varrho^2 = 0$$

und also für die Abzählung auf der Kugel

$$K_{X,F} = \tfrac{1}{2} \sum \left[\lambda \cdot \frac{\partial \Pi (g_i - \lambda)}{\partial \lambda}\right]$$

die Summe über alle reellen $\lambda = g_i$ erstreckt.



Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 16. Abhandlung

Registrierungen einiger südeuropäischer Erdbeben auf der Münchener Erdbebenstation

von

J. B. Messerschmitt

Mit 3 Figuren

Vorgelegt am 6. November 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Die unter Fig. 1 und 2 gegebenen Abbildungen sind photographisch in Orginalgröße reproduziert und können daher als Ersatz für das Orginal genommen werden. Die Konstanten des Instrumentes waren:

		Ostwestkomp.	Nordsüdkomp.
Schwingungsdauer	T	$12^s,0$	$12^s,5$
Äquivalente Pendelänge	L	36 m	39 m
„ Indikatorlänge	J	9540 m	9050 m
Vergrößerung	V	260 fach	230 fach
Ausschlag für 1″	E	46 mm	44 mm
Dämpfung	$\varepsilon : 1$	5 : 1	3,2 : 1
Reibung	r	0,35 mm	0,88 mm
	R	0,14 Dynen	0,4 Dynen

Die wichtigsten Teile der Seismogramme ergeben:

		Greenwich-Zeit	Ganze Periode	Amplitude von der Mittellage ab
Beginn	i	$17^h\ 43^m\ 40^s$	5^s	5 μ
Zweite Vorläufer	S	47 9	5^s	23 μ
Hauptbeben	L	48 --	—	—
Maximum	M_N	49 58	5	180
	M_E	50 0	4	110
	M_N	50 20	9	150
	M_E	51 12	11	130
Ende	F	18 40 —	—	—

In den Vorläuferwellen der Ostwestkomponente ist noch eine flache Welle von etwa 1 Minute Dauer zu erkennen, auf welcher die kurzen Wellen aufgesetzt sind. In der anderen Komponente ist sie nicht sicher nachzuweisen. Solche lange Wellen lassen sich fast stets in den Diagrammen nicht zu ferner Beben nachweisen, wie dies Vicentini, Angenheister[1])

[1]) G. Angenheister, „Seismische Registrierungen in Göttingen im Jahre 1905“. Nachr. d. Ges. d. W. in Göttingen, Math.-phys. Kl., 1906, S. 13.

und neuerdings Agamennone[1]) gezeigt haben. Auch die Münchener Aufzeichnungen der süditalienischen und der Balkanbeben zeigen diese lange Wellen, welche zwischen 30^s und 60^s liegen.[2]) Sie treten aber nur bei Nahbeben auf Entfernungen bis etwa 1200 km auf; bei den eigentlichen Fernbeben können sie nicht wahrgenommen werden. Es ist dies etwa dieselbe Entfernung, in welcher noch die fein aufgehängten Magnete der Variometer ansprechen, wobei es sich jedoch nicht um magnetische, sondern um mechanische Wirkungen handelt. Außerdem rühren die Ausschläge dabei von den Hauptwellen her, die ja nur eine eigentliche Schütterwirkung hervorrufen können.

Diese langen Wellen können wohl nur als Gravitationswellen (Oberflächenwellen), wie die Hauptwellen aufgefaßt werden, während die kleinen Wellen der Vorläufer Elastizitätswellen sind. Es pflanzen sich also in diesem Falle beide nahe gleich schnell fort. Agamennone meint, daß bei einem plötzlichen Vertikalstoß, bei dem aber kein Bruch oder Reißen des Bodens entsteht, die Gravitationswellen vorherrschen. Tritt aber Faltung und Bruch ein, so herrschen die elastischen Longitudinal- und Transversalwellen vor. Das Seismogramm zeigt also im letzteren Fall in den Vorläufern nur Wellen mit kurzer Periode, im ersteren aber auch lange. Man kann sich diesen Vorgang durch ein Beispiel aus der Akustik besser verdeutlichen, indem in dem einen Fall nur der Grundton, in dem anderen aber auch die harmonischen Obertöne auftreten.

Es hängt diese Erscheinung wohl auch mit der Tiefe des Bebenherdes zusammen. Je tiefer der Herd liegt, desto weniger können sich im Anfang Gravitationswellen ausbilden, es herr-

---

[1]) G. Agamennone, Rendiconti R. Accad. d. Lincei 1909, vol. XVIII, S. 339 und 393.

[2]) Vgl. die Diagramme in „Veröffentlichungen des Erdmagnetischen Observatorium und der Erdbebenstation in München“, 2. Heft., München 1909 und J. B. Messerschmitt, „Die Registrierungen der süditalienischen Erdbebenkatastrophe in München“. Mitt. d. Geogr. Ges. in München, 4. Bd., 1. Heft, S. 128., München 1909.

schen dann die Elastizitätswellen vor. Liegt der Herd aber näher der Oberfläche, so wird der Boden sofort geneigt und es entsteht neben der elastischen Wellenbewegung auch eine mechanische. Es muß also ein Vergleich zwischen den Aufzeichnungen verschieden weit vom Epizentrum entfernter Stationen auch ein Mittel für die Bestimmung der Herdtiefe geben.

Das Erdbeben vom 11. Juni 1909 in der Provence.

Die französische Mittelmeerküste, besonders in ihrem östlichen Teil am Ligurischen Meere, ist häufig vom Erdbeben heimgesucht, die zuweilen eine außerordentliche Heftigkeit annehmen können, wovon noch die letzte Katastrophe vom 23. Februar 1887 an der Riviera Zeugnis abgelegt hat. Im westlichen Teile, also insbesondere in der Provence und Dauphiné, sind Erdstöße seltener. G. Bigourdan (C. R. **148**, 1909, S. 1568) konnte in diesem Gebiete stärkere Erschütterungen nur aus den Jahren 1282, 1644, 1731, 1738, 1769, 1772—1773, 1799 und 1812 nachweisen, von welchen aber keine in der am 11. Juni 1909 zerstörten Gegend aufgetreten ist. Nach den Untersuchungen von A. Angot[1]) umfaßt die epizentrale Region, innerhalb welcher die Erschütterung den IX. Grad nach der Skala Mercalli-Forel erreichte, also zerstörend wirkte, einen Raum von 360 km², in welchem die Gemeinden Verégues, Charleval, La Roque d'Anthéron, Salon, Pélissanne. La Barben, Lambesc, St. Cannat, Rognes, Le Puy-Sainte-Réparade, Venelles und Meynargues liegen. Das Epizentrum ist daher etwa 40 km nördlich von Marseille unter 43°7 N. B. und 5°2 östlich von Greenwich gelegen gewesen. Es berechnet sich daraus die Entfernung von München auf 6°27 im größten Kreise oder 696 km. (Die Entfernung auf der Sehne ist 689 km.) Als Vergleich möge die Entfernung von Messina dienen, welche 1132 km beträgt.

Der Wiechertsche Seismograph, dessen Empfindlichkeit bereits oben mitgeteilt ist, hat die folgenden Werte ergeben:

---

[1]) Alfred Angot, „Sur le tremblement de terre du 11 juin 1909". C. R. **149**, 1909, S. 527. Mit einer Karte.

	Greenwich Zeit			Ganze Periode	Amplitude von der Mittellage ab
Beginn	21^h	7^m	4^s	1^s5	$< 1\mu$
Reflex		7	31	—	—
S		8	25	5	—
L		8	50	—	—
M_E		9	47	4	85
M_N		10	—	4	140
F		36	—	—	—

Das Seismogramm unterscheidet sich in mehrfacher Beziehung von dem des vorher behandelten Bebens. Die ersten Vorläufer setzen fast mikroskopisch klein ein und sind daher nur mit der Lupe erkennbar. In der Reproduktion (Fig. 3) sind diese kleinen Zacken nicht mehr deutlich zu sehen, im Original aber treten sie schön hervor. Diese kleinen Wellen sind auf den größeren aufgelagert bis $21^h\ 8^m\ 25^s$ vorhanden. Die größeren Wellen haben eine Periode von 5^s und ihre Amplitude nimmt allmählich bis auf etwa $3\,\mu$ zu. In den zweiten Vorläufern herrschen längere Wellen vor, während sie im Hauptbeben wieder etwas kürzer werden.

Die größeren Wellen von 5^s in dem ersten Vorläufer sind offenbar anderer Art als die oben besprochenen langen Vorläuferwellen von 30^s bis 60^s. Diese sind hier nicht zu erkennen. Es dürfte sich dabei um eine Art mikroseismischer Bodenschwingungen handeln, wie solche oft auftreten und wie sie auch schwach vor und nach dem Beben in dem Diagramm zu erkennen sind. Es fehlen also hier die Gravitationswellen in dem ersten Vorläufer, während sie im zweiten, wenn auch von kürzerer Periode, vorhanden zu sein scheinen.

Sehr interessant ist die von Angot gegebene Karte der Isoseisten für dieses Beben, welche deutlich zeigt, daß diese Linien gleicher Erdbebenstärke durchaus keine regelmäßige Form haben, wie sie sonst vielfach gezeichnet werden, sondern gemäß der geologischen Beschaffenheit des Terrains ganz unregelmäßig verlaufen.

Erdbeben vom 10. Juli 1909 in Südfrankreich.

Am 10. Juli wurde ein schwächeres Beben in Südfrankreich gespürt, das in München wie folgt aufgezeichnet wurde:

Beginn	$20^h\ 57^m\ 28^s$	nicht ganz sicher
Maximum	$59^1/_2$	Periode 5^s, Amplitude $3\,\mu$
Ende	21 3 —	

Es handelt sich also nur um eine schwache Aufzeichnung. Sie verdient aber einiges Interesse durch begleitende Umstände, worauf mich Herr Professor Dr. L. Bürchner von hier aufmerksam machte. Er teilte mir nämlich mit, daß sich in der Athenischen Zeitung „Skrip“ vom 1./14. Juli 1909 die folgenden Angaben befinden:

„Auf Malta ereignete sich eine sehr merkwürdige Erscheinung, die die Bewohner dieser friedlichen Insel erschreckt hat. Seit dem verflossenen Samstag (d. i. der 10. Juli neuen Stils) erregt die See die allgemeine Aufmerksamkeit und das Entsetzen der Malteser. Sie bleibt eine Zeitlang ruhig und unbeweglich wie ein Landsee. Hernach weicht sie langsam und regelmäßig zurück. Schließlich aber türmt sie sich zu sehr hohen Wogen, die gegen die Molen anstürmen und die Ankertaue der Schiffe zerreißen. Die Erscheinung wiederholt sich von Zeit zu Zeit in Begleitung von einem schrecklichen unterirdischen Geheul. Es ereignet sich also genau das, was sich einen Tag vor der Zerstörung Messinas durch das letzte große Erdbeben zugetragen hat. Aus diesem Grunde erregt auch die Erscheinung eine Panik auf Malta.“

Nach diesen Angaben dürfte es sich also in dem vorliegenden Falle um ein Seebeben handeln, dessen Herd im westlichen Teile des Mittelländischen Meeres gelegen ist.

Das griechische Erdbeben vom 15. Juli 1909.

Am 15. Juli wurde in der Landschaft Elis ein starkes Erdbeben gespürt, dessen Herd etwa unter 37°7 N. B. und 21°5 östlich von Greenwich gelegen und daher von München die Entfernung im größten Kreise 12°68 oder gleich 1411 km beträgt. Die Sehne ist 1406 km lang. Als Hauptort der Zerstörung wird die Ortschaft Chawari (*Χάβαρη*) bei Amalias genannt.

In München sind die folgenden Angaben erhalten worden:

	Greenwich-Zeit			Ganze Periode	Amplitude von der Mittellage ab
Beginn	0^h	38^m	1^s	$2^s - 3^s$	$1\,\mu$
Zweite Vorläufer		39	44	4^s	—
Hauptbeben		42	30	7^s—11^s	$30-40\,\mu$
Maximum		44	—	12^s	$40-100\,\mu$
F	1	18	–	—	—

Der Einsatz ist im Gegensatz zu anderen Beben, die von der Balkanhalbinsel herrühren, wenig scharf und es verläuft der erste Vorläufer ganz gleichmäßig. Die Hauptwellen sind verhältnismäßig lang, doch hielten sich die Ausschläge in engen Grenzen.

Die Berechnung der Herdtiefe ist nach den vorhandenen Formeln wenig befriedigend. Es hat nun neuerdings Comas Solá[1]) eine neue Formel unter der Voraussetzung abgeleitet, daß der Herd punktförmig sei und bei starken Beben die Formel auf Entfernungen von nicht viel über 500 km gelte und die zugleich die Berechnung aus dem Seismogramm einer einzigen Station auszuführen erlaubt. Innerhalb dieses Gebietes können die Stoßstrahlen geradlinig angenommen werden, woraus sich die einfache Formel

$$p = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\delta^2}{\chi} - \chi\right) \qquad (1)$$

[1]) Comas Solá, Calcul de la profondeur des hypocentres sismiques. C. R. **149**, 1909, S. 536.

*

ergibt, worin p die gesuchte Herdtiefe, δ die Entfernung zwischen dem Beobachtungsort und dem Epizentrum und χ eine Hilfsgröße bedeutet, die geometrisch gleich der Entfernung des Beobachters vom Hypozentrum weniger der Herdtiefe ist. Die Größe berechnet sich aus:

$$\chi = \frac{V}{3{,}4}\,[\delta - (t_3 - t_1)\,3{,}4], \tag{2}$$

worin V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen bedeutet, die nach den bekannten Laufzeitkurven angenommen werden darf. So gibt z. B. Benndorf dafür:

$$V = 5{,}5 + 0{,}0206\,p. \tag{3}$$

$t_3 - t_1$ ist der Zeitunterschied zwischen dem Eintreffen der Wellen der ersten Vorläufer (t_1) und derjenigen der Hauptwellen (t_3) im Seismogramm.

Bei der Berechnung schlägt man ein Näherungsverfahren ein, indem man zuerst in (3) einen willkürlichen Wert von p annimmt und damit (2) und (1) berechnet. Mit dem neu gewonnenen p wiederholt man die Rechnung und verfährt so lange, bis keine Differenz mehr zwischen der Annahme und der Rechnung herauskommt.

Comas Solá hat für neuere Beben die Herdtiefen zwischen 45 und 61 km berechnet, darunter auch für das oben angeführte Erdbeben in der Provence vom 11. Juni. Für dieses beträgt $\delta = 700$ km in München: $t_3 - t_1 = 110^s$, woraus die Herdtiefe zu 60 km folgt, was in guter Übereinstimmung mit dem Werte 61 km, der aus den Angaben des 360 km entfernten spanischen Observatoriums Fabra folgt, ist. Eine ähnlich gute Übereinstimmung hat Comas Solá aus zwei verschiedenen Erdbebenstationen für das Erdbeben in Portugal gefunden, nämlich 51 und 55 km. Es dürfte daher diese Formel in vielen Fällen brauchbare Werte liefern.

Fig. 3.

Ostwestkomponente des Erdbebens vom 11. Juni 1909.



ergibt, worin p die gesuchte Herdtiefe, δ die Entfernung zwischen dem Beobachtungsort und dem Epizentrum und χ eine Hilfsgröße bedeutet, die geometrisch gleich der Entfernung des Beobachters vom Hypozentrum weniger der Herdtiefe ist. Die Größe berechnet sich aus:

$$\chi = \frac{V}{3{,}4}\,[\delta - (t_3 - t_1)\,3{,}4], \tag{2}$$

worin V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen bedeutet, die nach den bekannten Laufzeitkurven angenommen werden darf. So gibt z. B. Benndorf dafür:

$$V = 5{,}5 + 0{,}0206\,p. \tag{3}$$

$t_3 - t_1$ ist der Zeitunterschied zwischen dem Eintreffen der Wellen der ersten Vorläufer (t_1) und derjenigen der Hauptwellen (t_3) im Seismogramm.

Bei der Berechnung schlägt man ein Näherungsverfahren ein, indem man zuerst in (3) einen willkürlichen Wert von p annimmt und damit (2) und (1) berechnet. Mit dem neu gewonnenen p wiederholt man die Rechnung und verfährt so lange, bis keine Differenz mehr zwischen der Annahme und der Rechnung herauskommt.

Comas Solá hat für neuere Beben die Herdtiefen zwischen 45 und 61 km berechnet, darunter auch für das oben angeführte Erdbeben in der Provence vom 11. Juni. Für dieses beträgt $\delta = 700$ km in München; $t_3 - t_1 = 110^s$, woraus die Herdtiefe zu 60 km folgt, was in guter Übereinstimmung mit dem Werte 61 km, der aus den Angaben des 360 km entfernten spanischen Observatoriums Fabra folgt, ist. Eine ähnlich gute Übereinstimmung hat Comas Solá aus zwei verschiedenen Erdbebenstationen für das Erdbeben in Portugal gefunden. nämlich 51 und 55 km. Es dürfte daher diese Formel in vielen Fällen brauchbare Werte liefern.

Fig. 1.

Ostwestkomponente des Erdbebens vom 23. April 1909.

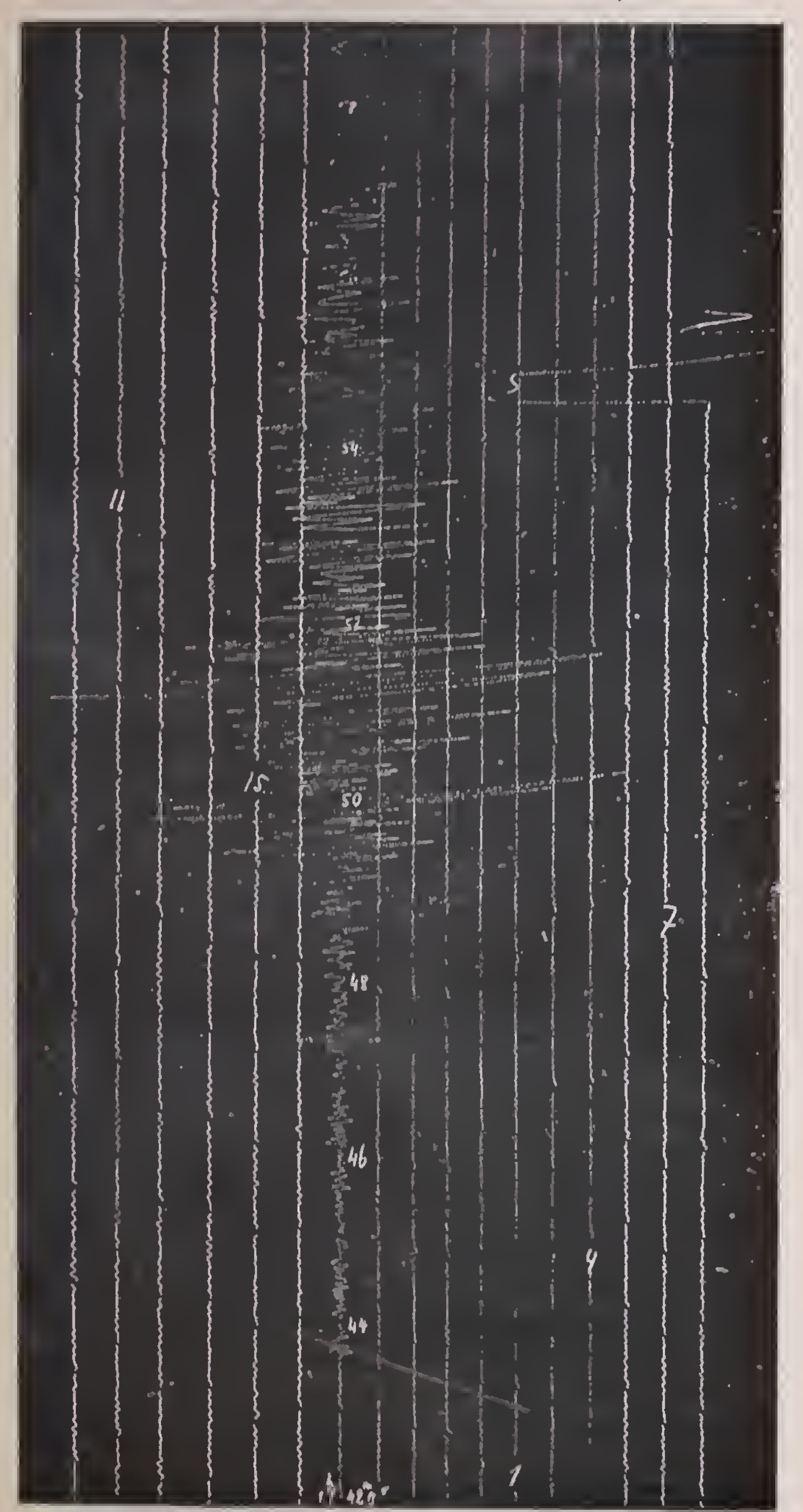


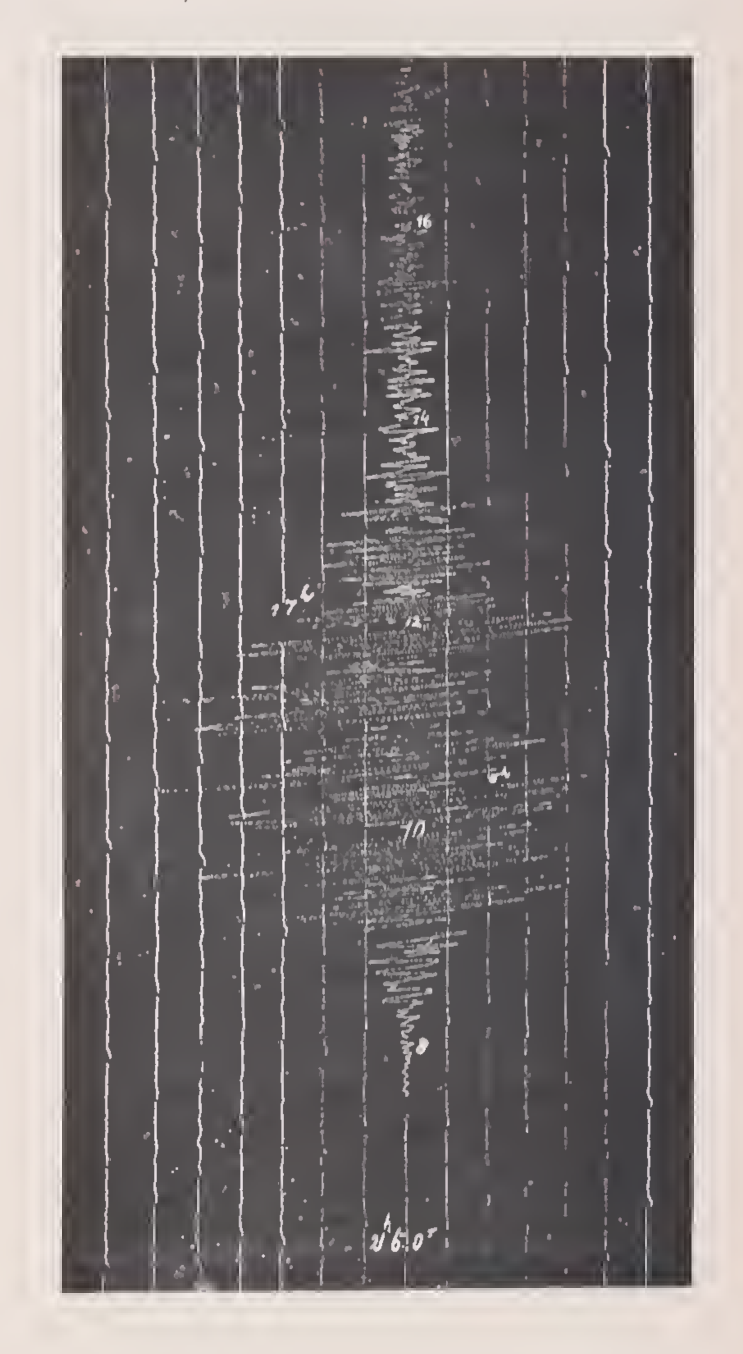
Fig. 2.

Nordsüdkomponente des Erdbebens vom 23. April 1909.



Fig. 3.

Ostwestkomponente des Erdbebens vom 11. Juni 1909.





Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 17. Abhandlung

Ein Beitrag zur Pithecanthropus-Frage

(Die paläobotanischen Ergebnisse der Selenka'schen Trinil-Expeditionen)

von

Julius Schuster

Mit einem Profil und einer Tafel

Vorgelegt am 4. Dezember 1909

München 1910
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Obwohl schon bald zwanzig Jahre seit der Entdeckung des *Pithecanthropus erectus* verflossen sind, ist das Altersproblem dieses so lebhaft umstrittenen Fundes immer noch nicht einwandfrei gelöst. Die Ansichten schwanken zwischen jungpliozän (Dubois, Stremme), altdiluvial (Martin, Elbert) und mitteldiluvial (Volz, Carthaus).

Die paläontologischen Beweise für das Alter des *Pithecanthropus* stützen sich auf die in jenen Schichten enthaltenen Mollusken und Säugetiere.

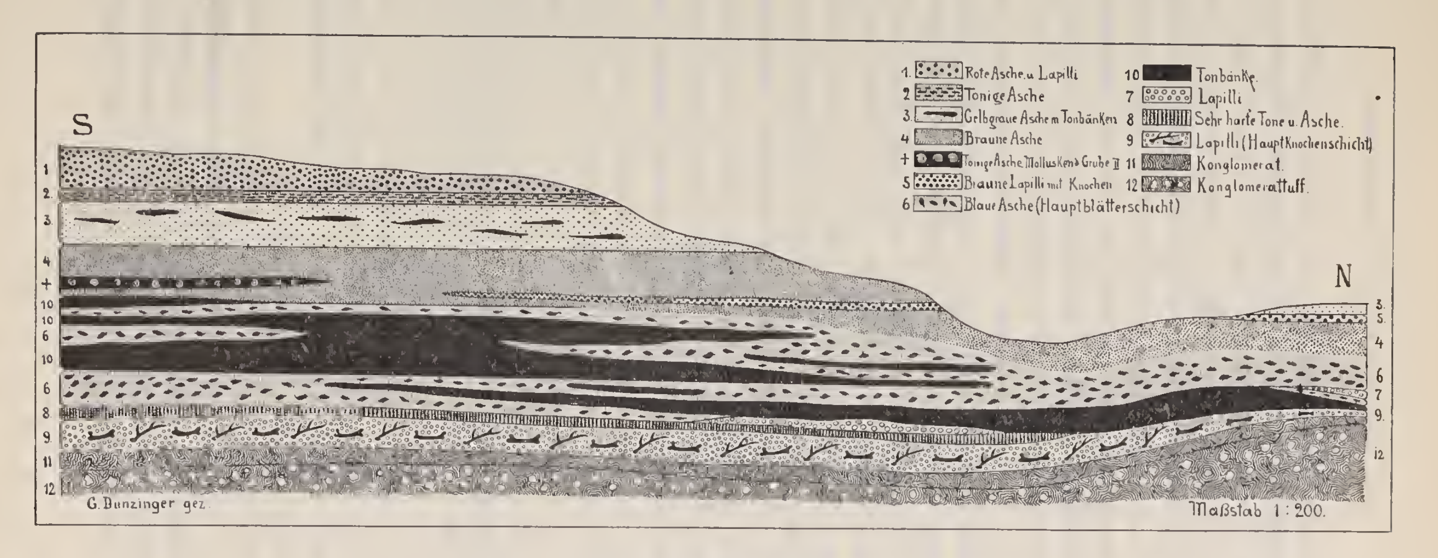
Nach den Bestimmungen von Martin und Frau, die sich auf 8 Süßwasser-Gastropoden beziehen, sind alle 8 Arten noch lebend, nur eine Varietät weicht etwas von dem rezenten Vertreter ab. Daraus leitet Martin das quartäre Alter der betreffenden Schichten ab. Dieser Schluß ist aber insoferne nicht ganz sicher, als mehrere Arten wegen Mangels an Vergleichsmaterial unbestimmt bleiben mußten, also möglicherweise ausgestorbene Arten enthalten; die quartäre Altersbestimmung ist demnach nur auf 7 Gastropoden-Spezies gegründet, eine Zahl, die wegen ihrer absoluten Kleinheit einen exakten Beweis für das diluviale Alter um so weniger liefert, als die rezente Molluskenfauna des indoaustralischen Archipels noch lange nicht vollständig bekannt ist.

Dagegen stützt sich Dubois auf die zahlreichen Wirbeltierreste, namentlich auf die Knochen der großen Säuger. Da diese teils mit der rezenten Fauna von Java Ähnlichkeit haben, teils mit den in den altpliozänen Siwalikschichten am Fuße des Himalaya gefundenen Tieren, so sieht Dubois in den

Knochenresten der *Pithecanthropus*-Schichten neue Arten und schließt auf Grund der so gewonnenen großen Anzahl an neuen Spezies auf ein jungpliozänes Alter der Ablagerung und Stremme hält auf Grund der von der Expedition der Frau Selenka gesammelten Säugetierreste diese Ansicht für durchaus wahrscheinlich. Nun sind aber die Knochen der Säugetiere in diesem Falle für die Altersbestimmung keineswegs so wertvoll, als es bei einer europäischen Ablagerung der Fall wäre; denn einmal kennt man in Asien viel zu wenig von der diluvialen Säugetierfauna, um irgendwelche exakte Schlüsse ziehen zu können und dann ist es noch gar nicht bekannt, welche Arten von altertümlichen Tiergattungen im Altdiluvium jener Länder noch lebten und welche im Jungpliozän schon ausgestorben waren.

Eine erheblich festere Grundlage für das Alter der Schichten, in denen diese Tiere gefunden wurden, bilden die fossilen Pflanzen. Wenn auch die Unterschiede zwischen den pliozänen und den heutigen Floren kaum nennenswert sind, insoferne ausgestorbene Gattungen unter den pliozänen Pflanzen nicht mehr vorkommen, so gestatten doch die Arten, die ja die rezentesten Formveränderungen darstellen, sichere Schlüsse in dieser Richtung. Eine pliozäne Flora setzt sich zusammen teils aus ausgestorbenen Arten, die zwar den rezenten außerordentlich nahestehen, sich aber nicht mit ihnen identifizieren lassen, teils aus Pflanzen, deren Analogien jetzt andere Weltteile bewohnen, teils aber auch schon aus jetzt in der betreffenden Gegend lebenden Arten. Wenn also von einer in großer Arten- und Individuenzahl erhaltenen fossilen Flora bewiesen werden kann, daß sie weder eine ausgestorbene Art oder Varietät enthält noch auch solche Arten, die heute ein wesentlich differentes Florengebiet bewohnen, d. h. im vorliegenden Falle ein anderes als das indoaustralische, so ist das diluviale Alter eine unbestreitbare Tatsache.

Während früher nur die Tiere der *Pithecanthropus*-Schichten beachtet wurden, war es der Expedition der Frau Selenka vorbehalten, zahlreiche fossile Pflanzenreste auszugraben.



Profil der Grube I
am rechten Ufer des Solo-Flusses südwestlich von Trinil.

Die ganze Schichtenfolge von Trinil, welche Pflanzen- und Tierreste führt, besteht aus vulkanischem Material und wird von sehr jungen marinen Schichten unterlagert, die sich hauptsächlich aus Mergeln und Kalken zusammensetzen. Über diesen liegt eine mehrere Meter mächtige Ablagerung aus Stücken von Andesit und Bimsstein in buntem Gewirr, die Konglomeratschichten (siehe Profil), in denen sich schon spärliche Knochenreste einstellen, aber noch keine Pflanzen. Über den Konglomeratschichten folgt in einer Mächtigkeit von 0,40—1 m die Hauptknochenschicht mit zahlreichen Knochen- und Molluskenschalen; hier treten auch zum ersten Male Pflanzen auf, aber spärlich und meist nur in Gestalt von verkohlten grasartigen Blattabdrücken, ferner Kiesel- und Braunkohlenhölzer sowie eine orangenartige Frucht. Das Gestein besteht hier vorwiegend aus feineren Lapilli mit vereinzelten größeren Andesitstücken. Darüber liegt eine sehr harte Schicht aus Tuffen und Lapilli mit nicht näher bestimmbaren Blattmassen und verkohlten grasartigen Resten sowie Holzkohlen. Aus der überlagernden blaugrauen Lapillischicht, die zuweilen fehlt, liegen keine Pflanzen vor. Weitaus die meisten Pflanzen, namentlich alle bestimmbaren Blattabdrücke, stammen aus dem darauffolgenden blaugrauen, mehr oder weniger grobkörnigen Tuff mit feinen Einlagerungen von Ton, wo sich die Blätter zum Teil in dünnen Schichten finden, die sich meist auskeilen. In dieser Hauptblätterschicht, wie sie mit Recht genannt werden kann, wurden zahlreiche Blattabdrücke, Kiesel- und Braunkohlenhölzer sowie Holzkohlenstücke gefunden, auch enthält diese Schicht sehr viel Schwefelkies. Über der Hauptblätterschicht liegen noch weitere fünf Schichten, eine braune Lapillischicht mit Knochen und vier Aschenschichten, aus denen indes Pflanzen nicht vorliegen.

Betrachtet man die Pflanzenwelt der Trinilschichten näher, so liegt sie vor uns wie ein einziges großes Herbarium, in dem sich das Vegetationsbild jener vergangenen Zeit klar und deutlich zu erkennen gibt. Auf das große Berliner Herbarium gestützt und später auf das speziell die malaiische Flora

enthaltende Riksherbarium zu Leiden konnte ich 54 Arten von Pflanzen aus 22 Familien bestimmen und kam dabei zu dem Ergebnis, daß alle 54 Arten noch lebend sind; nicht eine einzige von dem rezenten Typus abweichende oder ausgestorbene Art oder Varietät befand sich unter dem zahlreichen, vier große Kisten umfassenden Material, das teils durch die mit Beihilfe der akademischen Jubiläumsstiftung der Stadt Berlin ausgeführte SELENKA-Expedition 1906/07, teils durch die von der Münchener Akademie unterstützte SELENKA-Expedition 1908 zusammengebracht worden war.

Die folgende Liste gibt eine Übersicht über die in den Trinilschichten gefundene fossile Flora, soweit sie einer exakten Bestimmung zugänglich war; wo nichts angegeben ist, bezieht sich die Bestimmung auf Blattabdrücke der Hauptblätterschicht; h bedeutet das häufige, m das mehrfache, e das einmalige Vorkommen der betreffenden Pflanzenart. Die systematische Beschreibung und bildliche Darstellung der fossilen Flora von Trinil wird später erfolgen und zwar in der Weise, daß immer das entsprechende rezente Objekt neben dem fossilen abgebildet wird, so daß sich jedermann von der Richtigkeit der Bestimmung überzeugen kann.

Fungi.

Polyporaceae.

1. *Polyporaceae spec.*; Myzel parasitisch in den Gefäßen eines in Holzopal umgewandelten Stammstückes von *Cassia alata* L. (siehe auch Nr. 43).

Dicotyledones.

Fagaceae.

2. *Castanopsis Curtisii* KING; h.

Moraceae.

3. *Streblus asper* LOUR.; m.
4. *Artocarpus rigida* BL.; m.
5. *Artocarpus cf. altissima* J. J. SMITH; ♂ Infloreszenz, verkohlt; e.
6. *Ficus indica* L.; m.

7. *Ficus retusa* L.; m.
8. *Ficus infectoria* Roxb.; m.
8a. *Ficus infectoria var. Wightiana* King; e.
9. *Ficus callosa* Willd.; m, auch Kieselhölzer.
10. *Ficus variegata Bl.*; e.

Loranthaceae.

11. *Loranthus longiflorus* Desv.; e.
12. *Loranthus elasticus* Desv.; e.
13. *Loranthus pulverulentus* Wall.; e.

Hamamelidaceae.

14. *Altingia (Liquidambar) excelsa* Noronha; e.

Euphorbiaceae.

15. *Flueggea obovata* M. Arg.; m.
16. *Cleistanthus myrianthus* Kurz; m.
17. *Aporosa fruticosa* M. Arg.; m.
18. *Mallotus moluccanus* M. Arg.; e.

Anonaceae.

19. *Uvaria zeylanica* L.; m.
20. *Uvaria Lamponga* Schaff.; m.
21. *Uvaria purpurea* Bl.; e.
22. *Melodorum manubriatum* (Wall.) Hook. f. et Thoms.; e.
23. *Ellipeia cuneifolia* Hook. f. et Thoms.: m.
24. *Unona discolor* Vahl; m.
25. *Polyalthia lateriflora* King; m, auch Kieselholz.
26. *Mithrephora Maingayi* Hook f. et Thoms.; m.

Lauraceae.

27. *Tetranthera alnoides* Miq.; h, sämtliche Holzkohlen.
28. *Tetranthera salicifolia* Roxb.; m.
29. *Cylicodaphne fusca* Bl.; e.
30. *Cylicodaphne cuneata* Bl.; e.
31. *Dehaasia squarrosa* Miq. et Zoll.; e.
32. *Cryptocarya ferrea* Bl. *var. oblongifolia* (Bl.) Meisn.; e.

Dilleniaceae.

33. *Tetracera sarmentosa* (L.) Willd. *var. hebecarpa* (DC.) Hook. f. et Thoms.; m.

Guttiferae.

34. *Garcinia dulcis* Kurz; e.
35. *Garcinia Grahami* Pierre; m.
36. *Mesua ferrea Choisy*; m.

Dipterocarpeae.

37. *Hopea fagifolia* Miq.; e.
38. *Vatica lancaefolia* Miq.; m.

Sterculiaceae.

39. *Reveesia Wallichii* R. Br.; Kieselholz, Hauptknochenschicht.

Rutaceae.

40. *Feronia elephantum* Corea; Frucht, Hauptknochenschicht; e.

Meliaceae.

41. *Aglaia palembanica* (Miq.) C. DC.; e.
42. *Aglaia odorata* Lour.; m.

Papilionaceae.

43. *Cassia alata* L.; e, auch Opalholz (vgl. Nr. 1).
44. *Saraca minor* Miq.; e.
45. *Indigofera tinctoria* L.; m.
46. *Deguelia (Derris) elliptica* Benth.; h, auch eine Hülse e.

Melastomaceae.

47. *Memecylon floribundum* Bl.; m.
48. *Memecylon myrsinoides* Bl.; m.

Araliaceae.

49. *Polyscias pinnata* Forst.; e, auch Braunkohlenholz in der Hauptknochenschicht.

Boraginaceae.

50. *Cordia aff. suaveolens* Bl.; Kieselholz.

Loganiaceae.

51. *Fagraea litoralis* Bl.; m.

Apocyneae.

52. *Willughbya apiculata* Miq.; m.

Caprifoliaceae.

53. *Viburnum coriaceum* Bl.; e.

Monocotyledones.

Cyperaceae.

54. *Cyperus spec.*; h in der Hauptknochen- und Hauptblätterschicht, sowie in der sehr harten Ton- und Aschenschicht.

Von welcher Baumart kleine Stücke von fossilem Kopal von bernsteinartiger Beschaffenheit sind, läßt sich, da der Kopal weder Tier- noch Pflanzenreste enthält, nicht bestimmen. Je 0.2 g des fossilen Kopals zehn Tage digeriert in je 5 ccm Alkohol absol. erwiesen sich als teilweise löslich, ebenso in Äther (0,720) und Eisessig, in Benzol bis auf geringe Mengen von Verunreinigungen löslich, desgleichen in Chloroform und Terpentinöl; Bernsteinsäure (in je 2 g) war weder freie noch ungebundene nachweisbar.

Vergleicht man die fossile Flora von Trinil mit dem Pflanzenkleid. das heute Java bedeckt, so kommt man zu dem bemerkenswerten Ergebnis, daß von den 54 Arten nur 24 jetzt noch in Java vorkommen. die übrigen dagegen teils auf verschiedenen Inseln des indoaustralischen Archipels teils auf dem indischen Festland. Nach der heutigen geographischen Verbreitung läßt die fossile Trinilflora mehrere Gruppen erkennen. wie aus der folgenden Zusammenstellung ersichtlich ist. Die Angaben über die jetzige geographische Verbreitung sind teils der Literatur entnommen, teils stützen sie sich auf noch unveröffentliches Material in den Herbarien von Berlin und Leiden. Die in Java jetzt noch lebenden sind mit J bezeichnet. die dort in historischer Zeit ausgestorbenen mit J †.

I. Pflanzen, die von Ostindien bis Neu-Guinea bzw. Australien gehen.

1. *Ficus retusa*; J; Ost-Himalaya, Vorderindien, Ceylon. Hinterindien, Siam, China, Formosa. Nikobaren, Sumatra, Borneo, Celebes. Philippinen, Neu-Guinea. Neu-Island, Neu-Caledonien; 20—1200 m.

2. *Ficus infectoria*; J; Khassische Berge, Ostindien, Ceylon, Hinterindien, Manila, Timor, Neu-Guinea; *var. Wightiana* Ceylon, Ostindien, Japan; 50—1200 m.
3. *Ficus callosa*; J; Ostindien bis Celebes, Timor; 10 bis 1000 m.
4. *Loranthus longiflorus*; J; Himalaya, Timor, Australien; 0—1200 m.
5. *Flueggea obovata*; J; Himalaya bis China, Philippinen, Australien, Afrika; 150—1350 m.
6. *Cleistanthus myrianthus*; J; Malaiische Halbinsel, Andamanen, Borneo, Celebes, Philippinen, nördl. Neu-Guinea.
7. *Mallotus moluccanus*; J; Celebes, Philippinen, Neu-Guinea.
8. *Garcinia dulcis*; J; Andamanen, Celebes, Molukken, Timor; 20—500 m.
9. *Aglaia odorata*; J; Ostindien bis China, Philippinen, Amboina.
10. *Cassia alata*; J; in den Tropen kosmopolitisch, Ostindien bis Timor, Brasilien, Cuba, Haiti, Martinique; 360 m und Bergwälder.
11. *Deguelia elliptica*; J; Malaiische Halbinsel bis Siam und Neu-Guinea; 50 m und höher.
12. *Polyscias pinnata*; australisches Element! Neu-Guinea, Neu-Caledonien, Celebes, Philippinen; 600—1100 m.
13. *Fagraea litoralis*; J; Celebes, Molukken; 10—700 m.

II. Pflanzen, die auf den Philippinen ihre Ostgrenze erreichen.

1. *Streblus asper*; J; Ostindien bis Siam, Sumatra, Philippinen, Molukken; 50—1000 m.
2. *Uvaria purpurea*; J; Malaiische Halbinsel bis Hongkong und zu den Philippinen; 100—150 m und höher.
3. *Melodorum manubriatum*; Malaiische Halbinsel und Philippinen; 150—240 m und höher.
4. *Aglaia palembanica*; Malaiische Halbinsel, Sumatra, Borneo, Philippinen; 300—450 m und höher.
5. *Memecylon floribundum*; J; bisher für endemisch gehalten!, auch Philippinen; 25—900 m.

III. Pflanzen, welche bis Celebes gehen.

1. *Ficus variegata*; J; Ostindien bis China, Andamanen, Celebes; 10—1500 m.
2. *Unona discolor*; J; Ostindien bis China, Borneo, Celebes; 10—500 m und höher.
3. *Polyalthia lateriflora*; J; Malaiische Halbinsel, Sumatra, Celebes; 30—1200 m.
4. *Tetracera sarmentosa var. hebecarpa*; J; Ostindien bis Siam, Sumatra, Celebes.

IV. Pflanzen, die jetzt nur mehr auf dem Festlande oder auf diesem und einer bzw. mehreren der drei großen Sunda-Inseln oder ausschließlich auf letzteren vorkommen.

A. Nur mehr auf dem Kontinent.

1. *Loranthus elasticus*; Ostindien bis Malaiische Halbinsel.
2. *Loranthus pulverulentus*; Himalaya bis Malaiische Halbinsel; 600—1200 m.
3. *Mitrephora Maingayi*; Malaiische Halbinsel; 150—360 m und höher.
4. *Tetranthera salicifolia*; Malaiische Halbinsel bis 1800 m.
5. *Vatica lancaefolia*; Himalaya bis Malaiische Halbinsel; 120—1200 m.
6. *Reveesia Wallichii*; Khassia, Indien; 900—1350 m.
7. *Feronia elephantum*; West-Himalaya, Ceylon, Vorderindien; 300—900 m.
8. *Indigofera tinctoria*; Ostindien bis Japan.

B. Nur von dem indischen Festland und Ceylon lebend bekannt.

9. *Uvaria zeylanica*; Malabar, Travancore, Ceylon; bis 900 m.

C. Nur auf dem Festland und einer oder mehreren der drei großen Sunda-Inseln lebend vorkommend.

10. *Castanopsis Curtisii*; Malaiische Halbinsel und Borneo; 300 m.

11. *Artocarpus rigida*; J; Malaiische Halbinsel, Sumatra, Borneo; 150—450 m und höher.
12. *Ficus indica*; J; Ostindien bis Java; 50—1000 m.
13. *Altingia excelsa*; J; Ost-Himalaya bis Yunnan, Sumatra; 600—1200 m.
14. *Aporosa fruticosa*; J; Malaiische Halbinsel, Java.
15. *Ellipeia cuneifolia*; Malaiische Halbinsel, Borneo; 150 bis 300 m und höher.
16. *Tetranthera alnoides*; J; Himalaya bis China, Malaiische Halbinsel, Java; 1200—1500 m.
17. *Cryptocarya ferrea var. oblongifolia*; J; Malaiische Halbinsel und Java; 500 m und höher.
18. *Mesua ferrea*; J †; Himalaya bis Siam; 1300 m.
19. *Hopea fagifolia*; J; Malaiische Halbinsel, Sumatra, Bangka; 20—500 m.
20. *Saraca minor*; Himalaya bis Siam, Ceylon, Malakka, Sumatra; 150—700 m.
21. *Memecylon myrsinoides*; J; Malaiische Halbinsel, Java; 200—450 m.
22. *Viburnum coriaceum*; J; temperierter Himalaya bis Zentral-China (Sze ch'uan), Sumatra, Java; 1200 bis 2700 m.
23. *Cyperus spec.*; J; Java und Malaiische Halbinsel.

D. Heute nur mehr auf einer bzw. mehreren der drei großen Sunda-Inseln lebend.

24. *Artocarpus altissima*; Sumatra.
25. *Uvaria Lamponga*; Sumatra.
26. *Cylicodaphne cuneata*: Sumatra, Borneo.
27. *Cylicodaphne fusca*; Sumatra.
28. *Dehaasia squarrosa*: J; Java.
29. *Garcinia Grahami*; Borneo.
30. *Cordia suaveolens*; J; Java; 5—500 m.
31. *Willughbya apiculata*; Sumatra.

Betrachtet man die geographische Verbreitung dieser Arten, so fällt auf, daß die überwiegende Mehrzahl der Pflanzen im

östlichen Himalaya-Gebiet ihren Ursprung nimmt; nur eine einzige Art, *Polyscias pinnata*, muß entsprechend ihrem jetzigen Verbreitungsareale von Australien eingewandert sein. Um nun aus der Verteilung dieser Flora Schlüsse über ihr Alter zu ziehen, muß die Fragestellung lauten, welche Landverbindungen sind notwendig, um diese Verbreitung zu erklären und in welcher Zeit existierten diese Landverbindungen. Zwar können bestimmte biologische Pflanzengruppen, wie z. B. die Strandflora, deren Samen durch die Wellen des Ozeans verbreitet werden, leicht über die Meere wandern; aber bei Trinil handelt es sich um eine ausgesprochene Baumflora und bei tropischen Waldbäumen ist eine glückliche Wanderung über eine bedeutende Meeresstrecke eine seltene Ausnahme. Es wurde oben gezeigt, daß von den 54 Arten, welche die fossile Flora von Trinil erkennen läßt, heute 13 vom östlichen Himalaya-Gebiet bis Neu-Guinea und Australien gehen, fünf bis zu den Philippinen, vier bis Celebes, während die übrigen Arten, deren Zahl rund 30 beträgt, die großen Sunda-Inseln östlich nicht überschreiten. Besonders zeigt dies das Beispiel der Feigenbäume, von denen in Trinil fünf Arten fossil vorkommen; davon geht *Ficus indica* heute bis Java, *Ficus variegata* bis Celebes, *Ficus retusa* bis Neu-Guinea. Bei sämtlichen drei *Ficus*-Arten geht die Verbreitung gemeinsam von Ostindien aus, sämtliche leben in einer Höhenregion von durchschnittlich 10—1000 m und trotzdem die Verschiedenheit in dem geographischen Areal. Diese eigentümliche Verbreitung läßt sich nur durch Einwanderungen erklären, die in verschiedenen Zeiten und auf verschiedenen Landverbindungen erfolgten.

Die erste Gruppe von Pflanzen, die von Indien bis Australien gehen, erfordern eine Landverbindung des asiatischen Kontinents mit den drei großen Sunda-Inseln, mit Celebes, den Philippinen, den Molukken, Timor, Neu-Guinea und Australien, so daß in dieser Zeit westliche Pflanzen und Tiere ungehindert via Timor oder über die Molukken bis Australien gelangen konnten.

Werfen wir nun einen kurzen Blick auf die Geologie des

indoaustralischen Archipels, so finden wir, daß noch im Eozän ein großer Teil desselben unter Wasser lag und eine weite See Asien und Australien trennte. Im Miozän entstand die Insel Celebes und wurde von Java aus besiedelt. Von dieser miozänen Invasion sind fossile Pflanzenreste durch Goeppert, Heer, Geyler und Raciborski bekannt gemacht worden und es steht unzweifelhaft fest, daß diese Pflanzen der Gattung nach der indomalaiischen Flora der Gegenwart sehr ähnlich sind. Die Hebung der Länder steigert sich im Pliozän und während des Höhepunktes der Pliozänperiode bestehen die ausgedehnten Landverbindungen, die es Tieren wie Pflanzen ermöglichen, vom indischen Festland bis nach Australien vorzudringen und umgekehrt. In dieser pliozänen Landperiode erfolgte die Vermischung der asiatischen und australischen Tier- und Pflanzenformen, hier erfolgte die erste jungpliozäne Pflanzeninvasion vom Himalaya, die Arten wie z. B. die Euphorbiacee *Flueggea obovata* bis Australien führte, während umgekehrt spezifisch australische Elemente wie *Polyscias pinnata*, eine baumartige Araliacee, bis nach Trinil vordrangen. Aber schon gegen das Ende der Pliozänzeit brachen in umgekehrter Reihenfolge, als die Vorstöße nach Osten erfolgten, die entsprechenden Landbrücken ein und setzten der Verbreitung der westlichen Elemente engere Grenzen. Zuerst erfolgte die Auflösung der Verbindung mit Australien, so daß sich die zweite jungpliozäne Invasion nur mehr bis zu den Philippinen erstrecken konnte; aber auch die Landbrücke nach den Philippinen brach am Ende der Pliozänzeit ein, gleichzeitig mit ihr wahrscheinlich auch die Celebesbrücke, wie sich aus der Verteilung der rezenten Arten auf diesen Inseln ergibt. Die dritte und letzte jungpliozäne Invasion fand daher in Java bzw. Borneo die natürliche Grenze ihrer Verbreitung. Java trennte sich erst in altdiluvialer Zeit ab, durch Einbruch der Javabrücke entstand die Sunda-Straße.

Nun enthält die fossile Flora von Trinil nicht wenig Arten, im ganzen rund 30, die heute nur mehr auf dem indischen Festland oder auf Sumatra bzw. Borneo vorkommen.

Ihre Anwesenheit in der pflanzenführenden Ablagerung von Trinil zeigt, daß damals noch keine hindernden Schranken bestanden, welche die Verbreitung dieser Arten hemmten. Da nun die Javabrücke in altdiluvialer Zeit einbrach, kann die fossile Flora von Trinil nicht jünger sein als altdiluvial, sie kann aber, da sie nicht eine einzige ausgestorbene Art oder Varietät enthält, auch nicht älter, also jungpliozän sein.

Dadurch ist zum ersten Male mit völliger paläontologischer Sicherheit an einem umfangreichen 54 Arten in zahlreichen Individuen umfassenden Material das **altdiluviale** Alter des *Pithecanthropus* einwandfrei erwiesen.

Die pliozänen Pflanzen, die Crié von Java beschrieben hat, sind von der Trinilflora spezifisch verschieden; nicht eine einzige verwandte oder ähnliche Art findet sich unter ihnen. Nun kommen aber in den jüngsten englischen Pliozänlagen schon 90 Prozent rezente Arten vor; dadurch entsteht die Frage, ob dieser Satz auch für die Tropen gilt und ob nicht eine derartige moderne Flora, wie sie die Ablagerung von Trinil enthält, ebensogut in jungpliozänen Schichten enthalten sein kann. Das wäre an sich wohl denkbar, denn es wurde oben gezeigt, daß alle Arten, die sich fossil in Trinil erhalten haben, auf drei im Jungpliozän erfolgenden Invasionen nach Java kamen, aber es ist keinem Zweifel unterworfen, daß man dann auch irgendwelche Relikte einer älteren Flora finden würde, selbst wenn man für die Tropen im Jungpliozän einen höheren Prozentsatz an rezenten Arten annimmt als für Europa. Anderseits ist zu bedenken, daß es noch kein Beweis gegen das altdiluviale Alter der Trinilflora wäre, wenn sich unter den 54 Arten zwei bis drei ausgestorbene hätten nachweisen lassen; enthält doch die dem vorletzten Interglazial angehörende Höttinger Breccie noch zwei ausgestorbene Arten, die Trinilablagerung dagegen nicht einmal eine ausgestorbene Varietät.

Es könnte gegen die altdiluviale Altersbestimmung des *Pithecanthropus* der Einwand erhoben werden, ob diese in erster Linie auf die sogenannte Hauptblätterschicht begründete Be-

stimmung auch für die Flora und Fauna der Trinilschichten von oben bis zu dem das Konglomerat unterlagernden Ton gilt und alle diese Schichten tatsächlich ein und dasselbe geologische Alter haben, nämlich das altdiluviale. Weder der paläontologische noch der geologische Befund widerspricht dieser Auffassung. Die Fauna der Schichten verrät durchaus denselben Charakter; so finden sich beispielsweise von dem in der Hauptknochenschicht relativ häufigen *Stegodon* noch über der braunen Aschenschicht 4 (siehe Profil) Knochen derselben Spezies. Das gleiche läßt sich von den Pflanzen behaupten, wenn hier auch die bestimmbaren Reste aus den tiefer liegenden Schichten spärlich sind. Die orangenartige Frucht *Feronia elephantum*, die sich in der Hauptknochenschicht fand und heute nur mehr an der Koromandel-Küste wächst, paßt gut in das Florenbild hinein und das Braunkohlenholz gehört zu *Polyscias pinnata*, deren Blatt aus der Hauptblätterschicht vorliegt. Die in der harten Ton- und Tuffschicht gefundenen Holzkohlenstücke lassen sich mit der Lauracee *Tetranthera alnoides* identifizieren, deren erlenartige Blätter gleichfalls in der Hauptblätterschicht mehrfach gesammelt wurden.

Aber auch aus geologischen Gründen geht hervor, daß die Trinilschichten in einer relativ kurzen Zeit entstanden sind. Daß die Pflanzen, von denen sich in der Hauptknochenschicht so zahlreiche Reste finden, nicht an Ort und Stelle gewachsen sind, geht schon daraus hervor, daß die Holzreste in regelloser Verteilung vorkommen, niemals in aufrechter Stellung. Auch Wurzeln von Bäumen, die natürlich, wären die Bäume an der Ablagerungsstelle gewachsen, die tiefer liegenden Schichten durchdrungen hätten, fehlen vollständig und an den ausgehobenen Gesteinsstücken mit Blattabdrücken sieht man deutlich, daß die Blattreste der verschiedensten Pflanzenarten wirr durcheinander gestreut an die Stellen gerieten, wo sie in Ton oder Tuff eingebettet wurden. Wie sind nun diese Pflanzen an ihre Fundstelle verschleppt worden und warum zeigen die fossilen Hölzer und Knochen trotz des Transportes keine Abrollung?

Der Natur der ganzen Ablagerung nach ist es unzweifelhaft, daß die Tiere, mit denen die Pflanzen vergesellschaftet sind, durch eine jener gewaltigen vulkanischen Katastrophen umgekommen sind, wie sie noch in unserer Zeit in Java stattgefunden haben und die Schilderungen, die der vielseitige Junghuhn von diesem gewaltigen, alles vernichtenden Lahar-Phänomen gibt, sind wohl geeignet, das Vorhandensein so zahlreicher Knochen und Stammstücke in den Trinilschichten zu erklären. Unter Lahar versteht man nicht nur die Schlammmassen, die aus dem Krater hervorquellen und schwerbeladen mit Asche, Bimssteinen und Bomben herabströmen, sondern auch das Bett, durch das diese Schlammströme ihren Lauf nehmen. Ob die Laharströme, die sich bis Trinil wälzten, aus dem mit einem See erfüllten Riesenkrater des Wilis (2256 m) oder dem benachbarten Lawu (3265 m) hervorbrachen, läßt sich wegen der gleichartigen petrographischen Beschaffenheit dieser Vulkane nicht sicher angeben, doch kann es keinem Zweifel unterliegen, daß die Konglomeratschichten samt der überlagernden Hauptknochenschicht die Produkte gewaltiger Laharströme aus dem mit einem See erfüllten Krater eines der genannten Vulkane darstellen. Durch den Transport in dem mehr oder weniger breiigen Laharstrom erklärt sich auch die auffallende Erscheinung, daß die fossilen Knochen und Hölzer von Trinil keine Abrollung zeigen. Wenn trotzdem niemals vollständige Skelette oder ganze entwurzelte Baumstämme gefunden wurden, wie dies zu erwarten wäre, wenn die Tiere sofort in die Laharströme geraten wären, so erklärt sich dies daraus, daß die Tiere nicht gleich bei der ersten Haupteruption von einem Laharstrom fortgerissen wurden, sondern teils durch die Ausleerung des Kratersees des Vulkans ertränkt teils unter der vulkanischen Asche begraben, tagelang liegen blieben und mehr oder weniger verwesten, bis ihre Kadaver und Skelette durch einen wolkenbruchartigen Tropenregen, wie sie in jenen Gegenden häufig niederfallen, einem gewaltigen Laharstrom zugeführt wurden. Bedenkt man, daß dieser Transport in einem tiefen und ausgedehnten Flußbett erfolgte, welches durch

den Laharstrom noch weiter aufgerissen wurde, daß ferner die Verschleppung nach Trinil 35—40 km betrug und das Gefälle bis zu dem 15 km von dem Vulkan entfernten Madiun 1 : 20 war, so kann es nicht verwundern, daß die Tierleichen bis zu ihrer Ablagerung in Trinil vollständig zerfielen und von Pflanzen in den für ihre Erhaltung ungeeigneten Konglomeratschichten nichts und in der Hauptknochenschicht nur Hölzer, aus Zweig- und Blattresten bestehender Detritus sowie eine Frucht mit derber Schale vorkommen: die leichter vergänglichen Blätter waren jedenfalls schon vorher verfault oder in pulverartigen Detritus umgewandelt, ehe die Knochen in den Laharstrom gelangten. Am schnellsten wurden in dem mit Aschenbrei erfüllten Laharstrom natürlich die erbsen- bis kopfgroßen Bimssteinstücke transportiert, dann erst folgten die spezifisch schwereren Andesitstücke und rissen bei ihrer Ablagerung die Bimssteine teilweise mit herab, weshalb in den Konglomeratschichten Bimssteinstücke und Andesitblöcke in buntem Gewirr durcheinander liegen. Die Konglomeratschichten und die aus Lapilli bestehende Hauptknochenschicht verdanken also einem bei der Haupteruption hervorbrechenden gewaltigen Laharstrom ihre Entstehung. Durch kleinere Wasserläufe, die nach der Haupteruption dem Bette des Laharstromes zuflossen, wurden diesem noch erhebliche Mengen an vulkanischem Material zugeführt; so entstand die die harte Tonschicht überlagernde Lapillischicht. Zu der Zeit, als die Hauptblätterschicht und die dazugehörige Lapillischicht abgelagert wurde, muß der Laharstrom schon sehr ruhig geflossen sein und das ist nach der Haupteruption ganz gut denkbar, denn schon Junghuhn erwähnt das Beispiel eines Mannes, der vor einem Laharstrom fliehen wollte, dabei von der Krone einer umstürzenden Kokospalme bedeckt und so gerettet wurde, weil der Schlamm wie ein Gewölbe über ihn hinwegfloß; woraus folgt, daß der Schlamm weder sehr flüssig noch sehr heiß war. Durch kleinere Wasserläufe später dem Laharstrom zugeführt wurden auch die Aschen, die in den vier obersten Schichten abgelagert sind. Daraus und aus allem, was wir über den Umfang und die Mächtigkeit der Lahar-

ströme wissen, geht hervor, daß die Laharbildungen von Trinil bei einer Mächtigkeit von nicht ganz 25 m wohl in einer verhältnismäßig kurzen Zeit samt und sonders entstanden sind.

Das regellose Auskeilen der Schichten bei Trinil erklärt sich dadurch, daß sich die von dem Vulkan kommenden Laharströme in eine Rawah, einen Sumpfsee, ergossen, dessen nördlicher Rand nahe bei dem heutigen Trinil lag. Daß es sich hier nur um ein stehendes, nicht aber ein kräftig strömendes Wasser handeln kann, ergibt sich aus den zahlreichen Funden von ganzen Blättern, aus dem Fehlen von Quarzsand und Flußgeröll sowie aus der Bildung von Schwefelkies und Markasit in der Nähe der Braunkohlenhölzer der Hauptblätter- wie auch der Hauptknochenschicht; nur in stagnierendem Wasser kann sich in der Nachbarschaft faulender Hölzer Schwefelkies bilden. Die Rawah bei Trinil war dadurch entstanden, daß sich nach dem Ausbruch des Vulkans das Laharmaterial aufstaute; der durch das Laharmaterial gebildete Rand der Rawah erlitt dann, besonders zur Zeit sehr reichlicher atmosphärischer Niederschläge hin und wieder Durchbrüche, wodurch das Wasser in dem Sumpfsee in eine stärker strömende Bewegung geraten mußte. Da die Annahme durchaus begründet ist, daß in einem Sumpfsee die Sedimentierung im großen und ganzen regelmäßig erfolgt und die Tonschichten in Trinil durchschnittlich 1 m dick sind, so ergibt sich auch hieraus das einheitliche Alter der Ablagerung. Paläontologisch verschiedene Horizonte nach den organischen Einschlüssen unterscheiden zu wollen, wie Elbert es getan hat, ist gänzlich unbegründet, ebenso Elberts Versuch entsprechend dem europäischen Diluvium drei Stufen zu unterscheiden, die Flußterrassen entsprechen; es wurde oben gezeigt, daß Schicht 11 bis 9 (Konglomerat + Lapilli I) der Haupteruption des Vulkans entspricht, Schicht 8—7 (harter Ton + Lapilli II) einem der Haupteruption unmittelbar folgenden schwächeren Ausbruch, Schicht 6—5 (Ton und Tuff + Lapilli III) einer dritten schwachen Eruption, Schicht 4—1 (Asche) vier kleineren

späteren Ausbrüchen, so daß im ganzen eine Haupt- und sechs spätere kleinere Eruptionen vorliegen, die alle einer und derselben geologischen Periode angehören.

Auch aus der Fossilisation der gefundenen Holzreste kann nicht auf ein pliozänes Alter der Trinilschichten geschlossen werden. Wenn verhältnismäßig viele Kieselhölzer gefunden werden, so kann dies nicht wundernehmen, wenn auch das die organischen Reste umschließende Gesteinsmaterial, Augit-Andesittuff mit hauptsächlich grüner und brauner Hornblende, Orthoklas und Lapilli, keinen Quarz enthält; Quarzkörnchen fehlen fast gänzlich in den vulkanischen Tuffen. Der Ursprung der Kieselsäure ist in der vulkanischen Asche zu suchen, welche eine beträchtliche Menge von Kieselsäure und kieselsäurehaltigen Verbindungen enthält, die sich in dem aus der Atmosphäre kommenden, meist Kohlensäure enthaltenden Wasser auflösen. Wo das fein zerteilte Aschenmaterial ärmer ist, erscheinen die Hölzer (das gleiche gilt auch für die Knochen) viel weniger verändert und durch die leichte Zersetzung des Markasits in schwefelige bzw. Schwefelsäure in Braunkohle verwandelt. Dazu kommt, daß gerade in der feuchten Tropenregion die Fossilisation ungemein schneller vor sich geht, demnach der höhere oder niedrigere Grad derselben durchaus keinen Maßstab für das größere Alter der Holz- und Knochenreste darstellt.

Vergleicht man die fossile Flora von Trinil mit dem Pflanzenkleid, das heute in der Umgebung von Trinil wächst, so findet man nach den von Elbert 1907 gemachten Aufsammlungen im Rijksherbarium zu Leiden, deren Bestimmung von Hans Hallier und mir ausgeführt wurde, folgende Arten in der Nähe von Trinil lebend (die Nummern beziehen sich auf Elberts Exsikkaten im Rijksherbarium).

I. Trinil, Nordebene von Madiun; 100 m.

1. *Loranthus longiflorus* (Nr. 410); 100—150 m.
2. *Uvaria purpurea* (Nr. 353); 100—150 m.
3. *Cassia alata* (Nr. 389); 100—300 m.

II. Vulkan Pandan; 906 m.

4. *Streblus asper* (Nr. 523); 400—900 m.
5. *Ficus variegata* (Nr. 521); 400—900 m.
6. *Flueggea obovata* (Nr. 482); 400—900 m.
7. *Saraca minor* (Nr. 486); 400—900 m.
8. *Memecylon myrsinoides* (Nr. 488); 400—900 m.

III. Vulkan Lawu-Kukusan; 3265 m.

9. *Ficus retusa* (Nr. 320), Kukusan; 1200—1400 m.
10. *Viburnum coriaceum* (Nr. 15—18 inkl.), südwestlich von Kendil, 1500—1600 m; Kukusan, Kali Djeploh, 1200—2600 m.

Betrachtet man die fossile Flora von Trinil in ihrer Gesamtheit, so weist alles mit Sicherheit darauf hin, daß sie einem offenen immergrünen gemischten Urwald der temperierten Zone entspricht, wie er heute in einer Höhe von 600—1200 m vorkommt und zwar an der oberen Grenze dieser gemäßigten Region. Nur wenige laubabwerfende Bäume finden sich unter den fossilen Baumsorten von Trinil, *Memecylon myrsinoides* und *Ficus infectoria*, aber auch diese werfen ihr Laub nur kurze Zeit ab: alles übrige sind fast ausschließlich immergrüne Bäume und Sträucher. Am Rande dieses Urwaldes, in dessen düsterem Schatten die größte Mannigfaltigkeit an Baumarten, aber Armut an Blüten herrscht, war eines jener untiefen stehenden Gewässer, wie sie in Java auch im Innern des Landes so häufig sind, eine Rawah, deren Ufer mit zahlreichen Riedgräsern aus der Gattung *Cyperus* bestanden war. Sie bildeten gewiß die Nahrung der so zahlreich gefundenen Hirsche, deren verhältnismäßig stark in sich gekrümmte Geweihe an das Zwergrentier aus dem norddeutschen Diluvium erinnern und durch diese Eigentümlichkeit beweisen, daß die Träger dieser Geweihe nicht in einem dichten, von Lianen reich bedeckten Urwald wohnten, wie er sich heute in der heißen Zone von Java findet — denn hier hätten sich die Hirsche mit ihren Geweihen bald verstrickt —, sondern in dem weniger dichten, von Lianen fast freien Urwald der gemäßigten

Zone; von Lianen sind nur *Deguelia elliptica*, ein windender Strauch, und *Willoghbya apiculata*, eine Kautschukliane, zu nennen. Man könnte die gemäßigte Zone, wie dies auch manche Reisende getan haben, als die Region der Feigenbäume und *Anonaceen* bezeichnen und in der Tat sind auch in der fossilen Flora von Trinil die *Moraceen* und *Anonaceen* mit je acht Arten am häufigsten, aber diese treten schon in der heißen Zone des Tieflandes auf, von der überhaupt noch zahlreiche Arten in der gemäßigten Region angetroffen werden. Dagegen tritt hier die heute in Mitteljava fehlende *Altingia xcelsa* auf, der Fürst der Urwälder, nach dem man diese Zone die Region der Rasamalabäume genannt hat. Ich möchte aber die Region, die der fossilen Flora von Trinil entspricht, lieber als die Region der Lorbeergewächse bezeichnen, da diese nach Arten- wie Individuenzahl stark hervortreten und für die obere Grenze der temperierten Zone charakteristisch sind; in einer geringeren Höhe würde man sie vergeblich suchen. Für den physiognomischen Charakter des Vegetationsbildes ist vor allem das Vorkommen einer Schneeball-Art, *Viburnum coriaceum*, von Interesse, die nicht unter 1200 m herabgeht; aber auch das Auftreten von *Castanopsis Curtisii*, eines Kastanienbaumes vom Habitus der Eichen, ferner Arten wie *Mesua ferrea*, *Ficus retusa*, *Reveesia Wallichii* u. a. weisen mit Sicherheit auf die naßkalte Luft der gemäßigten Zone hin.

Was die klimatischen Verhältnisse der temperierten Gewächszone betrifft, so fällt die Temperatur von 22° auf 18° C. Die Zeit, in der die Wärme über Tag den höchsten Grad erreicht, ist viel veränderlicher als in der heißen Zone, der Unterschied zwischen Tag- und Nachttemperatur größer. Fast jeden Nachmittag entladen sich an den Gehängen der Berge die heftigsten Gewitter, der Regen ist stärker. Vom Winde getriebene Nebelmassen ziehen zwischen den Stämmen und die Feuchtigkeit der Atmosphäre ist größer; die Blätter haben nicht selten Träufelspitzen, die der Blattfläche eine raschere Trockenlegung gestatten. In der Ebene von Madiun, in der Trinil liegt, beträgt die jetzige Temperatur durchschnittlich

24—28°: die Temperatur zur Zeit des *Pithecanthropus* war daher, wie aus den angeführten Zahlen hervorgeht, im Mittel um 6° niedriger als heute. Es ist also für Trinil in altdiluvialer Zeit eine thermische Depression anzunehmen und dies gilt für die gesamte Ablagerung der *Pithecanthropus*-Schichten, da alle Pflanzenreste nach meinen Untersuchungen einer einzigen Gewächszone angehören. Wenn Elbert die Pflanzenreste von Trinil zwei verschiedenen Gewächszonen einreiht und innerhalb dieser fünf verschieden hoch gelegene Horizonte von Pflanzenabdrücken unterscheidet, für die er eine Menge von Gattungen angibt, so beruht dies darauf, daß seine sämtlichen Pflanzenbestimmungen — Elbert bestimmte nur die Gattungen — unrichtig sind. Daraus kann dem Geologen Elbert kein Vorwurf gemacht werden, denn gerade in der Phytopaläontologie werden so viele Bestimmungen von Dilettanten gemacht, daß dadurch zum Teil die ganze Wissenschaft in Mißkredit gebracht wird und wer nicht die etwa 1000 Baumarten Javas und ihre Variationsbreite auf Grund eingehender systematischer Studien kennt, der kann auch keine fossilen Pflanzen von Java bestimmen.

Es könnte eingewendet werden, die Reste der für ein gemäßigtes Klima sprechenden Pflanzen seien von den höheren Gebirgszonen durch kleinere Wasserläufe nach der Haupteruption des Vulkans herabgeschwemmt worden. Nun handelt es sich aber bei der Trinilflora schon um die obere Grenze der gemäßigten Region und es wäre nicht einzusehen, warum dann nicht auch Pflanzen der kühlen, durch das Vorherrschen der Eichen-Arten charakterisierten Zone sowie der durch heidekrautartige alpine Typen gekennzeichneten kalten Gipfelflora bei der Eruption mit herabgeschwemmt wurden. Hiergegen ließe sich wieder sagen, der Vulkan sei damals noch gar nicht so hoch gewesen, aber auch dies ist nicht wahrscheinlich. Denn als Produzenten der Laharströme kommen, wie erwähnt, nur der Wilis oder der Lawu in Betracht, namentlich der erstere, denn er bedeckt mit seinem Fuß eine noch größere Fläche als der Lawu. Da aber die Winkel, unter denen seine

unteren, nicht vom Einsturz betroffenen Teile aus der Ebene aufsteigen, so ziemlich dieselben sind wie beim Lawu, darf man wohl annehmen, daß der Wilis gleich dem heutigen Lawu an 3000 m hoch war, bis eine Reihe von Eruptionen seinen jetzigen Zustand herbeigeführt hat und historische Angaben über Eruptionen des Wilis liegen nicht vor. Namentlich weist aber der einheitliche Charakter der gesamten Flora, die ihren Ursprung in den Bergwäldern des temperierten Himalaya hat und keine Arten enthält, die ausschließliche Bewohner der heißen Tropenregion sind, darauf hin, daß nicht etwa eine Mischflora verschiedener Zonen bei Trinil abgesetzt wurde. Zudem muß der Laharstrom zu jener Zeit, als die Pflanzen der Hauptblätterschicht durch ihn transportiert wurden, schon sehr ruhig und wenig heiß gewesen sein, da sonst nicht so viele ganze Blätter nach Trinil gelangt wären. Auch dieser Umstand macht es sehr unwahrscheinlich, daß aus den höheren Regionen Pflanzen in größerer Menge mitgerissen wurden. Auch ist nochmals zu betonen, daß spezifische Tieflandsbewohner oder küstennahe Gewächse vollständig fehlen, dagegen eine analoge Vegetation wie die fossile Trinilflora an der Ostgrenze von Indien in Assam bei 750—1200 m Höhe zu finden ist, nämlich in den Khassischen Bergen, einer der regenreichsten Gegenden der Welt, wo die jährliche Regenmenge ca. 11,5 m beträgt. Daß ein derartiges Klima nicht mehr genügt, um das hervorzubringen, was unter tropischer Vegetation verstanden wird, leuchtet ein und so spricht die Gesamtheit der fossilen Trinilpflanzen nicht nur für ein weniger warmes, sondern auch für ein feuchteres Klima, als es jetzt in Mitteljava herrscht, wo die Wälder schon Übergänge der größerer Feuchtigkeit bedürfenden Flora Westjavas und der xerophilen Gehölzformation Ostjavas darstellen. Arten wie *Aglaia palembanica*, *Ficus callosa*, *Hopea fagifolia*, *Saraca minor*, *Streblus asper*, *Viburnum coriaceum* sind keine Freunde trockener Standorte und bevorzugen ausschließlich feuchte Bergwälder. Aus der Säugetierwelt kann natürlich eine derartige thermische Depression nicht geschlossen werden und die Molluskenreste

sind ihrer Zahl nach zu gering, um weitergehende Schlüsse in dieser Richtung zu ziehen, auch die rezenten Vertreter und ihre geographische Verbreitung bei weitem nicht so gut bekannt als es die Flora des indoaustralischen Archipels ist. Immerhin ist zu erwähnen, daß die von Martin angegebene *Paludina javanica* nach Junghuhn noch heute in den Sumpfseen oder Rawahs der gemäßigten Region vorkommt; auch Süßwassermuscheln sind hier zahlreicher als in der heißen Region und Flußmuscheln gehören bekanntlich zu den allerhäufigsten Trinil-Mollusken.

Zu den gleichen Resultaten wie die fossile Flora von Trinil führt diejenige von Tritek, wo Elbert in den oft 150 m eingeschnittenen Tälern am Südabhange des kleinen, nur 906 m hohen Vulkans Pandan ein fast ebenso vollständiges Profil fand als bei Trinil. Die fossile Tritekflora (siehe Tafel), die ich im Rijksherbarium in Leiden sah, enthält nur zwei Arten: mehrfache Abdrücke der Myrtacee *Caryophyllus floribundus* Miq. und in großer Anzahl die Theacee *Gordonia excelsa* Bl. Erstere findet sich lebend in der Umgebung von Trinil im Gandong-Tal, Lido Ramping, 1300—1400 m (Elbert, Nr. 208), letztere am Gipfel des Lawu, 2900—3200 m (Elbert, Nr. 287), geht aber bis 600 m herab. *Gordonia excelsa* wächst am Ost-Himalaya, in den Khassischen Bergen, auf der Malaiischen Halbinsel, Sumatra und Java. So weisen auch diese wenigen Pflanzen auf das feuchtere und gemäßigte Klima der temperierten Zone hin, nicht aber auf die kühle Gewächszone, wie Elbert annahm.

Wie ist nun die thermische Depression im Altdiluvium von Mitteljava zu erklären? Es konnte oben gezeigt werden, daß vom Himalaya aus gegen das Ende der Pliozänzeit drei Pflanzeninvasionen nach Osten erfolgten. Das hat offenbar darin seinen Grund, daß gegen das Ende der Pliozänzeit vom Himalaya ausgehend eine allgemeine Klimaverschlechterung eintrat, die auch im Altdiluvium noch andauerte und durch Herabsetzung der Temperatur sowie durch größere Feuchtigkeit auch für den Archipel fühlbar gewesen sein muß, gleichgültig, ob wir uns diese als Glazialzeit oder, was wahr-

scheinlicher ist, als Pluvialzeit vorstellen. Nun entspricht einer diluvialen Firngrenzendepression von 500—600 m in den Tropen eine mittlere Temperaturerniedrigung von 3—4°; da, wie oben angeführt wurde, für die *Pithecanthropus*-Schichten eine Temperaturerniedrigung von 6° anzunehmen ist, würde demnach die Firnliniendepression in Java 800 m betragen haben und diese Zahl stimmt mit der diluvialen Schneegrenze in Afrika ziemlich gut überein, die 900—1000 m tiefer lag. Nun beträgt aber in Afrika die Gletschergrenze 4500—6000 m, in Java dagegen 3000—3100 m und daraus folgt wieder, daß die diluviale Schneegrenze in Trinil im Mittel 800 m tiefer gelegen haben muß als heutzutage. Bezeichnend für meine Auffassung, daß eine Klimaverschlechterung die Auswanderung der Pflanzen aus dem Himalaya-Gebiet verursachte, ist die Tatsache, daß die ausschließlich die temperierte Bergregion bewohnenden Pflanzen wie *Altingia excelsa, Castanopsis Curtisii, Mesua ferrea, Reveesia Wallichii, Viburnum coriaceum* sowie sämtliche *Lauraceae* am spätesten auswanderten: sie gehören alle der dritten, jungpliozänen Invasion an.

Für die wichtige Frage, ob sich in den *Pithecanthropus*-Schichten auch Spuren von der Tätigkeit des Menschen nachweisen lassen, sind die gefundenen Holzkohlenstücke ebensowenig entscheidend als die Knochenstücke. Es ist ja immerhin auffallend, daß die in der harten Ton- und Ascheschicht sowie in der Hauptblätterschicht gefundenen fünf Holzkohlenstücke ein und derselben Holzart angehören, nämlich der Lauracee *Tetranthera alnoides* Miq. und daß sie sämtlich noch die Markkrone im Innern enthalten, ohne daß die Zellen derselben gedrückt sind. Aber wenn auch direkte kohlige Brandschichten in den Trinilschichten infolge der Verschleppung durch den Laharstrom ebensowenig zu erwarten sind als vollständige Skelette, so können doch die Holzkohlenstücke ebensogut Teile eines in der heißen Asche oder glühenden Lava verkohlten Astes sein als die Reste einer menschlichen Feuerstelle.

Ist es demnach noch vollständig unsicher, ob mit dem *Pithecanthropus* zusammen schon Urmenschen lebten, so darf

anderseits aus dem sicher bestimmten altdiluvialen Alter des *Pithecanthropus* noch nicht der Schluß abgeleitet werden, daß der *Pithecanthropus* kein Bindeglied zwischen Mensch und Affe sei. Dies wäre trotzdem möglich, denn gerade die Trinilfauna hat die Merkwürdigkeit, daß sie die verschiedenen Entwicklungsstadien zu gleicher Zeit und nebeneinander enthält, wie *Stegodon*, die Zwischenform zwischen *Mastodon* und *Elephas*, *Tetracerus Kroesenii* Dubois, eine äußerst merkwürdige Übergangsform einer Antilopen-Art, und *Bibos palaesondaicus* Dubois, die Entwicklung einer *Bibos*-Form aus der noch etwas an die Antilopen erinnernde *Leptobos*-Form. Dieses eigentümliche Phänomen findet wohl darin seine Erklärung, daß bei der Klimaverschlechterung im Jungpliozän wie die Pflanzen so auch die Tiere von ihrem Entwicklungszentrum im Himalaya-Gebiet ostwärts wanderten und zwar sowohl die alten Urformen als auch die jüngeren Übergangsformen; sie besiedelten während der pliozänen Landperiode die zusammenhängenden Ländermassen des indoaustralischen Archipels, aber der rasche Einbruch der verschiedenen Landbrücken hinderte sie an einer Rückwanderung und veranlaßte ihr Aussterben in der umgekehrten Zeitfolge ihres Vordringens. Nur in Java, das ja noch im Altdiluvium mit dem Kontinent in Verbindung stand, konnte sich diese Tierwelt auch damals noch halten und so liegt nach meiner Ansicht in der Trinilfauna eine Diluvialfauna ganz besonderer Art vor, in der sich gemäß ihrer Lage im äußersten Südosten Asiens und im Verein mit dem langen Zusammenhang Javas mit dem Festlande länger als anderswo zahlreiche altertümliche Formen erhalten mußten. Daß aber in diluvialen Schichten ausgestorbene Säugetiere zusammen mit lebenden Pflanzen- und Schnecken-Arten vorkommen, ist sattsam bekannt.

Wenn ich schließlich die wichtigsten Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung zusammenzufassen versuche, so lassen sich diese in folgenden Sätzen ausdrücken:

1. Die in den Trinilschichten fossil erhaltenen Pflanzenreste gehören sämtlich solchen Arten an, die heute noch leben und sind daher nicht älter als diluvial.

2. Von den 54 sicher bestimmten Arten der Trinilflora kommen nur 24 jetzt noch lebend in Java vor, davon 10 in der Umgebung von Trinil.

3. Von der Gesamtheit der Arten sind heute 13 von Ostindien bis Neu-Guinea bzw. Australien verbreitet, 5 bis zu den Philippinen, 4 bis Celebes, 8 bewohnen heute nur mehr eine oder mehrere der drei großen Sunda-Inseln, 14 das indische Festland und eine bzw. mehrere der großen Sunda-Inseln, 1 ist auf Indien und Ceylon beschränkt, 8 auf das Festland von Indien.

4. Aus der Verbreitung dieser Arten folgt, daß zur Zeit der Entstehung der Trinilschichten Java noch mit dem Festland verbunden war; da die Javabrücke im Altdiluvium einbrach, kann die Trinilflora nicht jünger sein als altdiluvial, da sie keine einzige ausgestorbene Art oder Varietät enthält, auch nicht älter.

5. Der durchaus einheitliche Charakter der Flora und der ganzen Ablagerung beweist, daß das altdiluviale Alter für die gesamten Trinilschichten, also auch für den *Pithecanthropus* gilt.

6. Alle Pflanzen gehören einer einzigen Gewächszone an und zwar dem offenen, immergrünen, gemischten Urwald der temperierten Zone, also einer Höhenlage von 600—1200 m und zwar der oberen Grenze, d. h. der Region der Lorbeergewächse.

7. Daraus folgt, daß die Temperatur zur Zeit des *Pithecanthropus* im Mittel um 6° C. niedriger und die Schneegrenze durchschnittlich 800 m tiefer war als heute.

8. Die Zusammensetzung der Flora spricht aber nicht nur für ein kühleres, sondern auch feuchteres Klima.

9. Eine analoge Flora wächst heute in den feuchten, temperierten Bergwäldern der Khassischen Berge in Assam in einer Höhe von 750—1200 m.

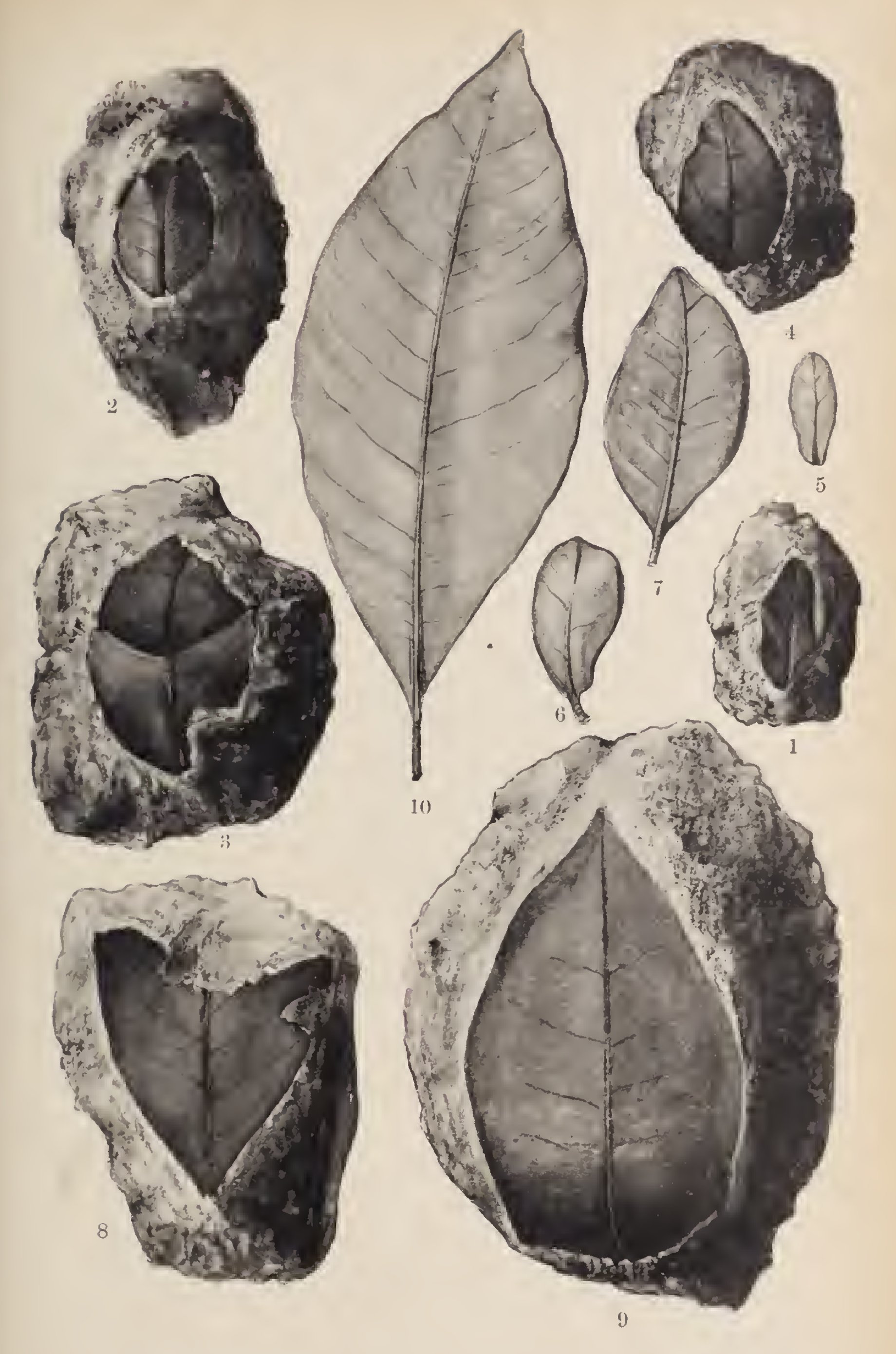
10. Das gleiche wie für die fossile Flora von Trinil gilt für die entsprechende Flora von Tritek.

Tafelerklärung.

Fossile Flora von Tritek am Südabhang des Pandan (vgl. S. 26).

Fig. 1—7. *Gordonia excelsa* Blume. *Theaceae.*
" 1—4. Fossil.
" 5—7. Variationen der rezenten Blätter vom Gipfel des Vulkans Lawu, 2900—3200 m (Elbert, Nr. 287); 5—6 Oberseite, 7 Unterseite.
" 8—10. *Caryophyllus floribundus* Miquel (*Eugenia confertiflora* Koorders et Valeton). — *Myrtaceae.*
" 8—9. Fossil.
" 10. Rezentes Blatt vom Gandong-Tal. Lido Ramping, 1300 bis 1400 m (Elbert, Nr. 208), Oberseite.

Originale im Rijksherbarium zu Leiden.



Gertrud Bartusch gez.



Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 18. Abhandlung

Elementare Herleitung des Weierstrass'schen „Vorbereitungssatzes“

von

G. Dumas

Vorgelegt am 4. Dezember 1909

München 1910
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Es handelt sich hier um einen wohlbekannten und fundamentalen Satz der Theorie der analytischen Funktionen, den man folgendermaßen aussprechen kann:

Ist $F(x, x_1, x_2, \ldots x_n)$ eine in der Umgebung der Stelle $x = x_1 = x_2 = \ldots x_n = 0$ konvergente[1]) gewönliche Potenzreihe von $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ und verschwindet die Funktion $F(x, 0, 0, \ldots 0)$ von x für $x = 0$ von der m^{ten} Ordnung, $m \geqq 1$, so gilt für eine gewisse Umgebung der betrachteten Stelle $x = x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ die Beziehung:

$$F(x. x_1, x_2, \ldots x_n) \\ = (x^m + f_1 x^{m-1} + \cdots + f_m) \cdot \Phi(x, x_1, x_2, \ldots x_n). \tag{1}$$

Dabei bedeuten:

$f_1, f_2, \ldots f_m$ gewöhnliche Potenzreihen von $x_1, x_2, \ldots x_n$, welche an der Stelle $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ verschwinden und in deren Umgebung konvergieren;

$\Phi(x, x_1, x_2, \ldots x_n)$ eine in der Umgebung der Stelle $x = x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ konvergente und an dieser Stelle selbst von Null verschiedene gewöhnliche Potenzreihe von $x, x_1, x_2, \ldots x_n$.

Die Zerlegung (1) ist eine völlig bestimmte.

Dieser Satz, den Weierstraß schon 1860 in seinen Vorlesungen gegeben hat, läßt sich verschiedenartig und in ein-

[1]) Eine Potenzreihe soll in der Umgebung einer Stelle konvergent heißen, wenn sich positive Zahlen $\varrho, r_1, r_2, \ldots r_n$ so bestimmen lassen, daß die Reihe für $|x| < \varrho$, $|x_i| < r_i$ konvergiert. Die Reihe konvergiert dann absolut und es können ihre Glieder beliebig angeordnet werden.

facher Weise beweisen. Die folgende Überlegung hat den Vorzug, frei von jeder transzendenten Betrachtung zu sein; auch gibt sie ein Mittel, beliebig viele Glieder der Potenzreihen der rechten Seite von (1) unmittelbar zu berechnen.[1]

§ 1.

Wir zeigen zunächst, wie man formal zu der Zerlegung (1) gelangen kann. Wir setzen:

$$F(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = F(x \mid x_i) = x^m \varphi(x) + \sum A_{\mu, \mu_1, \ldots \mu_n} x^\mu x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n},$$
$$\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n = 0, 1, 2, 3, \ldots \ldots$$
$$(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n \geq 1)$$

wo die $A_{\mu, \mu_1, \ldots \mu_n}$ numerische Koeffizienten bedeuten und $\varphi(x)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von x darstellt.

Da nach Voraussetzung $F(x \mid 0)$ von der m^{ten} $(m > 1)$ Ordnung Null wird, so beginnt $\varphi(x)$ mit einem von Null verschiedenen Gliede. Man kann also die Funktion $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ in eine gewöhnliche Potenzreihe $\varphi_1(x)$ entwickeln. Multipliziert man die Funktion $F(x \mid x_i)$ mit $\varphi_1(x)$, so bekommt man:

$$\varphi_1(x) F(x \mid x_i) = x^m \cdot 1 + \sum A'_{\mu, \mu_1, \ldots \mu_n} x^\mu x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n}.$$
$$\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n = 0, 1, 2, \ldots \ldots$$
$$(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n \geq 1)$$

Wir beweisen die Richtigkeit des Satzes für die einfachere Funktion $F(x \mid x_i)$. Der Übergang von der Funktion F zur Funk-

---

[1]) Bezüglich der klassischen Beweise dieses Satzes vergleiche man die Bemerkungen des Herrn **Goursat** in seiner Abhandlung „Démonstration élémentaire d'un théorème de Weierstrass" (Bull. Soc math. 36 (1908), p. 209—215).

Von dem Hauptsatze über implizite Funktionen, den Herrn Goursat in seinem eigenen Beweise benützt (p. 213 der zitierten Abhandlung), wird hier kein Gebrauch gemacht. Siehe auch: **Hartogs**, „Über die elementare Herleitung des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes" (München, Ber. 39 (1909), 3. Abhandlung), nebst Bemerkung vom 3. Juli 1909, wo sich verschiedene Literaturangaben finden; **Stickelberger** „Über einen Satz des Herrn Noether" (Math. Ann. 30 (1887), p. 403); **Pellet**, „Des équations majorantes" (Bull. Soc. math. 37 (1909), p. 97).

tion $\bar{F}$ ist zwar nicht notwendig, erlaubt aber eine elegantere Darstellung der ganzen Rechnung.

Fassen wir in der Funktion $\bar{F}(x \mid x_i)$ die Glieder derselben Dimension in $x_1, x_2, \ldots x_n$ zusammen, und ordnen wir diese Glieder nach steigender Dimension, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\bar{F}(x \mid x_i) = x^m \cdot 1 &+ x_1 \varphi_{1,0,\ldots 0} + x_2 \varphi_{0,1,\ldots 0} + \cdots + x_n \varphi_{0,0,\ldots 1} \\ &+ \ldots \\ + x_1^k \varphi_{k,0,0,\ldots 0} &+ x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} \varphi_{k_1,k_2,\ldots k_n} + \cdots + x_n^k \varphi_{0,0,\ldots k} \\ &+ \ldots\end{aligned}$$

oder kürzer:

$$\bar{F}(x \mid x_i) = x^m \cdot 1 + \sum_{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n \geq 1)} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} \varphi_{k_1,k_2,\ldots k_n}.$$

Der Koeffizient $\varphi_{k_1,k_2,\ldots k_n}$ ist eine gewöhnliche Potenzreihe von x. Die zu den Zeichen φ hinzugefügten n Indizes $k_1, k_2, \ldots k_n$ sollen andeuten, daß $\varphi_{k_1,k_2,\ldots k_n}$ Koeffizient von $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ in $\bar{F}(x \mid x_i)$ ist.

Ebenso soll in

$$\Psi(x \mid x_i) = 1 + \sum_{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n \geq 1)} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} \psi_{k_1,k_2,\ldots k_n}$$

$\psi_{k_1,k_2,\ldots k_n}$ eine gewöhnliche Potenzreihe von x bedeuten, mit welcher der Ausdruck $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ multipliziert ist. In

$$G(x \mid x_i) = x^m + \sum_{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n \geq 1)} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} g_{k_1,k_2,\ldots k_n}$$

möge $g_{k_1,k_2,\ldots k_n}$ zwar noch Faktor des ähnlichen Ausdrucks in $x_1, x_2, \ldots x_n$ sein, aber nicht mehr eine Potenzreihe, sondern nur noch ein Polynom von höchstens dem $(m-1)$. Grade in x, also eine ganze rationale Funktion bedeuten.

Unter dieser Annahme brauchen wir nur zu zeigen, wie die Funktionen $\psi_{k_1,k_2,\ldots k_n}$ und $g_{k_1,k_2,\ldots k_n}$ in eindeutiger Weise so bestimmt werden können, daß die Beziehung

$$\bar{F}(x \mid x_i) = G(x \mid x_i)\,\Psi(x \mid x_i) \tag{2}$$

erfüllt wird.

Die Beziehung (2) kann nur bestehen, wenn, nach Ausführung der Multiplikation rechts, die Koeffizienten entsprechender Glieder der beiden Seiten identisch sind.

Somit haben wir:

$$\varphi_{k_1, k_2, \ldots k_n} = x^m \psi_{k_1, k_2, \ldots k_n} + 1 \cdot g_{k_1, k_2, \ldots k_n} + \sum \psi_{k'_1, k'_2, \ldots k'_n} g_{k''_1, k''_2, \ldots k''_n}; \tag{3}$$

wo die Summe über eine endliche Anzahl von Produkten ψg, für welche

$$\begin{cases} k'_1 + k'_2 + \cdots + k'_n < k_1 + k_2 + \cdots + k_n, \\ k''_1 + k''_2 + \cdots + k''_n < k_1 + k_2 + \cdots + k_n \end{cases} \tag{4}$$

zu erstrecken ist. Indem man in $\bar{F}(x\ x_i)$ von den homogenen Gliedern niedrigster Dimension in $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu Gliedern von immer höherer Dimension übergeht, kann man mittelst (3) wegen der Ungleichungen (4) die Koeffizienten ψ und g in Ψ und G ermitteln. Die Potenzreihen ψ und die ganzen rationalen Funktionen g sind eindeutig bestimmt. In der Tat, schreiben wir (3) in der Form

$$\bar{\varphi}_{k_1, k_2, \ldots k_n} = x^m \psi_{k_1, k_2, \ldots k_n} + 1 \cdot g_{k_1, k_2, \ldots k_n} \tag{5}$$

und denken wir uns $\bar{\varphi}, \psi, g$ nach steigenden Potenzen von x geordnet:

$$\bar{\varphi} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^l,$$

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} b_l x^l,$$

$$g = \sum_{l=0}^{m-1} c_l x^l,$$

so hat man:

$$\begin{cases} c_l = a_l \ (l = 0, 1, 2, \ldots (m-1)) \\ b_l = a_{m+l} \ (l = 0, 1, 2, \ldots \ldots). \end{cases} \tag{6}$$

Dabei ist für das Folgende zu beachten, daß die Koeffizienten a_l von $\varphi_{k_1, k_2, \ldots k_n}$ zusammengesetzt sind aus den Koeffi-

zienten von $\varphi_{k_1, k_2, \ldots k_n}$ und den Koeffizienten der Funktionen $\psi_{k'_1, k'_2, \ldots k'_n}$ und $g_{k''_1, k''_2, \ldots k''_n}$, die man schrittweise berechnen und somit als bekannt voraussetzen kann.

Somit ist bewiesen, daß die Zerlegung (2) in eindeutiger Weise möglich ist. Daraus folgt aber sofort die Möglichkeit und Eindeutigkeit der Zerlegung (1), wo die Koeffizienten f_1, $f_2, \ldots f_m$ und die Funktion Φ, wie man durch eine andere Anordnung der Glieder von G und Ψ einsieht, die angegebene Bedeutung haben.

§ 2.

Da $F(x \mid x_i)$ in der Umgebung des Punktes $x = 0$, $x_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ konvergiert, so ist dies auch für die Funktion $\bar{F}(x \mid x_i)$ der Fall.

Macht man daher nötigenfalls in $\bar{F}(x \mid x_i)$ eine Transformation von der Form $x = \varrho x'$, $x_i = \varrho_i x'_i$ und dividiert man den erhaltenen Ausdruck durch ϱ^m, so gelangt man zu einer Funktion von derselben Struktur wie $F(x \mid x_i)$, in welcher, infolge eines bekannten Satzes der Funktionentheorie, alle Koeffizienten absolut genommen kleiner oder gleich sind einer gewissen positiven Größe a.[1]) Dies werden wir also auch von der Funktion $\bar{F}(x \mid x_i)$ selbst voraussetzen können.

Bezeichnen wir mit $d_{k_1, k_2, \ldots k_n}$ bzw. $d_{k'_1, k'_2, \ldots k'_n}$ u. s. w. ganze positive Zahlen, die größer sind als der absolute Wert irgend eines Koeffizienten der Funktionen $\psi_{k_1, k_2, \ldots k_n}$ und $g_{k_1, k_2, \ldots k_n}$ bzw. $\psi_{k'_1, k'_2, \ldots k'_n}$ und $g_{k'_1, k'_2, \ldots k'_n}$ u. s. w., so sehen wir, da diese Größen durch die Beziehung

$$(7) \qquad d_{k_1, k_2, \ldots k_n} = a + m \sum d_{k'_1, k'_2, \ldots k'_n} d_{k''_1, k''_2, \ldots k''_n}$$

definiert werden können, daß solche Zahlen tatsächlich existieren.

(7) geht nämlich aus (3) hervor. Führt man auf der rechten Seite von (3) unter dem Summenzeichen eine der Multi-

---

[1]) Vgl. Brill, „Über das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle“ (München, Ber. 31 (1891), p. 217).

plikationen von ψ und g aus, so setzt sich der Koeffizient irgend einer Potenz von x im Produkte ψg aus höchstens m Ausdrücken zusammen, da g eine ganze rationale Funktion von niedrigerem als dem m^{ten} Grade ist. Wird also jeder Koeffizient in ψ und in g mittelst der entsprechenden d majoriert, so bekommt man als majorierten Koeffizienten von

$$\psi_{k'_1, k'_2, \ldots k'_n} \cdot g_{k''_1, \ldots k''_n}$$

den Ausdruck:

$$m\, d_{k'_1, k'_2, \ldots k'_n}\, d_{k''_1, k''_2, \ldots k''_n}.$$

In Gleichung (7) bezieht sich die endliche Summe rechts auf dieselben Produkte von ψ und g wie die Summe rechts in der Gleichung (3).

Schreiben wir nun:

$$D(x_1, x_2, \ldots x_n) = D(x_i) = \sum_{\substack{k_1, k_2, \ldots k_n = 0, 1, 2, \ldots \\ (k_1 + k_2 + \cdots + k_n \geq 1)}} d_{k_1, k_2, \ldots k_n}\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}.$$

so haben wir, indem wir eine bekannte Bezeichnung einführen, die besagt, daß eine Reihe Majorante einer anderen ist:

$$(8)\quad \begin{cases} x^m + (1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1})\, D(x_i) \gg G(x \mid x_i), \\ 1 + (1 + x + x^2 + \cdots)\, D(x_i) \gg \Psi(x \mid x_i). \end{cases}$$

Die Reihe $1 + x + x^2 + \cdots$ konvergiert aber für $|x| < 1$, während $1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1}$ eine ganze rationale Funktion ist. Können wir zeigen, daß die Reihe $D(x_i)$ in einer gewissen Umgebung des Punktes $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ konvergiert, so erhellt sofort daraus, daß die beiden Potenzreihen $G(x \mid x_i)$ und $\Psi(x \mid x_i)$ in der Umgebung des Punktes $x = x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ auch konvergieren.[1])

Setzen wir jetzt von der Reihe $D(x_i)$, die wir kurz mit D

---

[1]) **G. Dumas**, „Sur les fonctions à caractère algébrique dans le voisinage d'un point donné" (Paris 1904). In dieser Arbeit (p. 55) wird eine mit D analoge Reihe z verwendet, die ich damals nach einer Angabe von Herrn **J. Franel** summiert hatte. Derselbe Weg wird hier eingeschlagen.

bezeichnen wollen, für einen Augenblick die Konvergenz voraus, so bekommen wir durch Multiplikation von D mit sich selbst eine neue Reihe:

$$D^2 = \sum_{\substack{k_1, k_2, \ldots k_n = 0, 1, 2, \ldots \\ (k_1 + k_2 \ldots + k_n \geqq 1)}} \bar{d}_{k_1, k_2, \ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n},$$

in welcher:

$$\bar{d}_{k_1, k_2, \ldots k_n} = \sum d_{k_1', k_2', \ldots k_n'} d_{k_1'', k_2'', \ldots k_n''}. \tag{9}$$

Die endliche Summe rechts in (9) entsteht aus den beiden Faktoren D ganz in derselben Weise, wie die entsprechenden Summen in den rechten Seiten von (3) oder (7). Daher hat man

$$d_{k_1, k_2, \ldots k_n} = m \bar{d}_{k_1, k_2, \ldots k_n} + a$$

und daher auch:

$$D = m D^2 + a \sum_{\substack{k_1, k_2, \ldots k_n = 0, 1, 2, \ldots \\ (k_1 + k_2 + \ldots + k_n \geqq 1)}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}.$$

d. h.:

$$m D^2 - D + a \left[\frac{1}{1 - x_1} \frac{1}{1 - x_2} \cdots \frac{1}{1 - x_n} - 1 \right] = 0, \tag{10}$$

wenn

$$\underset{(i = 1, 2, \ldots n)}{|x_i| < 1}$$

ist.

D ist Wurzel der Gleichung (10) und zwar ist diese Reihe gleich derjenigen Wurzel, welche für $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ selbst Null wird.

Demnach hat man:

$$D = \frac{1}{2m} \left[1 - \sqrt{1 - 4ma \left(\frac{1}{1 - x_1} \frac{1}{1 - x_2} \cdots \frac{1}{1 - x_n} - 1 \right)} \right],$$

woraus folgt, daß D tatsächlich in einer gewissen Umgebung des Punktes $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ konvergiert. Wegen (8) konvergieren auch die Potenzreihen G und Ψ in der Umgebung des Punktes $x = x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, und somit ist der Weierstraßsche Satz bewiesen.



Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 19. Abhandlung

Über Kurvenpaare im Raume

von

A. Voss

Vorgetragen am 6. Februar 1909

München 1910
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Zwei reelle Kurven C, C_1 im Raume[1]) stehen in einer reziproken Beziehung, wenn ihre Punkte P, P_1 derart einander zugeordnet sind, daß die Verbindungslinien PP_1 von unveränderlicher Länge k sind, und die Tangenten der Kurven in P, P_1 einen konstanten Winkel γ mit PP_1 bilden.

Es besteht aber ein wesentlicher Unterschied, je nachdem dieser Winkel $\frac{\pi}{2}$ beträgt oder nicht. Im ersten Falle findet keine Relation zwischen den zugehörigen Bogenelementen ds, ds_1 statt, und wenn der Winkel für die Kurve C gleich $\frac{\pi}{2}$ ist. gilt wegen der Unveränderlichkeit von PP_1 dasselbe für C_1. Im zweiten Falle aber muß die Gleichung $ds \cos\gamma = ds_1 \cos\gamma_1$, also $ds = ds_1$ bestehen; dann ist aber bei gegebenem $\cos\gamma$ die Lage der Linie PP_1 gegen das charakteristische Triëder von C, wie sich leicht zeigt, durch eine Differentialgleichung erster Ordnung bestimmt, welche nur von der Krümmung und Torsion der Kurve C und den Konstanten k und γ abhängt. Es besitzt daher der Fall $\gamma = \frac{\pi}{2}$ — abgesehen von seiner Symmetrie —, wenn man von der Unveränderlichkeit von γ nicht abgehen will, einen größeren Spiel-

[1]) Es ist vielleicht nicht unzweckmäßig, „Kurven im Raume" und „Raumkurven" zu unterscheiden. Die meisten der in der Literatur behandelten Fragen handeln allgemein von Kurven im Raume, während man die Bezeichnung „Raumkurve" nur da verwenden sollte, wo die betreffende Kurve einen von ∞ verschiedenen Torsionsradius hat, wie dies in der Theorie der algebraischen Kurven längst üblich ist.

raum für weitere Untersuchungen, und daher soll nur diese Beziehung hier verfolgt werden.

Unter einem Kurvenpaar im Raume verstehen wir daher zwei reelle Kurven C, C_1, welche durch gemeinsame Normalen von konstanter Länge punktweise aufeinander bezogen sind. Dieselben scheinen sich von jedem Punkte dieser Normalen aus betrachtet unter dem Winkel der korrespondierenden Tangenten zu schneiden, sie „schneiden sich unter diesem Winkel".

Es handelt sich hier also um die kinematische Frage nach den Beziehungen zwischen den Bahnen irgend zweier Punkte einer starren Geraden, welche beständig „senkrecht zu sich selbst" bewegt wird. Indessen scheint es nicht zweckmäßig, die Gesichtspunkte der Bewegungslehre in den Vordergrund zu stellen. Schon die Untersuchung der Bertrandschen Kurvenpaare, welche einen ganz speziellen Fall des hier behandelten Gegenstandes bilden, zeigt, daß eine andere, an die Beziehungen zur natürlichen Geometrie anknüpfende Behandlung einfacher ausfällt. Eine zweite Betrachtungsweise könnte an die Regelflächen anschließen, auf denen die Kurven C, C_1 orthogonale Trajektorien der Erzeugenden bilden. Ich habe auch diesen an die Flächentheorie anknüpfenden Weg, der übrigens zu manchen für diese letztere interessanten Resultaten führt,[1]) hier nicht verfolgt, weil mir ein anderer, dessen Grundlagen in den § 1, § 12 entwickelt sind, angemessener erschien.

Da das Beispiel der Bertrandschen Kurven — abgesehen von den schönen Eigenschaften der Fokalellipsen und Hyperbeln — fast das einzige ist, in dem man sich mit den gegenseitigen Beziehungen von Kurven im Raume beschäftigt hat, so dürften die folgenden Untersuchungen vielleicht geeignet sein, das Interesse auf dieses bisher, wie es scheint, weniger betretene Gebiet zu lenken.

[1]) Auf den zu den Bertrandschen Kurven gehörigen Normalen-Regelflächen bilden diese selbst zwei orthogonale Trajektorien der Erzeugenden, die zugleich Haupttangentenkurven der Flächen sind.

Eine große Zahl von weiteren Problemen, die im folgenden teils angedeutet, teils sich unmittelbar an dasselbe anschließen, wird sich jedem leicht darbieten.

Werden übrigens Kurven im Raume durch ihre natürlichen Gleichungen charakterisiert, so entzieht sich freilich in denjenigen Fällen, wo man die zugehörige Riccatische Gleichung nicht durch verhältnismäßig einfache Quadraturen zu lösen im stande ist, die Gestalt der Kurven einer näheren Diskussion. Es sind daher vorzugsweise solche Fälle besprochen, die auch der Anschauung zugänglich sind; man wird erkennen, daß auch diese in mannigfaltiger Weise einer weiteren Ausdehnung fähig sind.

§ 1.

Kurvenpaare im Raume.

Es seien x, y, z die Koordinaten der Punkte P einer reellen Kurve C im Raum, der Bogen s die unabhängige Variabele. Die Richtungscosinus ihrer Tangente, Hauptnormale und Binormale seien, wie üblich, durch das Schema

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \xi, & \eta, & \zeta \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{matrix}$$

bezeichnet, dessen Determinante gleich $+1$ ist. Alsdann gelten die Formeln von Frenet

$$\text{1)} \qquad \begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \alpha \\ \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{\xi}{r} \\ \frac{d\xi}{ds} &= -\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\lambda}{T}\right) \\ \frac{d\lambda}{ds} &= \frac{\xi}{T} \end{aligned}$$

nebst den entsprechenden für y, β, η, μ; z, γ, ζ, ν; r und T sind die Radien der Krümmung und Torsion.

Wird nun auf derjenigen Normalen der Kurve C, welche unter dem Winkel σ gegen die Hauptnormale geneigt ist, — wobei ein positives σ demjenigen Drehungssinn entspricht, durch den, vermöge der Rotation $\frac{\pi}{2}$ um die Tangente, die Hauptnormale in die Binormale übergeführt wird — eine konstante Strecke k abgetragen, so bilden die Endpunkte P_1 eine zweite Kurve C_1, deren Koordinaten x_1, y_1, z_1 sind. Die entsprechenden Richtungscosinus des charakteristischen Triëders von C_1 seien

$$\begin{matrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \xi_1, & \eta_1, & \zeta_1 \\ \lambda_1, & \mu_1, & \nu_1 \end{matrix}$$

die beiden Krümmungsradien r_1 und T_1, der Winkel, den die von P_1 nach P gerichtete Normale von C_1 mit der Hauptnormale von C_1 bildet, sei σ_1, das Bogenelement von C_1 endlich ds_1, so gelten die Formeln

$$\text{2)} \qquad \begin{aligned} x_1 &= x + k(\xi \cos\sigma + \lambda \sin\sigma) \\ x &= x_1 + k(\xi_1 \cos\sigma_1 + \lambda_1 \sin\sigma_1) \end{aligned}$$

nebst den entsprechenden Vertauschungen für y_1, z_1 u. s. w.

Solche Kurven C, C_1 bilden ein Paar, welches durch gemeinsame Normalen von konstanter Länge k verbunden ist, es soll kurz als ein Kurvenpaar bezeichnet werden.

Es handelt sich nun zunächst um die Beziehungen, welche zwischen den beiden Triëdern stattfinden. Differentiiert man die erste der Gleichungen 2) nach s und bezeichnet den Differentialquotienten $\frac{ds_1}{ds}$ mit S, wobei S als eine positive Zahl anzusehen ist, so folgt nach den Formeln 1)

$$\text{3)} \qquad \alpha_1 S = \alpha p + q(\xi \sin\sigma - \lambda \cos\sigma),$$

wenn

$$p = 1 - \frac{k}{r}\cos\sigma$$

4) $$q = k\left(\frac{1}{T} - \sigma'\right)$$

$$\sigma' = \frac{d\sigma}{ds}$$

gesetzt wird. Es ist daher

5) $$S^2 = p^2 + q^2.$$

Aus 3) folgt

$$S(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1) = p$$

6) $$S(\alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta) = q\sin\sigma$$

$$S(\alpha_1\lambda + \beta_1\mu + \gamma_1\nu) = -q\cos\sigma.$$

Verfährt man ebenso mit der zweiten der Gleichungen 2), so entsteht

$$p_1 = 1 - \frac{k}{r_1}\cos\sigma_1$$

4ª) $$q_1 = k\left(\frac{1}{T_1} - \sigma_1'\right)$$

$$\sigma_1' = \frac{d\sigma_1}{ds_1}$$

und es wird

3ª) $$\frac{\alpha}{S} = \alpha_1 p_1 + q_1(\xi_1\sin\sigma_1 - \lambda_1\cos\sigma_1),$$

wobei

$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = p_1 S$$

6ª) $$\alpha\xi_1 + \beta\eta_1 + \gamma\zeta_1 = q_1 S\sin\sigma_1$$

$$\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1 + \gamma\nu_1 = -q_1 S\cos\sigma_1.$$

Da nach 6) und 6ª)

Iª $$S^2 p_1 = p$$

und nach 3ª)

$$\frac{1}{S^2} = p_1^2 + q_1^2$$

ist, so folgt $$S^4 q_1^2 = q^2;$$

es läßt sich aber zeigen, daß unter den angenommenen Voraussetzungen über die Lage der beiden Triëder

$$\text{I}^b \qquad S^2 q_1 = q \qquad \text{ist.}$$

Durch nochmalige Differentiation von 3) nach s folgt unter Benutzung von 1)

$$\frac{\xi_1}{r_1} S^2 + \alpha_1 S' = \frac{\xi}{r} p + \alpha\left(\frac{dp}{ds} - q\frac{\sin\sigma}{r}\right)$$
$$- \frac{q^2}{k}(\xi\cos\sigma + \lambda\sin\sigma)$$
$$+ (\xi\sin\sigma - \lambda\cos\sigma)\frac{dq}{ds},$$

wobei $S' = \frac{dS}{ds}$ gesetzt ist.

Setzt man in diese Gleichung den aus 3) folgenden Wert von α_1, α ein, so hat man

$$\frac{\xi_1}{r_1} S^2 = \alpha\left(\frac{dp}{ds} - \frac{S'}{S} p - \frac{q}{r}\sin\sigma\right)$$
$$+ \xi\left(\sin\sigma\left(\frac{dq}{ds} - \frac{S'}{S} q\right) + \left(\frac{p}{r} - \frac{q^2\cos\sigma}{k}\right)\right.$$
$$\left. - \lambda\left(\cos\sigma\left(\frac{dq}{ds} - \frac{S'}{S} q\right) + \frac{q^2}{k}\sin\sigma\right)\right.$$

Nun ist nach 5)

$$\frac{dp}{ds} - p\frac{S'}{S} = \frac{q}{S^2}\left(q\frac{dp}{ds} - p\frac{dq}{ds}\right) = q\,\Omega$$
$$\frac{dq}{ds} - q\frac{S'}{S} = \frac{-p}{S^2}\left(q\frac{dp}{ds} - p\frac{dq}{ds}\right) = -p\,\Omega,$$

falls

$$\text{II} \qquad \Omega = \frac{d}{ds}\operatorname{arctg}\left(\frac{p}{q}\right)$$

gesetzt wird. Die vorstehende Gleichung für ξ_1, η_1, ζ_1 geht daher in die folgende über

$$\frac{\xi_1}{r_1} S^2 = a\,q\left(\Omega - \frac{\sin\sigma}{r}\right)$$

$$7)\qquad + \xi\left(\frac{p}{r} - \frac{q^2}{k}\cos\sigma - p\,\Omega\sin\sigma\right)$$

$$+ \lambda\left(p\,\Omega\cos\sigma - \frac{q^2}{k}\sin\sigma\right),$$

die man auch in die Form

$$7^a)\qquad \frac{\xi_1}{r_1} S^2 = \left(\Omega - \frac{\sin\sigma}{r}\right)[a\,q - p\,(\xi\sin\sigma - \lambda\cos\sigma)]$$

$$+ \left(\xi\,\frac{\cos\sigma + \lambda\sin\sigma}{k}\right)(p - S^2)$$

bringen kann.

Aus 7) folgt nun durch Multiplikation mit den Richtungscosinus des Triëders von C und Summation

$$\text{III}^a\qquad (\xi\,\xi_1 + \eta\,\eta_1 + \zeta\,\zeta_1)\,\frac{S^2}{r_1} = \frac{p}{r} - \frac{q^2}{k}\cos\sigma - p\,\Omega\sin\sigma$$

$$\text{III}^b\qquad (\alpha\,\xi_1 + \beta\,\eta_1 + \gamma\,\zeta_1)\,\frac{S^2}{r_1} = q\left(\Omega - \frac{\sin\sigma}{r}\right)$$

$$\text{III}^c\qquad (\lambda\,\xi_1 + \mu\,\eta_1 + \nu\,\zeta_1)\,\frac{S^2}{r_1} = p\,\Omega\cos\sigma - q^2\,\frac{\sin\sigma}{k},$$

ferner durch Quadrieren und Addieren der Gleichungen 7)

$$\frac{S^4}{r_1^2} = q^2\left(\Omega - \frac{\sin\sigma}{r}\right)^2 + \frac{p^2}{r^2} - 2\,p\,\frac{q^2\cos\sigma}{r\,k} - 2\,p^2\,\frac{\Omega}{r}\sin\sigma$$

$$+ \frac{q^4}{k^2} + \Omega^2 p^2$$

oder, wenn man $\frac{\cos\sigma}{r} = \frac{1-p}{k}$ setzt, und $S^2 = p^2 + q^2$ einführt

$$\text{IV}^a\qquad \frac{S^4}{r_1^2} = S^2\left(\Omega - \frac{\sin\sigma}{r}\right)^2 + \frac{(S^2 - p)^2}{k^2}$$

$$\text{IV}^b\qquad \frac{S^4}{r_1^2} = S^2\,\Omega\left(\Omega - 2\,\frac{\sin\sigma}{r}\right) + \frac{S^2}{r^2} + \frac{q^2}{k^2}(S^2 - 1).\,[1]$$

---

[1]) Für $S = 1$ ist also $\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} - \frac{2}{r_1\,r}\cos(\sigma + \sigma_1) = \Omega^2$.

Durch diese Gleichungen ist der Krümmungshalbmesser r_1 der Kurve C_1 bestimmt. Setzt man ferner aus 6[a]) den Wert von

$$\alpha \xi_1 + \beta \eta_1 + \gamma \zeta_1 = q_1 S \sin \sigma_1$$

in III[b] ein, so erhält man

$$q_1 \frac{\sin \sigma_1}{r_1} S^3 = q \left(\Omega - \frac{\sin \sigma}{r} \right)$$

oder, wenn nach I[b] q_1 durch q ausgedrückt wird

$$q \left(S \frac{\sin \sigma_1}{r_1} + \frac{\sin \sigma}{r} \right) = \Omega q,$$

so daß — wenigstens so lange nicht $q = 0$ ist —

$$\text{V} \qquad S \frac{\sin \sigma_1}{r_1} + \frac{\sin \sigma}{r} = \Omega$$

wird. Die Formel V gilt aber auch der Kontinuität zufolge an allen Stellen, wo $q = 0$ ist: daß sie auch dann noch gilt, wenn q durchweg Null ist, wird sich weiter unten zeigen.

Aus den Gleichungen I[b] und V hat man also

$$\text{8)} \qquad \begin{aligned} \frac{k \cos \sigma_1}{r_1} &= \frac{S^2 - 1 + \dfrac{k \cos \sigma}{r}}{S^2} \\ \frac{k \sin \sigma_1}{r_1} &= \frac{k}{S} \left(\Omega - \frac{\sin \sigma}{r} \right) \\ \operatorname{tg} \sigma_1 &= k \frac{S \left(\Omega - \dfrac{\sin \sigma}{r} \right)}{S^2 - 1 + \dfrac{k \cos \sigma}{r}} \end{aligned}$$

und diese Gleichungen bestimmen eindeutig den Winkel σ_1, da r_1 eine absolute Zahl ist. Die Torsion von C_1 entnimmt man endlich aus der Gleichung

$$\frac{q}{S^2} = q_1 = k \left(\frac{1}{T_1} - \sigma_1' \right);$$

es würde sehr umständlich sein, sie durch Bildung der dritten Differentialquotienten von x_1, y_1, z_1 nach s_1 zu berechnen.

Die Gleichungen I bis V, welche hier noch einmal zusammengestellt werden sollen

$$\text{VI}\qquad \begin{aligned} &p = 1 - \frac{k\cos\sigma}{r}, \qquad q = k\left(\frac{1}{T} - \sigma'\right) \\ &p_1 = 1 - \frac{k\cos\sigma_1}{r_1}, \qquad q_1 = k\left(\frac{1}{T_1} - \sigma_1'\right) \\ &S^2 = p^2 + q^2, \qquad S^2 q_1 = q, \qquad S^2 p_1 = p \\ &S\frac{\sin\sigma_1}{r_1} + \frac{\sin\sigma}{r} = \Omega = \frac{d}{ds}\operatorname{arctg}\left(\frac{p}{q}\right) \end{aligned}$$

enthalten die vollständige Theorie eines Kurvenpaares und sind ganz allgemein gültig. Ist die eine Kurve C_1 etwa eine Gerade, so kann man die Binormale willkürlich festlegen, dabei ist aber zu beachten, daß der Winkel σ_1 hievon abhängig wird. Eine Kurve C kann also nur dann mit einer Geraden ein Paar bilden, wenn nach IV[a]

$$\Omega - \frac{\sin\sigma}{r} = 0, \qquad S^2 - p = 0$$

ist, dies sind Beziehungen, denen alle willkürlichen Kurven auf einem Kreiszylinder genügen.

Nach den Gleichungen VI haben p und p_1 sowie q und q_1 immer das gleiche Zeichen; es ist zugleich

$$pp_1 + qq_1 = 1,$$

mithin auch

$$pp_1 < 1, \qquad qq_1 < 1.$$

§ 2.

Beziehungen zwischen den charakteristischen Triëdern eines Kurvenpaares.

Bezeichnet man die Richtungen der Tangenten von C und C' in entsprechenden Punkten P, P_1 mit t, t_1 und ebenso die der Hauptnormalen und Binormalen mit h, h_1; b, b_1 so folgt nach § 1, 6)

$$\cos(t\,t_1) = \frac{p}{S^2}$$

$$\cos(t_1 h) = q\,\frac{\sin\sigma}{S^2}$$

$$\cos(t_1 b) = -\,q\,\frac{\cos\sigma}{S^2}$$

und nach § 1, III):

$$\cos(t\,h_1) = \frac{r_1}{S^2}\,q\left(\Omega - \frac{\sin\sigma}{r}\right)$$

$$\cos(b\,h_1) = \frac{r_1}{S^2}\left(\frac{p}{r} - \frac{q^2}{k}\cos\sigma - p\,\Omega\sin\sigma\right)$$

$$\cos(b\,h_1) = \frac{r_1}{S^2}\left(p\,\Omega\cos\sigma - \frac{q^2}{k}\sin\sigma\right),$$

sowie nach § 1, 6[a]):

$$\cos(t\,h_1) = q_1\sin\sigma_1$$

$$\cos(t\,b_1) = -\,q_1\cos\sigma_1.$$

Zur Berechnung von $\cos(h\,b_1)$ benutzt man die Gleichung:

$$\cos(h\,b_1) = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \end{vmatrix},$$

welche durch Multiplikation mit der in § 1 erwähnten Determinante

$$(\alpha\,\xi\,\lambda)$$

die Formel

$$\cos(h\,b_1) = -(\cos t\,t_1)\cos(h_1 b) - \cos(t_1 b)\cos(h_1 t)$$
$$= -\frac{r_1}{S^3}\left(S^2\,\Omega\cos\sigma - \frac{\sin\sigma}{k}\,q^2\right)$$

liefert.

Ebenso findet man:

$$\cos(b\,b_1) = \cos(t\,t_1)\cos(h\,h_1) - \cos(t_1 h)\cos(t\,h)$$
$$= \frac{r_1}{S^3}\left(\frac{S^2}{r} - S^2\,\Omega\sin\sigma - \frac{q^2}{k}\cos\sigma\right)$$

$$\cos(t b_1) = \cos(t_1 h)\cos(b h_1) - \cos(t_1 b)\cos(h h_1)$$
$$= \frac{r_1}{S^3}\frac{q}{k}(p - S^2) = -q\frac{\cos\sigma_1}{S}\text{.}^{1)}$$

wenn man $\cos\sigma_1 = (1 - p_1)\frac{r_1}{k}$ setzt.

Da diese Beziehungen gänzlich von der in § 1, I[b] angegebenen Gleichung unabhängig abgeleitet sind, kann man die letztere in der Tat hieraus folgern.

---

[1]) Diese Formeln entsprechen den Formeln der sphärischen Trigonometrie, aus welcher sie unter sorgfältiger Beachtung der Vorzeichen auch durch die Betrachtung der beiden Triëder abgeleitet werden können, sobald man die Beziehungen IV und V des § 1 hinzuzieht. In der Tat erhält man auch durch geeignete Umformung der im Texte angegebenen Werte für die Richtungscosinus

$$\cos(b b_1) = -\sin\sigma\sin\sigma_1 - \frac{p}{S}\cos\sigma\cos\sigma_1$$

$$\cos(h h_1) = -\cos\sigma\cos\sigma_1 - \frac{p}{S}\sin\sigma\sin\sigma_1$$

$$\cos(h b_1) = -\cos\sigma\sin\sigma_1 + \frac{p}{S}\sin\sigma\cos\sigma_1$$

$$\cos(h_1 b) = -\sin\sigma\cos\sigma_1 + \frac{p}{S}\cos\sigma\sin\sigma_1$$

$$\cos(t t') = \frac{p}{S} \text{ u. s. w.}$$

Da die Vorzeichen den Voraussetzungen über die beiden Triëder entsprechend gewählt sein müssen, ist es vielleicht nicht überflüssig, diese Gleichungen auch durch die Rechnung zu bestätigen. So hat man z. B. für $\cos(b b_1)$, wenn Ω durch seinen Wert aus § 1, V ersetzt wird

$$\cos(b b_1) = \frac{r_1}{S^3}\left(\frac{S^2}{r} - S^2\left(\frac{\sin\sigma\sin\sigma_1}{r_1}S + \frac{\sin^2\sigma}{r}\right) - \cos\sigma\frac{q^2}{k}\right)$$
$$= -\sin\sigma\sin\sigma_1 + \frac{r_1}{S^3}\left(S^2\frac{\cos\sigma}{r} - \frac{q^2}{k}\right)\cos\sigma,$$

und da

$$\frac{S^2\cos\sigma}{r} - \frac{q^2}{k} = -S^2\frac{p}{r_1}\cos\sigma_1$$

$$\cos(b b_1) = -\sin\sigma\sin\sigma_1 - \frac{p}{S}\cos\sigma\cos\sigma_1$$

wie behauptet wurde.

Überhaupt würde sich der Hauptinhalt des § 1 auch durch geeignete Infinitesimalbetrachtungen rein geometrisch herleiten lassen.

Aus der Vergleichung der beiden Werte von $\cos(t b_1)$ folgt nämlich:

$$q \frac{\cos \sigma_1}{S} = S q_1 \cos \sigma_1.$$

Ist also nicht $\cos \sigma_1 = 0$ so wird $q = q_1 S^2$. Da man aber auf dieselbe Weise auch die Gleichung

$$S q_1 \cos \sigma = q \frac{\cos \sigma}{S}$$

herleiten kann, so würde die in Rede stehende Gleichung § 1, I[b] nur dann nicht bestehen, wenn gleichzeitig $\cos \sigma$ und $\cos \sigma_1$ gleich Null wären. Dies erfordert aber wegen

$$\frac{\cos \sigma}{r} = \frac{(1-p)}{k}, \quad \frac{\cos \sigma_1}{r_1} = \frac{(1-p_1)}{k}$$

daß $p = p_1 = 1$ ist. Damit wird aber auch $S^2 = 1$, also $q = q_1 = 0$, so daß in diesem Falle die Beziehung zwischen q und q_1 nicht in Betracht kommt.

Um auch die Formel V des § 1 allgemein zu erweisen, gehe man von der aus § 1, 2) folgenden Identität

$$\xi \cos \sigma + \lambda \sin \sigma + \xi_1 \cos \sigma_1 + \lambda_1 \sin \sigma_1 = 0$$

aus. Aus derselben folgt durch Multiplikation mit den Richtungscosinus ξ, λ, α und Summation:

$$\begin{aligned}
\cos \sigma + \cos \sigma_1 \cos(h h_1) + \sin \sigma_1 \cos(h b_1) &= 0 \\
\sin \sigma + \cos \sigma_1 \cos(h_1 t) + \sin \sigma_1 \cos(b_1 t) &= 0 \\
\cos(t h_1) \cos \sigma_1 + \cos(t b_1) \sin \sigma_1 &= 0.
\end{aligned}$$

Setzt man hier die zuvor gefundenen Werte der Cosinus ein, so erhält man aus der letzteren

$$\frac{r_1}{S^2} q \cos \sigma_1 \left(\Omega - \frac{\sin \sigma}{r} - S \frac{\sin \sigma_1}{r_1} \right) = 0$$

und ebenso:

$$p(S^2 - p) \left(\frac{\sin \sigma}{r} + S \frac{\sin \sigma_1}{r_1} - \Omega \right) = 0$$

$$\left(\Omega - \frac{\sin \sigma}{r} \right) \left(\frac{\sin \sigma}{r} + S \frac{\sin \sigma_1}{r_1} - \Omega \right) = 0.$$

Hieraus ergibt sich aber immer die Gleichung § 1, V. Der Fall $S^2 = 0$ ist natürlich auszuschließen, denn es ist dann $p = 0$, $q = 0$ und die Kurve C_1 reduziert sich auf einem Punkt, und C wird durch eine Kugel vom Radius k, deren Mittelpunkt dieser Punkt M ist, aus einem Kegel mit der Spitze in M ausgeschnitten. Ist also $q = 0$ so kann man immer noch $p \neq 0$ voraussetzen. Wäre nun gleichzeitig $S^2 - p = 0$ und $\Omega - \frac{\sin\sigma}{r} = 0$, so wird die Kurve C_1 wie aus der Formel 7) des § 1 hervorgeht eine Gerade, da $r_1 = \infty$ wird; in diesem Fall verliert die Relation ihre Bedeutung. Ist dagegen $p = 0$ und $\Omega - \frac{\sin\sigma}{r} = 0$ so wird sie noch immer gelten, wenn nur nicht $\cos\sigma_1 = 0$ ist. Dann aber ist $p_1 = 1$, was mit der Gleichung $S^2 p_1 = p$ im Widerspruch steht.

§ 3.

Invarianten des Kurvenpaares.

Unter einer Invariante des Paares verstehen wir hier solche Ausdrücke, welche sich nur um einen von S, dem Verhältniß der Bogenelemente in entsprechenden Punkten des Paares, abhängigen Faktor ändern, je nachdem man sie für die Kurve C oder C_1 bildet.

Solche Invarianten sind den Gleichungen

$$S^2 p_1 = p, \quad S^2 q_1 = q$$

zufolge p und q; ihr Quotient ist eine absolute Invariante.

Ferner ist

$$\Omega = \frac{d}{ds} \operatorname{arctg}\left(\frac{p}{q}\right), \qquad \Omega_1 = \frac{d}{ds_1} \operatorname{arctg}\left(\frac{p_1}{q_1}\right)$$

mithin:

$$\Omega_1 S = \Omega;$$

also ist auch Ω eine Invariante. Desgleichen hat man

$$2\,\Omega = 2\,\frac{\sin\sigma}{r} + 2\,S\,\frac{\sin\sigma_1}{r_1}$$

oder:

$$\Omega - 2\,\frac{\sin\sigma}{r} = -\,S\left(\Omega_1 - 2\,\frac{\sin\sigma_1}{r_1}\right).$$

Die Bedeutung dieser Invariante wird alsbald hervortreten.

Andere Invarianten erhält man aus den Werten von $\cos(h h_1)$ und $\cos(b b_1)$. So findet man die Identitäten

$$\frac{1}{r}\left(\frac{p}{r} - q^2\,\frac{\cos\sigma}{k} - p\,\Omega\sin\sigma\right)S^2 = \frac{1}{r_1}\left(\frac{p}{r_1} - q_1^2\,\frac{\cos\sigma_1}{k} - p_1\,\Omega_1\sin\sigma_1\right)$$

und

$$\frac{1}{r}\left(\frac{S^2}{r} - S^2\,\Omega\sin\sigma - \frac{q^2}{k}\cos\sigma\right) = \frac{1}{r_1}\left(\frac{S_1^2}{r_1} - S_1^2\,\Omega_1\sin\sigma_1 - \frac{q_1^2}{k}\cos\sigma_1\right)S^6$$

wobei $S_1 = \frac{1}{S}$ gesetzt ist.

Das Verschwinden der ersten dieser beiden Invarianten sagt aus, daß die Hauptnormalen der Kurven C, C_1 in entsprechenden Punkten aufeinander senkrecht stehen. Analog dazu drückt das Verschwinden der zweiten aus, daß die Binormalen einen rechten Winkel miteinander bilden.

Der Cosinus des Neigungswinkels ω der Tangenten von C und C_1 in entsprechenden Punkten P, P_1 ist:

$$\cos\omega = \frac{p}{S} = \frac{p}{+\sqrt{p^2 + q^2}},$$

mithin:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{q}{p}.$$

Ist nun $\omega = \text{const}$, so ist auch $\Omega = 0$, und dies ist die Bedeutung der Invariante Ω. Wenn sich also die Kurven eines Paares „unter konstantem Winkel“ schneiden, d. h. wenn sie von einem Punkte der gemeinsamen Normale sich unter diesem Winkel zu schneiden scheinen, so ist:

$$\frac{\sin\sigma}{r} + S\frac{\sin\sigma_1}{r_1} = 0.$$

Aus $\sigma = 0$ folgt daher auch $\sigma_1 = 0$: Man hat also ein Kurvenpaar mit gemeinsamer Hauptnormale, die Kurven bilden ein Bertrandsches Paar. Dies ist im wesentlichen der von Niewenglowski, Comptes Rendus 85, p. 394, 1877 aufgestellte Satz.[1])

[1]) Ich erwähne dies, weil in der Enzyklopädie der Math., Bd. III, 3, p. 232 dieser Satz in der folgenden Form ausgesprochen ist:

Trägt man auf den Hauptnormalen einer Kurve C eine konstante Strecke k ab und hat die Kurve C_1 der Endpunkte die Eigenschaft, daß die Schmiegungsebenen von C und C_1 einen konstanten Winkel miteinander bilden, so sind beide Kurven Bertrandsche Kurven.

Hier ist statt des Wortes „Schmiegungsebenen" Normalebenen einzusetzen. Daß der Satz in der anderen Fassung unrichtig ist, läßt sich leicht an einem merkwürdigen Beispiel zeigen — man vergleiche übrigens die allgemeine Untersuchung in § 12.

Trägt man auf den Hauptnormalen einer Kurve C, deren Krümmungs- und Torsionsmasse mit ϱ, τ bezeichnet sein mögen, eine konstante Strecke k ab, so ist, wie man aus den Formeln des § 1 oder durch direkte Rechnung ableitet, der Cosinus der Binormalen von C und C_1

$$\cos(b\,b_1) = \frac{r_1}{S^3}(1 - k\varrho)\,V$$

wo

$$V = \varrho(1 - k\varrho) - k\tau^2$$

ist, während

$$\frac{S^4}{r_1^2} = V^2 + \Omega^2 S^2$$

wird, falls zur Abkürzung

$$\Omega = \frac{d}{ds}\operatorname{arctg}\left(\frac{k\tau}{1 - k\varrho}\right)$$

gesetzt ist. Ist demnach für die Kurve C die Bedingung $V = 0$ erfüllt, so bilden die Binormalen von C und C_1 beständig einen rechten Winkel miteinander, d. h. die Binormale von C_1 ist der Hauptnormale von C parallel. Und so ergibt sich: Trägt man auf den Hauptnormalen der Kurven C, deren Gleichung $\varrho = k(\varrho^2 + \tau^2)$ ist, eine konstante Strecke k ab, so beschreiben die Endpunkte derselben eine Kurve C_1, deren Binormale der Hauptnormale von C parallel ist, und deren Krümmungshalbmesser

$$r_1 = \frac{S}{\Omega}$$

§ 4.

Kongruente und symmetrische Kurvenpaare.

Die Kurven eines Paares sind kongruent und mit entsprechenden Punkten aufeinander bezogen (entsprechend kongruent) wenn

$$S^2 = 1, \quad r = r_1. \quad T = + T_1$$

ist: sie sind dagegen symmetrisch, wenn

$$S^2 = 1, \quad r = r_1, \quad T = - T_1.$$

Ist nun zunächst $S^2 = 1$ und $r = r_1$. so folgt aus § 1 I[a]

$$p = p_1 \quad \text{oder} \quad \cos\sigma_1 = \cos\sigma$$

ist, während das Torsionsmaß τ_1 durch die Gleichung

$$\tau_1 \tau = \frac{(1 - k\varrho)}{4\,\Omega^2 S^4}\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2$$

gegeben ist. Die Binormalen resp. Hauptnormalen von C_1 bilden daher mit den Binormalen resp. Hauptnormalen von C rechte Winkel, aber der Cosinus des Winkels der Tangenten von C und C_1 ist nicht konstant, sondern gleich

$$\frac{1 - k\varrho}{S}$$

und die Kurven C, C_1 bilden kein Bertrandsches Paar.

Ist dagegen $\Omega = 0$ oder $1 - \varrho k = \tau$. const, so hat man die Gleichung der Bertrandschen Kurven; auch wird

$$\cos(b\, b_1) = \frac{1 - k\varrho}{S}$$

und dies ist in der Tat eine Konstante. Hierin ist auch der Fall mitinbegriffen, wo $1 - k\varrho = 0$ ist. Die Kurve C ist dann von konstanter Krümmung $\frac{1}{k}$; die Tangente, Hauptnormale und Binormale von C_1 läuft bezüglich der Binormale, Hauptnormale und Tangente von C parallel. Das Krümmungsmaß von C_1 ist ebenfalls konstant und gleich dem von C_1; das Produkt der Torsionsmasse wie immer gleich $\frac{1}{k^2}$.

Die Regelflächen der Normalen derjenigen Kurvenpaare C, C_1, bei denen die Hauptnormale von C und die Binormale von C_1 in die Richtung der Erzeugenden fallen, haben zwei orthogonale Trajektorien der Erzeugenden, von denen die eine Hauptangentenkurve, die andere geodätische Linie ist.

und nach IV^b daselbst:

$$\Omega\left(\Omega - \frac{2\sin\sigma}{r}\right) = 0.$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden. Ist $\Omega = 0$, so folgt aus § 1, V:

$$\sin\sigma_1 = -\sin\sigma;$$

also $\sigma_1 = -\sigma$, und es wird nach § 1, I^b:

$$1) \qquad \frac{1}{T_1} = \frac{1}{T} - 2\sigma'.$$

Ist dagegen

$$\Omega - \frac{2\sin\sigma}{r} = 0$$

so folgt analog:

$$\sin\sigma_1 = \sin\sigma$$

$$\cos\sigma_1 = \cos\sigma$$

$$2) \qquad T = T_1.$$

Das liefert den Satz: Entsprechen sich die Kurven eines Paares „mit gleichen Bogenelementen" und gleichen Krümmungsradius, so schneiden sie sich entweder unter konstantem Winkel, sind aber von einander durch die Torsion im allgemeinen verschieden; oder sie sind kongruent.

Wird jetzt zuerst angenommen, daß die Kurven des Paares kongruent sein sollen, so folgt unter der Annahme $\Omega = 0$, da jetzt $T = T_1$ ist, aus 1):

$$2\sigma' = 0.$$

Demnach ist σ ein konstanter Winkel. Da aber wegen $\Omega = 0$, $q = pc$ ist, wo c eine Konstante, so folgt:

$$2) \qquad \left(1 - \frac{k\cos\sigma}{r}\right)^2 (1 + c^2) = 1.$$

Demnach ist r ebenfalls eine Konstante, und da

$$\frac{k}{T} = q = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{k\cos\sigma}{r}\right) \tag{3}$$

so ist auch T konstant.

Unter der Voraussetzung, daß die kongruenten Kurven eines Paares sich unter konstantem Winkel schneiden, sind also beide Kurven gemeine Schraubenlinien.

Dieser Satz erleidet eine Ausnahme, wenn die Konstante c gleich Null ist. Denn als dann liefert die Gleichung 2) nur:

$$\frac{\cos\sigma}{r}\left(\frac{k\cos\sigma}{r} - 2\right) = 0.$$

Ist nun $\sigma = \frac{\pi}{2}$ so braucht r nicht konstant zu sein, nach 3) wird aber $T = 0$. Die beiden Kurven des Paares sind daher eben. Dies ist aber ein ganz trivialer Fall: C und C_1 liegen in parallelen Ebenen und bilden ein durch konstante Binormalen verbundenes kongruentes Paar; C ist dabei völlig willkürlich.

Der Fall $\frac{k\cos\sigma}{r} = 2$ erledigt sich leicht. Jede der Kurven C, C_1 ist ein Kreis mit dem Radius r; beide liegen in parallelen Ebenen und ihre Mittelpunkte haben den senkrechten Abstand $2r\operatorname{tg}\sigma$.

Außer den eben genannten trivialen Fällen und dem der kongruenten gemeinen Schraubenlinien gibt es aber noch unzählig viele andere kongruente durch die Gleichung

$$\Omega = \frac{2\sin\sigma}{r}$$

charakterisierte Kurvenpaare; für diese sind die Winkel der gemeinsamen Normale mit den Hauptnormalen in entsprechenden Punkten gleich.

Sollen dagegen die Kurven ein symmetrisches Paar bilden, so hat man wieder zwei Fälle zu unterscheiden. Ist erstens $\Omega = 0$, so wird $\sigma_1 = -\sigma$, und aus der Gleichung

$$\frac{1}{T} - \sigma' = -\frac{1}{T} + \sigma'$$

folgt nun:

$$\frac{1}{T} - \sigma' = 0 = \frac{q}{k}.$$

Dann bilden, vgl. § 5, die gemeinsamen Normalen eine Developpabele. Da jetzt $p^2 = 1$, so ist $p = \pm 1$. Für $p = +1$ ist

$$\frac{k \cos \sigma}{r} = 0,$$

also $\cos \sigma = 0$. Dann sind aber beide Kurven eben, und der Unterschied zwischen Kongruenz und Symmetrie wird bedeutungslos. Für $p = -1$ ist aber:

$$\frac{k \cos \sigma}{r} = 2.$$

Trägt man nun von P ausgehend auf der Normale die $\frac{k}{2}$ ab, so erhält man einen Punkt P_0, dessen Koordinaten $x_0 y_0 z_0$ konstant sind, da ihre Differentiale nach § 1, 3) verschwinden. Das Paar von symmetrischen Kurven wird also aus einer willkürlichen Kurve C auf der Kugel vom Radius $\frac{k}{2}$ gebildet, welcher C_1 diametral gegenüberliegt.

Ist zweitens $\Omega = \frac{2 \sin \sigma}{r}$, so muß $\sigma_1 = \sigma$ sein; dann folgt aber aus:

$$\frac{1}{T} - \sigma' = -\frac{1}{T} - \sigma',$$

daß beide Kurven eben sind. Man wird damit auf den Fall eines Paares von ebenen kongruenten Kurven geführt, der in § 6 vollständig behandelt ist.

§ 5.

Die Fälle $p = 0$; $q = 0$.

Wenn $q = k\left(\frac{1}{T} - \sigma'\right) = 0$, so existiert auf der Normalen zu C ein Punkt mit den Koordinaten

$$x + l(\xi \cos\sigma + \lambda \sin\sigma),$$

deren Änderung beim Fortschreiten auf C gleich Null ist, bestimmt durch die Gleichung:

$$1 - l\frac{\cos\sigma}{r} = 0.$$

Die konsekutiven Normalen des Paares schneiden sich daher; C und C_1 sind orthogonale Trajektorien einer Erzeugenden einer Developpabelen.

Aus der Gleichung IV^b des § 1) folgt jetzt, da $\Omega = 0$:

$$\frac{S^2}{r_1^2} = \frac{1}{r^2}$$

oder:

1) $$\frac{S}{r_1} = \frac{1}{r},$$

und nach § 1, VI ist:

$$\sin\sigma_1 + \sin\sigma = 0.$$

Demnach ist entweder

2) $$\sigma_1 = -\sigma$$

oder:

3) $$\sigma_1 = \pi + \sigma.$$

Endlich folgt aus $pp_1 = 1$:

4) $$\left(1 - k\frac{\cos\sigma}{r}\right)\left(1 - k\frac{\cos\sigma_1}{r_1}\right) = 1.$$

Ist nun der erste Faktor in 4) positiv und $\cos\sigma > 0$, so muß der zweite Faktor > 1, also $\cos\sigma_1 < 0$ sein; ist dagegen

der erste Faktor in 4) positiv und $\cos\sigma < 0$ so muß $\cos\sigma_1$ positiv sein. Diesen Bemerkungen entspricht nur die Beziehung 3):

$$\sigma_1 = \pi + \sigma.$$

Dann ist aber

$$\sigma_1' S = \sigma'$$

oder:

$$\frac{S}{T_1} = \frac{1}{T}.$$

Die Kurven C und C_1 sind daher in gleichem Sinne gewunden, wenn

$$p = 1 - k\frac{\cos\sigma}{r} > 0;$$

sie sind in den kleinsten Teilen zu einander direkt ähnlich (vgl. § 11).

Ist aber der erste Faktor in 4) negativ, so ist es auch der zweite; in diesem Fall ist $\cos\sigma > 0$, $\cos\sigma_1 > 0$, und dann folgt nur

$$\sigma = -\sigma$$

oder

$$\frac{S}{T_1} = -\frac{1}{T}.$$

Die beiden Kurven sind jetzt in entgegengesetztem Sinne gewunden; die beiden Fälle unterscheiden sich je nachdem $k \lessgtr l$ ist.

Man bestätigt diese, übrigens bekannten Beziehungen, leicht durch eine direkte Untersuchung. Ist nämlich $q = 0$, so folgt aus § 1 3)

$$S a_1 = p a,$$

mithin

$$\frac{d x_1}{d s_1} = a_1 = \pm a,$$

je nachdem $S = \pm p$ ist. Differentiiert man diese Gleichung wieder nach s, so folgt

$$S\frac{d^2 x_1}{d s'^2} = \pm \frac{\xi}{r}$$

5)
$$S'^2 \frac{d^3 x_1}{d s_1^3} + S'' \frac{d^2 x_1}{d s'^2} = \mp \frac{1}{r}\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\lambda}{T}\right) \pm \xi \frac{d\frac{1}{r}}{d s}$$

und durch Determinantenbildung folgt dann

$$\frac{S}{T_1} = \pm \frac{1}{T}.$$

Aus 5) ergibt sich noch, daß die Hauptnormalen aller dieser Trajektorien in den Punkten der nämlichen erzeugenden Normalen zu einander gleichsinnig oder ungleichsinnig parallel sind, je nachdem p das positive oder negative Vorzeichen hat.

Ist $p = 0$, so ist auch $p_1 = 0$; die Kurven des Paares „schneiden sich unter rechten Winkel".

Schneiden sich überhaupt für irgend ein Paar entsprechender Punkte P, P_1 die Kurven C, C_1 unter rechtem Winkel, so ist die Projektion der gemeinsamen Normale k auf die Hauptnormalen der Kurven C, C_1 gleich dem Krümmungshalbmesser derselben. Gleichzeitig findet zwischen den Torsionsradien die Beziehung

$$\left(\frac{1}{T_1} - \sigma_1'\right)\left(\frac{1}{T} - \sigma'\right) = \frac{1}{k^2}$$

statt. Ist daher

$$\frac{1}{T_1} - \frac{d\sigma_1}{d s_1} > \frac{1}{k},$$

so ist

$$\frac{1}{T} - \frac{d\sigma}{d s} \leq \frac{1}{k}:$$

findet die Beziehung $p = 0$ durchweg statt, so folgt daraus durch Integration

$$\eta_1 - \sigma_1 > \frac{S'}{k} + \text{const}$$

$$\eta - \sigma \leq \frac{S}{k} + \text{const.}$$

§ 6.

Kurvenpaare, deren Bogenelemente in konstantem Verhältnisse stehen.

Wir nehmen an, daß $S = \frac{d s_1}{d s}$ eine Konstante sei, und tragen auf der gemeinsamen Normale der Kurven C, C_1 eine konstante Strecke l ab, welche der Gleichung

$$S l = k - l \tag{1}$$

entspricht. Dann ist der Fall $k = l$ ausgeschlossen, da $S \neq 0$ vorausgesetzt wird.

Die Endpunkte P'' von l bilden eine Kurve Γ, welche zur Kurve C_1 in derselben Beziehung steht, wie zur Kurve C. Denn der Punkt P'' ist von P um l, von P' um $l_1 = k - l$ entfernt, und auf eben diesen Wert wird man durch die Gleichung

$$\frac{1}{S} l_1 = k - l_1$$

geführt, welche der Gleichung 1) entspricht.

Die Größen p, q sollen für das Paar C, Γ durch p_0, q_0, und ebenso die übrigen zu $\Omega, S \ldots$ analogen Ausdrücke durch $\Omega_0, S_0 \ldots$ bezeichnet werden.

Dann ist nach § 1)

$$p_0 = 1 - l \frac{\cos \sigma}{r} = \frac{k - l + l q}{k} \tag{2}$$

$$q_0 = l \left(\frac{1}{T} - \sigma' \right) = \frac{l}{k} q$$

also:

$$S_0^2 = p_0^2 + q_0^2 = 2 \left(\frac{k - l}{k^2} \right) (k - l + l p). \tag{3}$$

Aus den Identitäten

$$q \frac{d p}{d s} - p \frac{d q}{d s} = \Omega (p^2 + q^2)$$

$$p \frac{d p}{d s} + q \frac{d q}{d s} = S \frac{d S}{d s}$$

folgt, da S konstant ist

$$\frac{dp}{ds} = q\,\Omega, \quad \frac{dq}{ds} = -p\,\Omega$$

und demnach aus 2):

$$\frac{dp_0}{ds} = \frac{l}{k}\frac{dp}{ds} = \frac{l}{k}\,q\,\Omega, \quad \frac{dq_0}{ds} = \frac{l}{k}\frac{dq}{ds} = -p\frac{l}{k}\,\Omega.$$

4)
$$\Omega_0 = \frac{q_0 \frac{dp_0}{ds} - p_0 \frac{dq_0}{ds}}{S_0^2} = \tfrac{1}{2}\,\Omega.$$

Bezeichnet man den Winkel der Hauptnormale von Γ mit der in der Richtung $P'' P$ genommenen gemeinsamen Normale durch σ_0, den Krümmungshalbmesser von Γ durch r_0, so ist nach § 1:

$$S_0^2\left(1 - l\frac{\cos\sigma_0}{r_0}\right) = p_0$$

oder nach 2) und 3):

5)
$$\frac{\cos\sigma_0}{r_0} = \frac{k-2l}{2l(k-l)}.$$

Die Kurve Γ bildet daher mit jeder der beiden Kurven C, C_1 ein besonderes Paar, nämlich ein solches für das

$$\frac{\cos\sigma_0}{r_0} = \text{const.}$$ ist.

Aus der Gleichung des § 1, V:

$$\frac{\sin\sigma_0}{r_0} S_0 = \Omega_0 - \frac{\sin\sigma}{r} = \frac{1}{2}\left(\Omega - 2\frac{\sin\sigma}{r}\right),$$

folgt demnach nach § 1:

6)
$$S_0 \operatorname{tg}\sigma_0 = \left(\Omega - 2\frac{\sin\sigma}{r}\right)\frac{l(k-l)}{k-2l}$$

$$\frac{4}{r_0^2} = \frac{\Omega - 2\frac{\sin\sigma}{r}}{S_0^2} + \left(\frac{k-2l}{l(k-l)}\right)^2.$$

Und umgekehrt erhält man alle Kurvenpaare konstanten Bogenelementverhältnisses, wenn man auf den Normalen einer willkürlichen Kurve Γ, die unter dem Winkel σ_0 gegen ihre Hauptnormale geneigt sind, zwei konstante Strecken l, l_1 aufträgt, falls

$$\cos \sigma_0 = r_0 c$$

gewählt wird, c ist eine gewisse Konstante.

Dies erkennt man unmittelbar. Sind nämlich $\Xi H Z$ die Koordinaten einer willkürlichen Kurve Γ mit den Richtungscosinus der Hauptnormale ξ_0, η_0, ζ_0; der Binormale λ_0, μ_0, ν_0, so sind

$$x = \Xi + l(\xi_0 \cos \sigma_0 + \lambda_0 \sin \sigma_0)$$

die Koordinaten einer aus ihr hervorgegangenen Kurve C. Daraus folgt aber nach § 1

$$\frac{ds}{ds_0} \cdot = p\,a_0 + q\,(\xi_0 \sin \sigma_0 - \lambda_0 \sin \sigma_0),$$

wo

$$q = l\left(\frac{1}{T_0} - \sigma_0'\right), \quad p = 1 - l\,c$$

und es wird

$$\left(\frac{ds}{ds_0}\right)^2 = (1 - l\,c)^2 + l^2\left(\frac{1}{T_0} - \sigma_0'\right)^2$$

und ebenso für die der Strecke l_1 entsprechende Kurve C_1

$$\left(\frac{ds_1}{ds_0}\right)^2 = (1 - l_1\,c)^2 + l_1^2\left(\frac{1}{T_0} - \sigma_0'\right)^2.$$

Demnach wird

$$\left(\frac{ds}{ds_0}\right)^2 l_1^2 - \left(\frac{ds_1}{ds_0}\right)^2 l^2 = (l_1 - l)\,(l + l_1 - 2\,l\,l_1\,c),$$

d. h.

$$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = S^2 = \left(\frac{l_1}{l}\right)^2,$$

wenn

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l_1} = 2c$$

ist. Dies gilt auch dann, wenn $l = -l_1$ ist, d. h. die Konstante $c = 0$ oder $\sigma_0 = \frac{\pi}{2}$ gewählt ist; die beiden Strecken l und $-l$ sind dann nur auf der Binormalen von Γ aufzutragen.

Damit ist die Aufgabe gelöst, alle Kurvenpaare zu konstruieren, deren Bogenelemente in entsprechenden Punkten in konstantem Verhältnisse stehen.[1])

Für den Fall, wo das Kurvenpaar C, C_1 die invariante Beziehung

$$\Omega - 2\frac{\sin\sigma}{r} = 0$$

erfüllen soll, wird nach der zweiten Gleichung 6) die Kurve Γ von konstanter Krümmung; zugleich ist dann $\operatorname{tg}\sigma_0 = 0$, d. h. die Kurve Γ hat die gemeinsame Normale von C, C_1 zur Hauptnormalen, falls nicht $k = 2l$ ist. Man erhält daher alle Kurven eines solchen Paares, wenn man von einer Kurve Γ mit konstanter Krümmung ausgeht, auf deren Hauptnormalen jetzt die Strecken l, l_1 abzutragen sind.[2])

Benutzt man zur Bestimmung der Koordinaten Ξ, H, Z der Kurve Γ, indem man von C ausgeht, die Formel 7[a]) des § 1, so erhält man:

$$S_0^2\frac{d^2\Xi}{ds_0^2} = \frac{1}{2}\left(\Omega - 2\frac{\sin\sigma}{r}\right)\left(\frac{alq}{k} - \frac{(k-l+lp)}{k}(\xi\sin\sigma - \lambda\cos\sigma)\right)$$

$$+ (k - l + lp)\frac{(2l-k)}{lk^2}(\xi\cos\sigma + \lambda\sin\sigma).$$

[1]) Daß man auf die angegebene Weise aus einer Kurve Γ solche Paare erhält, liegt ja auf der Hand, daß aber alle Paare dieser Art aus einer solchen „Mittelkurve" Γ entstehen, scheint eines besonderen Beweises zu bedürfen, der sich natürlich auch auf anderem Wege geben läßt.

[2]) Hierbei ist indessen zu beachten, daß in der Untersuchung dieses Paragraphen $\Omega \neq 0$ stillschweigend angenommen ist; einzelne triviale Ausnahmefälle sind demnach hier noch möglich.

Setzt man nun voraus, daß $l = \frac{1}{2} k$, also $S^2 = 1$ ist, und zugleich $\Omega - 2 \frac{\sin \sigma}{r} = 0$ sein soll, so wird

$$\frac{d^2 \Xi}{d s_0^2} = 0;$$

die Kurve Γ, die man jetzt geradezu als Mittelkurve des Paares bezeichnen kann, wird also jetzt eine gerade Linie (vgl. die zweite Formel 6). Nun war nach § 4 die Bedingung für die Kongruenz der Kurven eines Paares, vorausgesetzt, daß sie nicht gemeine Schraubenlinien sind,

$$S^2 = 1, \quad \Omega - 2 \frac{\sin \sigma}{r} = 0.$$

Umgekehrt ist aber sofort ersichtlich, daß die Kurven eines Paares immer mit entsprechenden Punkten kongruent aufeinander bezogen sind, wenn die Mittelkurve eine Gerade ist, die auf der gemeinsamen Normale von C, C_1 natürlich senkrecht steht.

Abgesehen von dem Falle der Schraubenlinien und den in § 4 besprochenen trivialen Fällen gilt daher der Satz:

Alle Kurvenpaare, die aus zwei kongruenten mit entsprechenden Punkten aufeinander durch gemeinsame Normalen von konstanter Länge k bezogenen Kurven bestehen, ergeben sich, wenn man auf einem Kreiszylinder mit dem Durchmesser k eine willkürliche Kurve C annimmt; die Kurve C_1 wird dann von denjenigen Punkten des Zylinders gebildet, in denen die aus den Punkten von C auf die Achse des Zylinders gezogenen Senkrechten den Zylinder schneiden.[1])

[1]) Ich führe ein einfaches Beispiel an. Die aus kongruenten Kurven bestehenden Paare, deren Hauptnormalen mit der gemeinsamen Normale den konstanten Winkel ω bilden, erhält man, wenn man die Mittelkurve zur z-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems macht, durch den Ansatz, in welchem k durch $2k$ ersetzt ist

$$x = k \cos \varphi$$
$$y = k \cos \varphi$$
$$z = F,$$

Damit erhält man zugleich die Lösung der Aufgabe: Alle aus ebenen Kurven gebildete Paare kongruenter Kurven zu bestimmen. Die Kurven eines solchen Paares sind offenbar zwei Ellipsen, deren Ebenen

wo F eine zu bestimmende Funktion von φ ist. Alsdann ist

$$1)\qquad S^2 = \left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = k^2 + F'^2.$$

Daraus folgt

$$2)\qquad \frac{S^4}{r^2} = k^2\left(1 + \frac{F''^2}{F'^2 + k^2}\right)$$

$$3)\qquad \frac{S^2}{r}\cos\omega = k,$$

falls man den Winkel ω der Hauptnormale und der gemeinsamen Normale des Paares vom Kurvenpunkte gegen die z-Achse mißt, so daß nun $\cos\omega$ eine positive Konstante

$$-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}$$

sein muß. Daraus ergibt sich

$$4)\qquad \pm\operatorname{tg}\omega = \sqrt{\frac{F''^2}{F'^2 + k^2}}.$$

Ist also $\pm\operatorname{tg}\omega = c$ nicht Null, — in welchem Falle sich nur eine gemeine Schraubenlinie resp. ein Kreis ergibt, so folgt aus 4) unter Weglassung der unwesentlichen Integrationskonstanten

$$5)\qquad F' = \frac{k}{2}\left(e^{c\varphi} - e^{-c\varphi}\right).$$

Demgemäß wird, da

$$F'^2 + k^2 = \frac{1}{4}k^2\left(e^{c\varphi} + e^{-c\varphi}\right)^2$$

$$F'' = \frac{ck}{2}\left(e^{c\varphi} + e^{-c\varphi}\right)^2$$

$$F''' = \frac{c^2 k}{2}\left(e^{c\varphi} + e^{-c\varphi}\right)^2$$

und

$$F''' + F' = \frac{k}{2\cos^2\omega}\left(e^{c\varphi} - e^{-c\varphi}\right)$$

wird

$$6)\qquad \frac{-S^6}{r^2 T} = (F''' + F')\,k^2,$$

gegen die Achse des Zylinders gleich geneigt sind; auf dieselbe Lösung wird man auch geführt, wenn man die Fundamentalgleichungen des § 1 integriert, wobei sich aber die natürlichen Gleichungen dieser Ellipsen ergeben. Vgl. übrigens § 10.

also

$$-\frac{1}{T} = \frac{2}{k}\frac{(e^{c\varphi} - e^{-c\varphi})}{(e^{c\varphi} - e^{-c\varphi})^2} \tag{7}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{4}{k\cos\omega\,(e^{c\varphi} + e^{-c\varphi})^2}.$$

Da nach 5)

$$z = F = \frac{k}{2c}\,(e^{c\varphi} + e^{-c\varphi}),$$

so wird

$$r = \frac{c^2 z^2 \cos\omega}{k},$$

und da das Minimum von z gleich $\frac{k}{c}$ ist, so wird $r > k\cos\omega$.

Da ferner der Bogen s der Kurve durch die Gleichung

$$s = \frac{k}{2c}\,(e^{c\varphi} - e^{-c\varphi})$$

gegeben ist, so wird

$$-\frac{r}{T\cos\omega} = \frac{ks}{c}, \qquad \frac{1}{T} = \frac{s}{c}\left(\frac{k\cos\omega}{r}\right) < \frac{s}{c}$$

und für

$$h = \frac{k}{c}, \qquad z = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{k\varphi}{h}} + e^{-\frac{k\varphi}{h}}\right).$$

Das einzige Paar von kongruenten Kurven, deren Hauptnormalen einen konstanten Winkel mit der gemeinsamen Normale bilden, entsteht daher durch Aufwicklung einer gewöhnlichen Kettenlinie auf einem Kreiszylinder.

Ähnlich lassen sich Paare kongruenter Kurven von konstanter Krümmung resp. Torsion untersuchen.

§ 7.

Kurvenpaare, die sich unter konstantem Winkel schneiden und deren Bogenelemente in konstantem Verhältnisse stehen.

Verlangt man, daß $\frac{p}{q}$ und S^2 Konstanten sein sollen, so sind

$$p = 1 - \frac{k \cos \sigma}{r}, \quad q = k\left(\frac{1}{T} - \sigma'\right)$$

selbst Konstanten, von denen anzunehmen ist, daß sie nicht gleichzeitig verschwinden. Die natürliche Gleichung einer solchen Kurve C ergibt sich durch Elimination von σ in der Form

$$\frac{1}{T} - \frac{d}{ds} \arccos \frac{r}{k}(1-p) = \frac{q}{k},$$

oder wenn

$$\frac{ds}{T} = d\eta$$

gesetzt wird, wo η der Kontingenzwinkel der Windung ist,

$$\cos\left(\eta - \frac{q}{k} s + c\right) = r\frac{(1-p)}{k}.$$

Aber hiermit ist so gut wie nichts gewonnen. Man erhält eine viel übersichtlichere Auffassung dieser Paare durch Verwendung einer Kurve Γ_0, welche der in § 6 eingeführten Kurve Γ analog gebildet ist.

Wir tragen, von der Kurve C ausgehend, auf der gemeinsamen Normale des Paares eine Strecke l ab. Dann entsteht eine Kurve Γ_0, die bei geeigneter Wahl von l sich durch besondere Einfachheit auszeichnet. Werden, wie im vorigen § 6, alle Größen, die sich auf das Kurvenpaar C, Γ_0 beziehen, durch den Index Null bezeichnet, so ist

$$p_0 = 1 - \frac{l}{r}\cos\sigma = 1 - \frac{l}{k} + \frac{l}{k} p$$

$$q_0 = l\left(\frac{1}{T} - \sigma'\right) = \frac{l}{k} q$$

und

$$S_0^2 = p_0^2 + q_0^2 = (p^2 + q^2)\frac{l^2}{k^2} + 2\frac{pl}{k}\left(1 - \frac{l}{k}\right) + \left(1 - \frac{l}{k}\right).$$

Wählt man nun l so, daß

$$S_0^2 = p_0 \tag{1}$$

wird, so folgt

$$l = \frac{(1-p)k}{q^2 + (p-1)^2}.\text{[1]}$$

Dabei wird

$$p_0 = \frac{q^2}{q^2 + (p-1)^2}$$

und p_0 ist nicht Null, wenn q nicht Null ist. In diesem trivialen Falle liegen die Kurven C, C_1 auf einer Develovpabelen, und Γ_0 reduziert sich auf einen Punkt.

Für die so bestimmte Kurve Γ_0, welche mit der Normalen von C den Winkel σ_0 in dem früher angegebenen Sinne bildet, wird nun

$$S_0^2\left(1 - l\frac{\cos\sigma_0}{r_0}\right) = p_0\text{[2]}$$

oder nach 1)

$$\frac{\cos\sigma_0}{r_0} = 0.$$

Hieraus folgt

$$\sigma_0 = \frac{\pi}{2},$$

falls nicht $r_0 = \infty$ ist. Da aber nach § 1 IV[a]

$$\frac{S_0^4}{r_0^2} = \frac{S_0^2}{r^2}\sin\sigma,$$

so könnte dieser Fall nur eintreten, wenn $\sigma = 0, \pi$, d. h. wenn die gemeinsame Normale zugleich Hauptnormale von C ist.

---

[1] Ist $p = 1$, so ist $\cos\sigma = 0$ und T konstant; die Kurve C fällt mit Γ_0 zusammen.

[2] r_0 ist der Krümmungshalbmesser von Γ_0.

Dann ist aber

$$p = 1 \mp \frac{k}{r},$$

also auch r konstant, und mithin hat auch T einen konstanten Wert. Beide Kurven C, C_1 sind also gemeine Schraubenlinien.

Lassen wir diesen Fall beiseite, so folgt aus

$$S_0^2 \left(\frac{1}{T_0} - \sigma_0' \right) = \frac{1}{T} - \sigma' = q_0 = \frac{l}{k} q,$$

daß T_0 eine Konstante ist. Die Kurve Γ_0 ist daher von konstanter Torsion, und wegen

$$\sigma_0 = \frac{\pi}{2}$$

fällt ihre Binormale in die Richtung der gemeinsamen Normalen von C und C_1.

Man erhält also das Kurvenpaar C, C_1 dadurch, daß man auf den Binormalen einer Kurve Γ_0 von konstantem Torsionsradius T_0 die Strecken l und $l - k$ aufträgt.

Man hat nun für die beiden Kurven C, C_1, da $\Omega = 0$ ist,

$$S^2 \left(1 - k \frac{\cos \sigma_1}{r_1} \right) = 1 - k \frac{\cos \sigma}{r}$$

$$S^2 \left(\frac{1}{T_1} - \sigma_1' \right) = \frac{1}{T} - \sigma'$$

$$\frac{\sin \sigma_1}{r_1} = - \frac{\sin \sigma}{r}$$

$$\frac{S_0^2}{T_0} = \frac{1}{T} - \sigma'$$

und nach § 1 IV^b

$$\frac{S^4}{r_1^2} = \frac{S^2}{r^2} + \frac{q^2}{k^2} (S^2 - 1).$$

In dem besonderen Falle, wo $S = 1$, d. h. die Kurven C, C_1 mit gleichen Bogenelementen aufeinander bezogen sind, wird nach der letzten Gleichung

$$r = r_1,$$

d. h. die beiden Kurven C, C_1 haben gleiche Krümmung in den beiden Punkten P, P_1. Damit wird aber auch, wie aus den soeben angeführten Gleichungen hervorgeht,

$$\cos\sigma_1 = \cos\sigma, \qquad \sin\sigma_1 = -\sin\sigma,$$

also $\sigma_1 = -\sigma$. Hieraus folgt

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T} - 2\sigma'$$

$$\frac{S_0^2}{T_0} = \frac{1}{T} - \sigma'$$

oder

$$\frac{1}{T} + \frac{1}{T_1} = 2\frac{S_0^2}{T_0}.$$

Da auch

$$l = \frac{(1-p)k}{1-2p+1} = \frac{k}{2}$$

wird, so ist Γ_0 die Mittelkurve des Paares.

Das heißt also, die Kurven eines Paares, welche sich unter konstantem Winkel zu schneiden scheinen und mit gleichen Bogenelementen aufeinander bezogen sind, haben gleiche Krümmungsradien und ein konstantes arithmetisches Mittel der Torsionsmasse in entsprechenden Punkten.

Man bestätigt diesen Satz durch eine einfache direkte Rechnung. Die Koordinaten eines Punktes, welcher den Endpunkt einer auf der Binormalen der Kurve Γ_0 von konstanter Torsion T_0 abgetragenen Strecke l bildet, sind

$$x = x_0 + l\lambda_0$$

$$S\frac{dx}{ds} = \alpha_0 + \frac{l}{T_0}\xi_0, \qquad S^2 = 1 + \frac{l^2}{T_0^2}.$$

Da S konstant ist, folgt weiter

$$S^2\frac{d^2x}{ds^2} = \xi_0\varrho_0 - \frac{l}{T_0}\left(\alpha_0\varrho_0 + \frac{\lambda_0}{T_0}\right),$$

falls $\frac{1}{r_0}$ durch ϱ_0 ersetzt wird. Daraus ergibt sich

$$\frac{S^4}{r^2} = \varrho_0^2\left(1 + \frac{l^2}{T_0^2}\right) + \frac{l^2}{T_0^4}$$

und weiter

$$S^3 \frac{d^3 x}{d s^3} = -\alpha_0\left(\varrho_0^2 + \frac{1}{T}\frac{d\varrho_0}{d s_0}\right) + \xi_0\left[\frac{d\varrho_0}{d s_0} - \frac{l}{T_0}\left(\varrho_0^2 + \frac{1}{T_0^2}\right)\right] - \frac{\lambda_0 \varrho_0}{T_0}.$$

Hieraus folgt aber

$$-\frac{S^6}{r^2 T} = -\frac{1}{T_0}\left[\varrho_0^2\left(1 + \frac{l^2}{T_0^2}\right) + \frac{l^2}{T_0^4}\right] + \frac{l}{T_0^2}\left(1 + \frac{l^2}{T_0^2}\right)\frac{d\varrho_0}{d s_0},$$

also unter Benutzung der angegebenen Werte von

$$\frac{S^4}{r^2} \text{ und } S^2$$

$$-\frac{S^4}{r^2 T} = -\frac{1}{T_0}\frac{S^2}{r^2} + \frac{l}{T_0^2}\frac{d\varrho_0}{d s_0}.$$

Vertauscht man jetzt l mit $-l$, so wird für die Kurve C_1

$$r = r_1$$

und zugleich

$$-\frac{S^4}{r^2 T_1} = -\frac{S^2}{T_0 r^2} - \frac{l}{T_0^2}\frac{d\varrho_0}{d s_0},$$

aus welchen beiden Gleichungen, wenn man noch S^2 durch $\frac{1}{S_0^2}$ ersetzt, wie es sein muß, gerade der Ausdruck für das arithmetische Mittel durch Addition hervorgeht.

§ 8.

Kurvenpaare gleicher Krümmung.

Wenn in entsprechenden Punkten die Kurven C, C_1 gleiche Krümmungsradien haben, möge das Paar als „Paar gleicher Krümmung“ bezeichnet werden.

Die Bedingung, welche hierfür erfüllt sein muß, ist nach § 1 IV[b]

$$1)\qquad (S^2 - 1)\left(\frac{S^2}{r^2} - \frac{q^2}{k^2}\right) = S^2\,\Omega\left(\Omega - 2\,\frac{\sin\sigma}{r}\right).$$

Man kann sie als eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für σ betrachten, die hier im allgemeinen nicht weiter untersucht werden soll. Sie nimmt in zwei Fällen eine besonders einfache Gestalt an.

Erstens, wenn $\Omega = 0$, d. h. wenn die Kurven des Paares sich zugleich unter konstantem Winkel schneiden. Es muß dann entweder der erste oder der zweite Faktor der linken Seite Null sein. Im ersten Falle aber entsprechen sich die Kurven mit gleichen Bogenelementen, p und q sind Konstanten; dieser Fall ist zu Ende des vorigen § behandelt.

Im zweiten Falle hat man

$$\frac{S^2}{r^2} = \frac{q^2}{k^2},$$

da aber $p = cq$ ist, wird

$$2)\qquad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{k^2(1 + c^2)};$$

d. h. beide Kurven sind von konstanter Krümmung. Vermöge der aus $p = cq$ folgenden Differentialgleichung

$$3)\qquad 1 - k\,\frac{\cos\sigma}{r} = ck\left(\frac{1}{T} - \sigma'\right)$$

kann man also zu jeder Kurve C, für die r den in 2) angegebenen Wert hat, Kurven C_1 derselben konstanten Krümmung finden, die mit C ein Paar bilden, welches sich unter konstantem Winkel zu schneiden scheint.

Zwischen den Torsionsradien der Kurven C, C_1 besteht die Gleichung

$$4)\qquad q^2(1 + c^2)\left(\frac{1}{T_1} - \sigma_1'\right) = \left(\frac{1}{T} - \sigma'\right)$$

oder, da

$$q = k\left(\frac{1}{T} - \sigma'\right)$$

$$\left(\frac{1}{T_1} - \sigma_1'\right)\left(\frac{1}{T} - \sigma'\right) = \frac{1}{k^2}(1 + c^2).$$

Außerdem ist nach § 1 V

5) $$\sin\sigma_1 = -\frac{\sin\sigma}{S}$$

und

$$1 - k\frac{\cos\sigma_1}{r} = \frac{\left(1 - k\frac{\cos\sigma}{r}\right)}{p^2(1 + c^2)} c^2 = \frac{c^2}{1 + c^2}\frac{1}{\left(1 - k\frac{\cos\sigma}{r}\right)}.$$

Differentiiert man diese Gleichung nach s, so entsteht, da r konstant ist, unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\sigma_1' = \frac{d\sigma_1}{ds_1} = \frac{d\sigma_1}{ds}\frac{1}{S}$$

$$\frac{k}{r}\sin\sigma_1\,\sigma_1' S = -\frac{c^2}{c + c^2}\frac{k}{r}\frac{\sin\sigma\,\sigma'}{p^2}$$

oder nach 5)

$$\sigma_1' = +\frac{c^2}{c + c^2}\frac{\sigma'}{p^2}.$$

Setzt man diesen Wert in 4) ein, so ergibt sich, da

$$S^2 = q^2(1 + c^2) = p^2\left(\frac{1 + c^2}{c^2}\right)$$

6) $$\frac{S^2}{T_1} = \frac{1}{T}.$$

Unter den angegebenen Voraussetzungen ist daher das Verhältnis der Torsionsradien der Kurven des Paares gleich dem Quadrat des Verhältnisses der Bogenelemente. Beide Kurven sind daher stets in gleichem Sinne gewunden; ist die eine Kurve eben, so ist es auch die andere.

Wir lassen die Integration der Gleichung 3) beiseite und behandeln als Anwendung hier nur den Fall, wo zwei ebene Kurven sich in dieser Beziehung befinden sollen, von gleicher konstanter Krümmung zu sein, und sich unter konstantem Winkel zu schneiden. Sie sind dann notwendig Kreise, und es handelt sich nun um die Integration der Gleichung

$$3^a) \qquad 1 - \frac{k}{r} \cos\sigma = - c\,k\,\sigma',$$

in der r auch gleich 1 genommen werden kann.

Ist nun der Gleichung 2) gemäß

$$1 = k\sqrt{1 + c^2},$$

also

$$c = \operatorname{tg} a, \qquad k = \cos a,$$

so hat man aus 3^a)

$$\frac{d\sigma \sin a}{\cos^2\frac{\sigma}{2} + \sin^2\frac{\sigma}{2} - \cos a\left(\cos^2\frac{\sigma}{2} - \sin^2\frac{\sigma}{2}\right)} = - d s,$$

oder, wenn

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2} = z$$

gesetzt wird

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{cotg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\right) = -\frac{s}{2} + c_1,$$

wo c_1 die Integrationskonstante. Nimmt man $c_1 = 0$, was erfordert, daß die Stelle, wo der Winkel σ gleich Null wird, zum Anfang der Bögen auf dem Kreise gewählt wird, so ist demnach

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{a}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{s}{2}\right).$$

Hiermit ist aber das Gesetz der Zuordnung für die beiden Kreise vollständig ermittelt. Es ist vielleicht nicht überflüssig, diese eigentümliche Lagenbeziehung zwischen zwei Kreisen durch eine direkte Rechnung zu verifizieren.

Der Kreis mit dem Radius 1, dessen Mittelpunkt der Koordinatenanfang des Systems x, y, z ist, liege in der Ebene x, y und sei zur Kurve C gewählt. Die entsprechende Kurve C_1 hat dann die Koordinaten

$$x = \cos s\,(1 - k\cos\sigma)$$
$$y = \sin s\,(1 - k\cos\sigma)$$
$$z = k\sin\sigma.$$

Man erhält nun für

$$k = \cos\alpha, \quad \operatorname{tg}\frac{s}{2} = \zeta, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \gamma,$$

$$\sin s = \frac{2\zeta}{1+\zeta^2}, \quad \cos s = \frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2} = \cos^2\frac{s}{2}\,(1-\zeta^2),$$

$$(1 - k\cos\alpha) = 2\cos^2\frac{\sigma}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\sigma}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{2}{1+\zeta^2\gamma^2}\,\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{s}{2}}.$$

Demnach wird

$$x = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\,\frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2\gamma^2}$$

$$y = 4\zeta\,\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\zeta^2\gamma^2}$$

$$z = \frac{2\cos\alpha\,\gamma\,\zeta}{1+\gamma^2\xi^2}.$$

Ersetzt man noch $\sin^2\frac{\alpha}{2}$ durch $\frac{\gamma^2}{1+\gamma^2}$, so ergibt sich

$$\left(\frac{1+\gamma^2}{2\gamma}\right)x = \gamma\,\frac{(1-\zeta^2)}{1+\gamma^2\zeta^2}$$

$$\left(\frac{1+\gamma^2}{2\gamma}\right)y = \frac{2\zeta\gamma}{1+\gamma^2\zeta^2}$$

$$\left(\frac{1+\gamma^2}{2\gamma}\right)z = \zeta\,\frac{(1-\gamma^2)}{1+\gamma^2\zeta^2}.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich durch Elimination von ζ

$$(x + \cos a)^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$\frac{y}{z} = \frac{2\gamma}{1 - \gamma^2} = \operatorname{tg} a.$$

Die Kurve C_1 ist daher ein Kreis vom Radius 1, dessen Ebene unter dem Winkel $\frac{\pi}{2} - a$ gegen die Ebene des ersten geneigt ist. Die beiden Kreise C und C_1 schneiden sich in der x-Achse, aber der zweite hat seinen Mittelpunkt A an der Stelle $x = -\cos a$, das Quadrat des Verhältnisses der Bogenelemente S^2 findet man gleich

$$\left(\frac{\cos a}{\gamma}\,\frac{1 + \zeta^2}{1 + \gamma^2\zeta^2}\right)^2.$$

Man kann übrigens die Koordinaten des zweiten Kreises auch in die einfachere Form

$$x = \frac{\sin^2 a \cos s}{1 + \cos a \cos s}$$

$$y = \frac{\sin^2 a \sin s}{1 + \cos a \cos s}$$

$$z = \frac{\sin s}{1 + \cos a \cos s}$$

bringen. Diese beiden Kreise, deren Ebenen den Winkel $\frac{\pi}{2} - a$ miteinander bilden, und von jedem Punkte ihrer gemeinsamen Normale von der Länge $\cos a$ aus betrachtet sich unter konstantem Winkel a zu schneiden scheinen, bilden das einzige den angegebenen Voraussetzungen entsprechende Paar von ebenen Kurven.

Bei der vorigen Untersuchung ist die Konstante c als von 0 und ∞ verschieden vorausgesetzt. Ist aber $c = \infty$, so wird $q = 0$ zu setzen sein; dies ist ein trivialer Fall, da beide Kurven C, C_1 auf derselben Developpabelen liegen. Ist dagegen

$c = 0$, so ist $p = 0$ und $S^2 = q^2$. Daraus folgt dann, wie unter 2) $r = k$; da nun

$$p = 1 - \frac{k}{r} \cos \sigma = 0$$

ist, so wird $\sigma = 0$, $\sigma_1 = 0$. Da auch

$$q = \frac{k}{T},$$

es folgt aus der unter 4) bemerkten Gleichung

$$T T' = k^2;$$

die Kurven bilden das spezielle Bertrandsche Paar, das schon S. 17, Anmerkung erwähnt wurde.

Es sei nun zweitens

$$\Omega = 2 \frac{\sin \sigma}{r}.$$

Dann ist nach 1) entweder $S^2 = 1$, die Kurven C und C_1 sind kongruent. Oder es ist

$$\frac{S^2}{r^2} = \frac{q^2}{k^2},$$

also

$$\frac{p}{q} = \sqrt{\frac{r^2}{k^2} - 1}$$

zu setzen. Dies liefert die Gleichung

$$1) \qquad \frac{1 - \frac{k}{r} \cos \sigma}{k\left(\frac{1}{T} - \sigma'\right)} = \sqrt{\frac{r^2}{k^2} - 1}.$$

in welcher noch

$$2 \frac{\sin \sigma}{r} = \frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r^2}{k^2} - 1}$$

zu setzen ist. Durch die Gleichung 1) ist daher die Torsion der Kurve C definiert; der Krümmungshalbmesser r kann willkürlich angenommen werden.

§ 9.

Die Bertrandschen Kurven.

Unter einem Bertrandschen Kurvenpaar verstehen wir hier ein Paar, für das die gemeinsame Normale P_1, P in beiden Kurven des Paares Hauptnormale ist.[1])

Es kann dann zunächst $\sigma = 0$ sein, während $\sigma_1 = 0$ oder $= \pi$ ist. Im ersten Falle hat der Krümmungshalbmesser von C die Richtung von P und P_1, der von C_1 die umgekehrte Richtung; im zweiten liegt der Krümmungshalbmesser von C_1 nach der entgegengesetzten Richtung.

Setzt man nun $\cos\sigma = +1$, $\cos\sigma_1 = \varepsilon$, wo $\varepsilon = \pm 1$ ist, so folgt nach § 1

$$q = \frac{k}{T}, \quad q_1 = \frac{k}{T_1}$$

$$p = 1 - \frac{k}{r}, \quad p_1 = 1 - \frac{\varepsilon k}{r_1}.$$

[1]) Die Hauptnormalen eines Kurvenpaares sind zueinander parallel, wenn nach § 1, 7)

$$q\left(\Omega - \frac{\sin\sigma}{r}\right) = 0$$

$$p\,\Omega\cos\sigma - \frac{q^2}{k}\sin\sigma = 0$$

ist. Es muß also entweder $q = 0$ sein; dann sind beide Kurven orthogonale Trajektorien einer Developpabelen; oder es ist

$$\Omega - \frac{\sin\sigma}{r} = 0.$$

Dann muß aber auch

$$\sin\sigma\left(p\frac{\cos\sigma}{r} - \frac{q^2}{k}\right) = 0$$

sein. Ist $\sin\sigma = 0$, so hat man den Bertrandschen Fall, wo die Hauptnormalen coincidieren. Ist dagegen gleichzeitig

$$\Omega = \frac{\sin\sigma}{r}, \quad p = S^2,$$

so ist nach § 1 IV^a die Kurve C_1 eine gerade Linie, und die Frage verliert ihre Bedeutung.

Aus der Gleichung

$$S\frac{\sin\sigma_1}{r_1}+\frac{\sin\sigma}{r}=\Omega$$

folgt jetzt $\Omega = 0$, oder

$$p = c\,q, \tag{1}$$

also

$$1 = \frac{k}{r}+\frac{c\,k}{T}; \tag{2}$$

auch ist

$$\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$$

der Cosinus des konstanten Winkels, unter dem C und C_1 sich zu schneiden scheinen.

Demnach wird

$$S^2 = q^2(1+c^2) = k^2\frac{(1+c^2)}{T^2} = p^2\frac{(1+c^2)}{c^2}. \tag{3}$$

Aus der Gleichung

$$S^2 q_1 = q$$

folgt nun

$$T\,T_1 = k^2(1+c^2). \tag{4}$$

Aus der Gleichung

$$S^2 p_1 = p \tag{5}$$

folgt

$$k^2\frac{(1+c^2)}{T^2}\left(1-\frac{\varepsilon k}{r_1}\right) = 1-\frac{k}{r} = \frac{c\,k}{T}$$

oder

$$1-\frac{\varepsilon k}{r_1} = \frac{c}{1+c^2}\,\frac{T}{k} = \frac{kc}{T_1}; \tag{6}$$

2) und 6) sind die bekannten natürlichen Gleichungen der B e r t r a n d schen Kurvenklasse. Aus der Gleichung

$$p\,p_1 = \frac{c^2}{1+c^2}$$

folgt übrigens noch

$$7)\qquad \left(1-\frac{\varepsilon k}{r_1}\right)\left(1-\frac{k}{r}\right)=\frac{c^2}{1+c^2}.$$

Schreibt man endlich die Gleichung 5) in der Form

$$-\varepsilon S^2\frac{k}{r_1}=-S^2+1-\frac{k}{r},$$

oder mit Hilfe von 2) und 3)

$$-\varepsilon S^2\frac{k}{r_1}=-\frac{k^2}{T^2}-\left(1-\frac{k}{r}\right)^2+\left(1-\frac{k}{r}\right),$$

so erhält man

$$8)\qquad -\varepsilon S^2\frac{k}{r_1}=\frac{k}{r}-k^2\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{T^2}\right).$$

Hieraus folgen sofort die schon von Aoust angegebenen Bedingungen.

Ist

$$k<\frac{rT^2}{r^2+T^2},$$

so muß ε einen negativen Wert haben, die Krümmungshalbmesser von C und C_1 sind beide nach derselben Seite hin gerichtet. Ist dagegen

$$k>\frac{rT^2}{r^2+T^2},$$

so muß ε positiv sein, der Krümmungshalbmesser von C ist nach P_1 der von C_1 nach P hin gerichtet. Für den Fall des Gleichheitszeichens hat C_1 eine Wendung, da $r_1=\infty$ wird.

Man kann die Bedingung

$$k\lesseqgtr\frac{rT^2}{r^2+T^2},$$

je nachdem $\varepsilon\lesseqgtr 0$ auf eine andere Form bringen, wenn man

$$\frac{ck}{T}=1-\frac{k}{r}$$

setzt. Dann ergibt sich

$$9) \qquad (k-r)\left(1+\frac{k-r}{c^2 k}\right) \lesseqgtr 0, \quad \varepsilon \lesseqgtr 0.$$

Ist dagegen für die erste Kurve C, $\sigma = \pi$, für die zweite C_1, $\cos\sigma = \varepsilon$, so wird analog zu 8)

$$-\varepsilon S^2 \frac{k}{r_1} = -\frac{k}{r} - k^2\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{T^2}\right).$$

In diesem Falle besteht keine besondere Bedingung, dagegen muß jetzt ε eine positive Größe sein, d. h. der Krümmungshalbmesser von C_1 ist stets nach derselben Seite gerichtet, wie der von C.

Hieraus ergeben sich nun die folgenden Fälle:

1. ε positiv, $\sigma = 0$. Dann ist nach 9) $k < r$ möglich; dann muß zugleich nach 7) $k > r_1$ sein. Beide Krümmungsmittelpunkte befinden sich auf der Strecke P, P_1. Es ist aber auch $k < r$ möglich, dann muß nach 9) $r > k(1+c^2)$ sein. Zugleich ist nach 7) $k < r_1$. Der Krümmungsmittelpunkt von C liegt über P_1 hinaus; der von C_1 über P hinaus.
2. ε positiv, $\sigma = \pi$. In diesem Falle ist immer $r' > k$: beide Krümmungsmittelpunkte befinden sich auf der Seite von P, welche P_1 nicht enthält.
3. ε negativ, $\sigma = 0$. Der Fall $k > r$ ist nach 9) unmöglich. Daher ist $k < r$ und zugleich $r < k(1+c^2)$: beide Krümmungsmittelpunkte befinden sich auf der Seite von P_1, die P nicht enthält.
4. Der Fall, ε negativ, $\sigma = \pi$, wo beide Krümmungshalbmesser entgegengesetzt nach dem unendlich fernen Punkt von P, P_1 gerichtet sind, ist unmöglich; sind sie überhaupt entgegengesetzt gerichtet, so befinden sich beide Krümmungsmittelpunkte auf der Strecke P, P_1.[1]

---

[1] Die hier gemachten Angaben, aus denen man auch unmittelbar die weiteren bekannten Eigenschaften der Bertrandschen Paare ableitet, scheinen mir zur weiteren Erläuterung der eigentümlichen Konfiguration derselben zu dienen.

Da die Bertrandschen Kurven ein so vielfaches Interesse gefunden haben, mag hier noch die folgende Bemerkung gestattet sein.

Sucht man alle Kurven C_1, die mit einer gegebenen Kurve C ein Paar bilden, das sich unter konstantem Winkel schneidet, so ist die Gleichung $p = cq$ oder

$$1 - \frac{k \cos \sigma}{r} = ck\left(\frac{1}{T} - \sigma'\right)$$

zu lösen. Sie verwandelt sich, wenn man $z = \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2}$ oder

$$\sigma' = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{2\frac{dz}{ds}}{1 + z^2}$$

setzt, in die Riccatische Gleichung

$$2ck\frac{dz}{ds} = \left(\frac{ck}{T} + k - 1\right) + z^2\left(\frac{ck}{T} - 1 - \frac{k}{r}\right).$$

Dies liefert den folgenden Satz: Das Doppelverhältnis der Halbierungslinien der Winkel von irgend vier gemeinsamen Normalen von vier Kurven C_1, die mit derselben Kurve C ein Paar mit konstantem k bilden, das sich unter konstantem Winkel zu schneiden scheint, ist unveränderlich längs der Kurve C.

Die Riccatische Gleichung kann bekanntlich durch Quadratur gelöst werden, wenn man ein partikuläres Integral derselben kennt. Zu jeder der gefundenen Kurven C_1, deren Charaktere jedesmal eindeutig bestimmt sind, kann man also unzählig viele neue Kurven durch Quadratur finden, die mit ihr ein Paar bilden, wenn man die Konstante c festhält.[1])

Insbesonders kann man nun immer ein partikuläres Integral angeben, wenn

$$\frac{k}{r} + \frac{ck}{T} - 1 = a\left(\frac{ck}{T} - 1 - \frac{k}{r}\right)$$

[1]) Besonders einfach werden diese Verhältnisse, wenn C selbst eine gemeine Schraubenlinie, also r und T Konstanten sind.

wo a eine Konstante ist, d. h. wenn

$$\frac{k(a+1)}{r(a-1)} = \frac{ck}{T} - 1$$

also die Kurve C selbst eine Bertrandsche Kurve ist.

Nimmt man z. B.

$$\frac{k}{r} + \frac{ck}{T} - 1 = 0,$$

so ist

$$\frac{c}{z} = \int \frac{ds}{r} + \text{const},$$

für

$$\frac{ck}{T} - 1 - \frac{k}{r} = 0$$

wird

$$cz = \int \frac{ds}{r} + \text{const}.$$

Für $a = -1$ ergibt die vorstehende Gleichung

$$\frac{ck}{T} = 1,$$

d. h. die Kurve C hat konstante Torsion. Aber diese Kurven gehören nicht zu den Bertrandschen Kurven.[1])

[1]) Es scheint mir daher nicht zweckmäßig, die Kurven der Gattung

$$\frac{A}{T} + \frac{B}{r} + C = 0,$$

wie mehrere Schriftsteller tun, allgemein als Bertrandsche Kurven zu bezeichnen. Ist nämlich $B = 0$, so muß das zugehörige k gleich Null sein, d, h. es entsteht kein Paar, falls man nicht sagen will, daß jede Kurve, insbesondere auch also die Kurve konstanter Torsion mit sich selbst ein Bertrandsches Paar bildet.

Aoust hat (Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace, Paris 1876, p. 369) den einer Verallgemeinerung der Bertrandschen Paare entsprechenden Satz bemerkt:

Sind zwei Kurven so aufeinander bezogen, daß sie in entsprechenden Punkten parallele Hauptnormalen haben, so ist der Winkel ihrer Tangenten, sowie auch der ihrer Binormalen, konstant. Dieser Satz ergibt

§ 10.

Ebene Kurvenpaare.

Die Bestimmung aller ebenen Kurvenpaare ist an sich sehr einfach. Nimmt man in der xy Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems eine Kurve C beliebig an, so sind

sich unmittelbar aus den Frenetschen Formeln. Man hat nämlich, je nachdem die Hauptnormalen gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben, für die beiden Kurven C und C_1

1) $$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\xi}{r}, \quad \frac{d\alpha_1}{ds_1} = \pm\frac{\xi}{r_1}$$

2) $$\frac{d\xi}{ds} = -\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\lambda}{T}\right), \quad \pm\frac{d\xi_1}{ds_1} = -\left(\frac{\alpha_1}{r_1} + \frac{\lambda_1}{T_1}\right)$$

3) $$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\xi}{T}, \quad \frac{d\lambda_1}{ds_1} = \pm\frac{\xi}{T_1}.$$

Aus 1) und 3 folgt nun sofort

$$\sum \alpha_1 \frac{d\alpha}{ds} = 0, \quad \sum \alpha \frac{d\alpha_1}{ds} = 0$$

$$\sum \lambda_1 \frac{d\lambda}{ds} = 0, \quad \sum \lambda \frac{d\lambda_1}{ds} = 0;$$

diese Gleichungen sagen aber aus, daß

$$\Sigma \alpha \alpha_1 = \cos(t t_1) = \text{const} = \cos\omega$$

ist und gleiches gilt für $\Sigma \lambda \lambda_1 = \cos(b b_1)$. Durch eine direkte Betrachtung der beiden Triëder folgt ferner

$$\cos(t b_1) = \pm \sin\omega$$
$$\cos(t_1 b) = -\sin\omega$$
$$\cos(b b_1) = \pm \cos\omega$$

je nachdem

$$\cos(h h_1) = \pm 1 \quad \text{ist.}$$

Aus den Gleichungen

$$\frac{1}{r_1}\sum \alpha\alpha_1 + \frac{1}{T_1}\sum \alpha\lambda_1 = \mp \sum \alpha \frac{d\xi}{ds_1} = \pm \frac{1}{r}\frac{ds}{ds_1},$$

oder

$$\frac{\cos(t t_1)}{r_1} + \frac{\cos(t b_1)}{T_1} = \pm\frac{1}{r_1}\frac{ds}{ds_1}$$

$$\frac{\cos(t t_1)}{r} + \frac{\cos(t_1 b)}{T} = \pm\frac{1}{r}\frac{ds}{ds_1},$$

$$x_1 = x + k \cos\sigma \cos a$$
$$y_1 = y - k \cos\sigma \sin a$$
$$z_1 = k \sin\sigma,$$

wo $\operatorname{tg} a = \frac{dy}{dx}$ gesetzt ist, die Koordinaten einer zweiten Kurve C_1, die mit ihr ein Paar bildet. Soll diese in einer gegebenen Ebene

$$A x_1 + B y_1 + C z_1 + D = 0$$

liegen, so hat man aus der Gleichung

$$Ax + By + Ck \sin\sigma + D + k\cos\sigma(A\cos a - B\sin a) = 0$$

σ zu berechnen. Da sich hier bei gegebenem k im allgemeinen zwei Lösungen für σ ergeben, so kann man zu jeder beliebigen ebenen Kurve C in einer zweiten gegebenen Ebene im allgemeinen — d. h. von der Realität abgesehen — zwei Kurven C_1 finden, die mit ihr ein Paar bilden.

Aber nicht so einfach ist die Frage, sowie noch eine Bedingung, wie z. B. daß das Verhältnis der Bogenelemente S konstant sei, hinzukommt. Zu einer übersichtlichen Behandlung gelangt man auch hier durch die Anwendung der Gleichungen des § 1. Bilden überhaupt zwei Kurven ein Paar, so ist nach § 1

$$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 \left(\frac{1}{T_1} - \sigma_1'\right) = \frac{1}{T} - \sigma',$$

---

welches aus 2) durch Multiplikation mit a, a_1 und Summation folgen, ergeben sich auch die ebenfalls von Aoust herrührenden Gleichungen

$$\frac{1}{r_1} = \pm \frac{ds}{ds_1}\left(\frac{\cos\omega}{r} - \frac{\sin\omega}{T}\right)$$
$$\frac{1}{T_1} = \frac{ds}{ds_1}\left(\frac{\sin\omega}{r} + \frac{\cos\omega}{T}\right)$$
$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{T_1^2} = \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{T^2}\right)$$
$$\pm\frac{T_1}{r_1} = \frac{\cos\omega\,\frac{T}{r} - \sin\omega}{\sin\omega\,\frac{T}{r} + \cos\omega}.$$

oder:

$$\text{1)} \qquad \frac{ds_1}{ds}\left(\frac{ds_1}{T_1} - d\sigma_1\right) = \frac{ds}{T} - d\sigma.$$

Wird nun $\frac{ds_1}{ds} = S = a = \text{const}$ vorausgesetzt, so folgt, wenn man die Kontingenzwinkel der Windung

$$\int \frac{ds_1}{T_1} = \eta_1, \quad \int \frac{ds}{T} = \eta$$

einführt, durch Integration aus 1)

$$\text{2)} \qquad a(\eta_1 - \sigma_1) = (\eta - \sigma) + \text{const.}$$

Sind insbesondere, wie nun vorausgesetzt werden soll, die beiden Kurven C und C_1 eben, so ist nach 2)

$$\text{3)} \qquad a\sigma_1 = \sigma + c,$$

wo c eine Konstante. Und umgekehrt ist die Gleichung 3) auch die Bedingung dafür, daß einer ebenen Kurve C wieder eine ebene Kurve C_1 zugehört. Aus den Gleichungen 3) des § 12 findet man nun

$$\text{4)} \qquad k\frac{d\sigma}{ds} = -a\cos\lambda, \quad \cos\lambda \neq 0$$

und

$$\text{5)} \qquad \sin\lambda\cos\frac{(\sigma + c)}{a}\cos\sigma + \sin\frac{(\sigma + c)}{a}\sin\sigma = C,$$

wo $|C| < 1$ den Cosinus des konstanten Winkels der Ebenen der beiden Kurven bezeichnet.

Hieraus folgt

$$\sin\lambda = \frac{C - \sin\sigma\sin\frac{(\sigma + c)}{a}}{\cos\frac{\sigma + c}{a}\cos\sigma}$$

$$\text{6)} \qquad \cos^2\lambda = \frac{\left[\cos\left(\frac{\sigma + c}{a} + \sigma\right) + C\right]\left[\cos\left(\frac{\sigma + c}{a} - \sigma\right) - C\right]}{\cos^2\frac{(\sigma + c)}{a}\cos^2\sigma}$$

$$7)\quad 1 - a\sin\lambda = \frac{\cos\frac{(\sigma+c)}{a}\cos\sigma - Ca + a\sin\sigma\sin\frac{(\sigma+c)}{a}}{\cos\frac{(\sigma+c)}{a}\cos\sigma}$$

$$1 - \frac{\sin\lambda}{a} = \frac{\cos\frac{(\sigma+c)}{a}\cos\sigma - \frac{c}{a} + \frac{1}{a}\sin\sigma\sin\frac{(\sigma+c)}{a}}{\cos\frac{(\sigma+c)}{a}\cos\sigma}.$$

Aus den Gleichungen 3) des § 12 findet man nun vermöge 7)

$$8)\quad \begin{aligned} \frac{k}{r} &= \frac{1}{\cos\frac{(\sigma+c)}{a}\cos^2\sigma}\left(\cos\frac{(\sigma+c)}{a}\cos\sigma - Ca + a\sin\frac{(\sigma+c)}{a}\sin\sigma\right) \\ \frac{k}{r_1} &= \frac{1}{\cos\sigma\cos^2\frac{\sigma+c}{a}}\left(\cos\frac{(\sigma+c)}{a}\cos\sigma - \frac{C}{a} + \frac{1}{a}\sin\frac{(\sigma+c)}{a}\sin\sigma\right) \end{aligned}$$

und aus Gleichung 4) und 6)

$$9)\quad k^2\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = a^2\,\frac{\left[\cos\left(\frac{\sigma+c}{a}+\sigma\right)+c\right]\left[\cos\left(\frac{\sigma+c}{a}-\sigma\right)-C\right]}{\cos^2\sigma\cos^2\frac{(\sigma+c)}{a}}.$$

Sollen nun, wie wir überall voraussetzten, die Kurven C und C_1 reell sein, so muß die rechte Seite positiv oder Null sein. Hierdurch kann, wenn die Konstanten C resp. c beliebig gewählt sind, der Verlauf von σ beschränkt werden.[1])

Die Gleichung 9) bestimmt σ durch eine Quadratur, die allerdings bei beliebigem a nicht zu den einfachen gehört.

---

[1]) Setzt man z. B. voraus, daß der Cosinus der Binormalen gleich ± 1 sei, so werden die Ebenen der Kurven des Paares parallel sein. Dann aber ist die rechte Seite der Gleichung 9) immer negativ, es sei denn, daß man σ einen der konstanten Werte erteilt, für welche sie verschwindet. Dann aber werden r und r_1 konstant, es entsteht eine ganz triviale Lösung, beide Kurven werden Kreise in parallelen Ebenen.

Man kann also durch Quadratur die natürlichen Gleichungen aller Paare von ebenen Kurven bestimmen, deren Bogenelemente für entsprechende Punkte in konstantem Verhältnis stehen. Damit sind aber auch die Gleichungen dieser Kurven selbst in rechtwinkligen Koordinaten durch zwei weitere Quadraturen vermöge der Gleichungen 8) vollständig gegeben.

Die unter 8), 9) gegebene Lösung enthält noch zwei willkürliche Konstanten. Ist insbesondere $a = 1$, so erhält man aus 8)

$$8^{a})\qquad \begin{aligned} \frac{k}{r} &= \frac{\cos c - C}{\cos(\sigma + c)\cos^2\sigma} \\ \frac{k}{r_1} &= \frac{\cos c - C}{\cos^2(\sigma + c)\cos\sigma}. \end{aligned}$$

Wird hier noch $c = 0$ angenommen, so werden die beiden Kurven C und C_1 kongruent. Es läßt sich leicht zeigen, daß in diesem schon oben behandelten Falle zwei kongruente Ellipsen entstehen.

Setzt man

$$c_1^3 = \frac{1 - C}{k},$$

wobei c_1 eine positive Konstante ist, so wird

$$r^{1/3} c_1 = \cos\sigma;$$

wird dies in die mit 9) äquivalente Gleichung

$$1 = k^2 \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 + \left(1 - \frac{k\cos\sigma}{r}\right)^2$$

eingesetzt, so ergibt sich wegen

$$\frac{1}{3}\frac{dr}{ds} r^{-2/3} c_1 = -\sin\sigma \frac{d\sigma}{ds}, \quad \sin^2\sigma = 1 - c_1^2 r^{2/3}$$

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = 9\,(c_1^2 r^{2/3} - 1)\left(1 - \frac{2}{k c_1} r^{2/3}\right).$$

Setzt man jetzt

$$c_1^2 = \left(\frac{b^2}{a^4}\right)^{1/3}, \quad \frac{2}{k c_1} = \left(\frac{a^2}{b^4}\right)^{1/3}, \tag{10}$$

so erhält man die bekannte natürliche Gleichung der Ellipse mit den Achsen a und b:

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = 9\left[1 - \left(\frac{b^2}{a^4}\right)^{1/3} r^{2/3}\right]\left[\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{1/3} r^{2/3} - 1\right].$$

Da nach 10) $k = 2b$ wird, und

$$c_1^3 = \frac{b}{a^2},$$

so wird

$$1 - C = \frac{2b^2}{a^2}.$$

Ist

$$\frac{2b^2}{a^2} < 1,$$

so ist C positiv und < 1; ist dagegen

$$\frac{2b^2}{a^2} > 1,$$

so ist

$$-C = \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} - 1,$$

also $|-C| < 1$.

Um nicht zu weitläufig zu werden, soll nur der Fall $a = 1$ für die Gleichung 9) noch etwas weiter ausgeführt werden. Setzt man

$$\cos c - C = \frac{k}{c_1},$$

so erhält man nach einigen Umformungen die Gleichung

$$c_1 \frac{\sqrt{k\, d\sigma \cos\sigma \cos(\sigma + c)}}{\sqrt{2 c_1 \cos\sigma(\cos\sigma + c) - k}} = ds.$$

Setzt man wie gebräuchlich

$$\sin\sigma = \frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2}, \quad \cos\sigma = \frac{2\zeta}{1+\zeta^2}, \quad d\sigma = -2\frac{d\zeta}{1+\zeta^2},$$

so entsteht für s ein elliptisches Integral. Ich gehe auf die Behandlung desselben, welches sich unter geeigneten Voraussetzungen über die Konstanten c_1 und c auch auf ein logarithmisches reduzieren läßt, nicht weiter ein, obwohl diese merkwürdigen Kurvenpaare wohl eine ausführlichere Behandlung zu verdienen scheinen.

Es ergibt sich nun die weitere Aufgabe, das in diesem § gestellte Problem auch bei der Verwendung von rechtwinkligen Koordinaten auf Quadraturen zurückzuführen. Für den Fall, wo die Ebenen der beiden Kurven aufeinander rechtwinklig stehen, läßt sich dies leicht ausführen; nur dieser Fall soll hier noch zur Behandlung kommen.

Wir wählen zu diesen Ebenen die xy und yz-Ebene, dann sind die Bedingungen des Problems durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} &x^2 + (y-y_1)^2 + z_1^2 = k^2 \\ 10)\qquad &dy_1^2 + dz_1^2 = a^2(dx^2 + dy^2) \\ &-x\,dx + (y_1 - y)\,dy = 0 \end{aligned}$$

ausgesprochen, von denen die letzte ausdrückt, daß die Verbindungslinie der korrespondierenden Punkte x, y, 0; 0, y_1, z_1 zu einer der Kurven senkrecht steht.

Setzt man nun

$$11)\qquad y_1 - y = px = \xi,$$

wo

$$p = \frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

so ist $dy_1 = dy + d\xi$, oder nach der letzten der Gleichungen 10)

$$dy_1 = \frac{x\,dx + \xi\,d\xi}{\xi} = \frac{1}{2}\,\frac{d(x^2+\xi^2)}{\xi}$$

und

$$z_1 \, d z_1 = - x \, d x + (y_1 - y) \, d \xi = - (x \, d x + \xi \, d \xi),$$

also
$$d z_1 = - \frac{1}{2} \frac{d (x^2 + \xi^2)}{\sqrt{k^2 - (x^2 + \xi^2)}}.$$

Hieraus folgt durch Einsetzen in die zweite der Gleichungen 10)

$$a^2 (d x^2 + d y^2) = a^2 d x^2 \left(1 + \frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{4} [d (x^2 + \xi^2)]^2 \left[\frac{1}{\xi^2} + \frac{k^2 - (x^2 + \xi^2)}{1}\right]$$

oder, wenn man p durch diesen Wert nach 11) ersetzt

$$4 a^2 d x^2 \frac{\xi^2 + x^2}{\xi^2} = \frac{(k^2 - x^2) [d (x^2 + \xi^2)]^2}{\xi^2 [k^2 - (x^2 + \xi^2)]}.$$

Wird noch

$$\zeta^2 = (x^2 + \xi^2)$$

eingeführt, so entsteht die einfache Differentialgleichung

$$\text{12)} \qquad \frac{a \, d x}{\sqrt{k^2 - x^2}} = \frac{d \zeta}{\sqrt{k^2 - \zeta^2}}.$$

Setzt man

$$x = k \sin \varphi, \qquad \zeta = k \sin \psi,$$

so wird

$$a \, d \psi = d \varphi, \qquad a \psi = \varphi + c.$$

Demnach ist

$$x^2 + \xi^2 = k^2 \sin^2 \frac{\varphi + c}{a}$$

oder

$$\xi^2 = k^2 \left(\sin^2 \frac{\varphi + c}{a} - \sin^2 \varphi\right).$$

Da andererseits

$$\xi = x p = x \frac{d x}{d y},$$

so wird

$$d y = \frac{x \, d x}{\xi} = k \frac{\sin \varphi \cos \varphi \, d \varphi}{\sqrt{\sin \frac{\varphi + c}{a} - \sin^2 \varphi}};$$

die Kurve C ist also in Parameterform durch die Gleichungen

$$\text{13)}\qquad \begin{aligned} x &= k \sin\varphi \\ y &= k \int \frac{\sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi + c}{a} - \sin^2\varphi}} + \text{const.} \\ z &= 0 \end{aligned}$$

gegeben und die zugehörige Kurve C_1 in der YZ-Ebene durch

$$\text{13')}\qquad \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ y_1 &= y + k \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi + c}{a} - \sin^2\varphi} \\ z_1 &= \pm k \cos \frac{\varphi + c}{a}. \end{aligned}$$

In dem besonderen Falle, wo $c = 0$, und $a = 1$ ist, ist diese Darstellung nicht mehr gültig, weil dann $\xi = 0$ wird. Man erhält dann aber aus 12)

$$x = \text{const}, \qquad \zeta = \text{const}$$

eine ganz triviale Lösung, welche zwei zur Y-Achse im Abstande k parallele Gerade vorstellt, von denen die eine in der XY-Ebene, die andere in der YZ-Ebene liegt.

Auch hier seien in Bezug auf die Gleichungen 13), 13') nur ein paar ganz spezielle einfache Fälle hervorgehoben.

Wählt man

$$c = \frac{\pi}{2}, \qquad a = 1,$$

so wird

$$\begin{aligned} x &= k \sin\varphi & x_1 &= 0 \\ y &= -\frac{k}{2}\sqrt{\cos 2\varphi} & y_1 &= +\frac{k}{2}\sqrt{\cos 2\varphi} \\ z &= 0 & z_1 &= \mp k \sin\varphi = \mp x. \end{aligned}$$

Da $4y^2 + 2x^2 = k^2$, so hat man zwei kongruente Ellipsen, d. h. den schon wiederholt erwähnten Fall.

Wählt man $a = \frac{1}{2}$, $c = 0$, so wird

$$x = k \sin\varphi$$

$$y = \frac{k}{2} \operatorname{arc} \sin 2 \frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}}$$

oder

$$y = \frac{k}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{2x}{k\sqrt{3}};$$

mithin eine Sinuskurve. Zugleich wird

$$z_1 = \pm k \cos 2\varphi, \quad y_1 = y + k \sin\varphi \sqrt{4\cos^2\varphi - 1}.$$

§ 11.

Ähnliche Kurvenpaare.

Nimmt man an, daß für zwei Kurven $S = \frac{r_1}{r}$, $S = \frac{T_1}{T}$ ist, so sind die beiden Kurven mit entsprechenden Punkten so auf einander bezogen, daß

$$\frac{ds}{r} = \frac{ds_1}{r_1}, \quad \frac{ds}{T} = \frac{ds_1}{T_1}$$

ist, d. h. die Kurven sind in den kleinsten Teilen zu einander ähnlich. Bezeichnet man die Koordinaten derselben durch x, y, z; x_1, y_1, z_1 so ist

$$\frac{dx}{ds} = \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \beta, \quad \frac{dz}{ds} = \gamma,$$

$$\frac{dx_1}{ds_1} = \alpha_1, \quad \frac{dy_1}{ds_1} = \beta_1, \quad \frac{dz_1}{ds_1} = \gamma_1,$$

während die α, ξ, λ; $\alpha_1, \xi_1, \lambda_1$ und entsprechend die β, η, μ; β_1, η_1, μ_1 etc. dem System der Frenetschen Formeln

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\xi}{r}, \qquad \frac{d\alpha_1}{ds_1} = \frac{\xi_1}{r_1}$$

$$\frac{d\xi}{ds} = -\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\lambda}{T}\right), \qquad \frac{d\xi_1}{ds_1} = -\left(\frac{\alpha_1}{r_1} + \frac{\lambda_1}{T_1}\right)$$

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\xi}{T}, \qquad \frac{d\lambda_1}{ds_1} = \frac{\xi_1}{T_1}$$

genügen, von denen die zweite Reihe durch Multiplikation mit S auf die Form

$$\frac{d a_1}{d s} = \frac{\xi_1}{r}$$

$$\frac{d \xi_1}{d s} = -\left(\frac{a_1}{r} + \frac{\lambda_1}{T}\right)$$

$$\frac{d \lambda_1}{d s} = \frac{\xi_1}{T}$$

gebracht wird. Denkt man sich nun diese Gleichungen so nitegriert, daß zu Anfang das System der Werte $a, \xi, \lambda \ldots$ mit dem der $a_1, \xi_1, \lambda_1 \ldots$ coincidiert, so folgt

$$a = a_1, \quad \xi = \xi_1, \quad \lambda = \lambda_1 \text{ etc.} \ldots$$

und man erhält

$$x = \int a\, ds, \quad x_1 = \int a S\, ds$$

nebst den analogen Formeln für y, y_1; z, z_1.

Mit Benutzung eines von Herrn Bianchi eingeführten Ausdruckes kann man sagen:

Zwei in den kleinsten Teilen ähnliche Kurven entspringen durch die Transformation von Combescure aus einander.

Die Kurven sind in dem eben besprochenen Falle direkt ähnlich. Setzt man dagegen

$$\frac{S}{r_1} = \frac{1}{r} \quad \frac{S}{T_1} = -\frac{1}{T},$$

so sind sie invers in den kleinsten Teilen ähnlich. Die Frenetschen Formeln werden hier

$$\frac{d a}{d s} = \frac{\xi}{r}, \qquad \frac{d a_1}{d s} = \frac{\xi_1}{r}$$

$$\frac{d \xi}{d s} = -\left(\frac{a}{r} + \frac{\lambda}{T}\right), \qquad \frac{d \xi_1}{d s} = -\left(\frac{a_1}{r} - \frac{\lambda_1}{T}\right)$$

$$\frac{d \lambda}{d s} = \frac{\xi}{T}, \qquad \frac{d \lambda_1}{d s} = -\frac{\xi_1}{T}.$$

Kehrt man in der zweiten Reihe gleichzeitig die Vorzeichen von α_1 und ξ_1 um, wobei die Determinante $(\alpha_1\ \xi_1\ \lambda_1)$ ihr Vorzeichen $+1$ nicht ändert, so erkennt man, daß die Gleichungen

$$x = \int \alpha\, ds, \quad x_1 = -\int \alpha S\, ds, \quad \text{u. s. w.}$$

bestehen; es handelt sich hier einfach um Symmetrie in Bezug auf einen Punkt.

Das Problem, alle in den kleinsten Teilen ähnlichen Kurvenpaare zu bestimmen, läßt sich mit Hilfe der Gleichungen der § 1 ansetzen; näherliegend ist übrigens eine andere Behandlungsweise, welche direkt die Funktion S zu bestimmen sucht. Hier soll nur die wirkliche Ähnlichkeit, d. h. der Fall wo S eine positive Konstante ist, weiter untersucht werden.

Bezeichnet man die Krümmungs- und Torsionsradien der Kurven wie früher mit r, r_1; T, T_1 so sind die Bedingungen

$$a^2 = \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2, \quad \frac{T_1}{T} = a,$$

wo a eine positive oder negative Konstante bedeutet, je nach dem die Ähnlichkeit direkt oder invers sein soll. Die Gleichungen des § 1, wobei a jetzt eine positive Konstante bedeuten möge, nehmen die Form an

$$r(a^2 - 1) = k(a \cos\sigma_1 - \cos\sigma)$$

$$\frac{\pm a - 1}{T} = a\frac{d\sigma_1}{as} - \frac{d\sigma}{as}$$

$$\sin\sigma_1 + \sin\sigma = r\Omega$$

$$\left(1 - k\frac{\cos\sigma}{r}\right)^2 + k^2\left(\frac{1}{T} - \frac{d\sigma}{as}\right)^2 = a^2,$$

wo wieder das obere Vorzeichen der direkten Ähnlichkeit entspricht; sie scheinen aber für die Untersuchung weniger geeignet, da die Elimination von σ und σ_1, durch welche r und T als Funktionen von s und damit die natürlichen Gleichungen

der Kurve C, welche mit C_1 ein Paar bildet, gefunden werden, nicht bequem zu sein scheint.

Wir benutzen daher den Satz des § 6, wonach die Kurven eines Paares mit konstantem Bogenelementverhältnis aus einer Mittelkurve x, y, z erzeugt werden, deren Krümmungs- und Torsionsradius mit r, τ sowie das Bogenelement mit ds bezeichnet werden sollen; die Kurven C_1 und C_2 des Paares werden durch die Indices 1, 2 unterschieden, der sich dann ebenso auf $r_1, T_1, ds_1, \ldots r_2, T_2, ds_2 \ldots$ zu erstrecken hat. Die Koordinaten x_1, y_1, z_1 eines Punktes der Kurve C_1 sind nun, von der „Mittelkurve" ausgehend

$$2)\qquad x_1 = x + l_1 (\xi \cos \theta + \lambda \sin \theta),$$

wobei

$$\cos \theta = r c$$

ist. Setzt man

$$l_1 \left(\frac{1}{\tau} - \frac{d\theta}{ds}\right) = q,$$

so wird

$$3)\qquad \frac{ds_1}{ds}\frac{dx_1}{ds_1} = \alpha (1 - l_1 c) + q (\xi \sin \theta - \lambda \cos \theta)$$

$$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = (1 - l_1 c)^2 + q^2.$$

Aus 3) folgt durch Differentiation nach s

$$4)\qquad \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 \frac{d^2 x_1}{ds_1} = -\alpha \left(\frac{\sin\theta}{r} q + q \frac{dq}{ds} \frac{1 - l_1 c}{h}\right)$$

$$+ \xi \left(\frac{1 - l_1 c}{r} - \frac{q^2}{l_1} \cos\theta + \frac{dq}{ds} \sin\theta \frac{(1 - l_1 c)^2}{h}\right)$$

$$+ \lambda \left(- \sin\theta \frac{q}{l} - \frac{dq}{ds} \cos\theta \frac{(1 - l_1 c)^2}{h}\right.,$$

wo h zur Abkürzung für $\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2$ gesetzt ist. Durch Quadrieren und Addieren der Gleichungen 4) folgt, wenn noch $q = l_1 t$, also

$$5) \qquad t = \frac{1}{\tau} - \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\tau} - \theta'$$

gesetzt wird,

$$6) \quad \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^4 \frac{1}{r_1^2} = l_1^2 \sin^2\theta \frac{t^2}{r^2} + l_1^2 t^4 + \frac{(1-l_1 c)^2}{r^2} + 2 l_1 \frac{(1-l_1 c)}{r} t' \sin\theta$$

$$- 2 l_1 (1 - l_1 c) \frac{t^2}{r} \cos\theta + l_1^2 t'^2 \frac{(1-l_1 c)^2}{(1-l_1 c)^2 + l_1^2 t^2}.$$

Soll nun für die Kurve C_2, bei der die Gleichungen 2)–6) gelten, wenn man den Index 1 durch 2 ersetzt,

$$a) \qquad \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 l_2^2 - \left(\frac{ds_2}{ds}\right)^2 l_1^2 = 0$$

das Verhältnis der Bogenelemente von C_1 und C_2 also absolut genommen gleich $l_1 : l_2$ sein, so hat man nach

$$3) \qquad l_2^2 (1 - l_1 c)^2 - l_1^2 (1 - l_2 c)^2 = 0$$

oder

$$\text{I} \qquad l_1 + l_2 - 2 l_1 l_2 c = 0, \quad l_1 l_2 = - \frac{l_1^2}{1 - 2 l_1 c};$$

d. h. l_1 und l_2 haben gleiches oder ungleiches Zeichen je nachdem $1 - 2 l_1 c \lesseqgtr 0$ ist.[1]) Es ist ferner, wenn

$$k_1 = 1 - l_1 c, \quad k_2 = 1 - l_2 c$$

gesetzt wird

$$7) \qquad \begin{aligned} l_2 k_1 + l_1 k_2 &= 0 \\ l_2^2 k_1^3 + l_1^2 k_2^3 &= 0 \\ l_2^2 k_1^2 - l_1^2 k_2^2 &= 0 \\ l_2 k_1 - l_1 k_2 &= l_2 - l_1 \\ \frac{k_1^2}{k_1^2 + l_1^2 t^2} - \frac{k_2^2}{k_2^2 + l_2^2 t^2} &= 0. \end{aligned}$$

---

[1]) Der Fall $1 - 2 l_1 c = 0$, wo l_2 unendlich wird, hat hier keinen Sinn. Auch von dem trivialen Falle

$$l_1 + l_2 = 0, \quad \text{wo } c = 0, \quad \sigma = \frac{\pi}{2},$$

wird im folgenden abgesehen.

Sollen die Krümmungsradien r_1, r_2 ebenfalls im absoluten Verhältnisse $l_1 : l_2$ stehen, so ist zu setzen

$$\beta) \qquad \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^4 \frac{l_2^2}{r_1^2} - \left(\frac{ds_2}{ds}\right)^4 \frac{l_1^2}{r_2^2} = 0.$$

Wird diese Differenz nun nach 6) gebildet, so bleibt vermöge der Identitäten 7) nur das vierte und fünfte Glied übrig. Es ergibt sich so die Bedingung

$$2\, l_1 l_2 \left(\frac{l_2 - l_1}{r}\right) (\sin\theta\, t' - \cos\theta\, t^2) = 0$$

oder, da $l_1 l_2$, $l_2 - l_1$ nicht verschwinden sollen, und auch (wegen $\cos\theta = rc$) r einen endlichen Wert hat,

$$\text{II} \qquad \frac{dt}{ds} \sin\theta = t^2 \cos\theta.$$

Durch die Gleichung II ist die Aufgabe gelöst, sämtliche Paare C_1, C_2 zu finden, für die in korrespondierenden Punkten P_1, P_2 die Krümmungshalbmesser in demselben konstanten Verhältnis stehen wie die Bogenelemente. r bleibt dabei willkürlich, während t aus II, τ aus 5) gefunden wird, so daß die natürlichen Gleichungen der Mittelkurve bekannt sind.

Die weitere Bedingung, daß die Torsionsradien T_1, T_2 der Kurven C_1 und C_2 ebenfalls im Verhältnis $l_1 : l_2$ stehen sollen, wird jetzt durch die Gleichung

$$\gamma) \quad \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^6 \frac{l_2^3}{r_1^2 T_1} \pm \left(\frac{ds_2}{ds}\right)^6 \frac{l_1^3}{r_2^2 T_2} = \left(\frac{ds_2}{ds}\right)^6 \frac{l_1^5}{l_2^3 r_1^2} \left(\frac{l_1}{T_1} \pm \frac{l_2}{T_2}\right) = 0$$

ausgedrückt, und liefert, je nachdem dabei l_1, l_2 von gleichem oder ungleichem Zeichen sind, den einen oder anderen Fall der Ähnlichkeit von C_1 und C_2.

Setzt man nun nach 3)

$$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 \frac{d^2 x_1}{ds^2} + \frac{d^2 s_1}{ds^2} \frac{dx_1}{ds} = -\alpha \frac{l_1 t}{r} \sin\theta$$

$$+ \xi \left(\frac{(1 - l_1 c)}{r} - l_1 t^2 \cos\theta + l_1 t' \sin\theta\right) - \lambda (l_1 t^2 \sin\theta + l_1 t' \cos\theta),$$

und führt den Wert von t' aus II ein, so folgt

$$8)\quad \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 \frac{d^2 x_1}{ds^2} + \frac{d^2 s_1}{ds^2}\frac{dx_1}{ds} = -a l_1 t \frac{\sin\theta}{r} + \xi\frac{(1-l_1 c)}{r} - \lambda \frac{l_1 t^2}{\sin\theta}.$$[1]

Ich setze nun zur Abkürzung

$$A = \frac{t}{r}\sin\theta$$

$$B = \frac{1}{r}$$

$$C = \frac{t^2}{\sin\theta},$$

dann liefert die Differentiation nach s von 8)

$$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^3 \frac{d^3 x_1}{ds^3} + 3\frac{ds_1}{ds}\frac{d^2 s_1}{ds^2}\frac{d^2 x_1}{ds^2} + \frac{d^3 s_1}{ds^3}\frac{dx_1}{ds}$$

$$= -\xi l_1 A - a l A' - \left(\frac{a}{r} + \frac{\lambda}{\tau}\right) B(1-l_1 c) + B'\xi(1-l_1 c) - \xi\frac{l_1 C}{\tau} - \lambda l_1 C'.$$

Aus diesen Gleichungen findet man T_1 vermöge der folgenden Gleichung

$$9)\quad \frac{-\left(\dfrac{ds_1}{ds}\right)^6}{r_1^2 T_1} = \begin{vmatrix} 1-l_1 c & l_1 t\sin\theta & -l_1 t\cos\theta \\ -A l_1 & (1-l_1 c)B & -l_1 C \\ -l_1 A' - \dfrac{B}{r}(1-l_1 c) & -l_1 A + B'(1-l_1 c) - \dfrac{lC}{\tau} & -B\dfrac{1-l_1 c}{\tau} - lC' \end{vmatrix}.$$

Die Ausführung der Determinante ergibt, wenn für $1 - l_1 c$ wieder k_1 gesetzt wird, für die rechte Seite von 9)

$$-k_1^3\frac{B^2}{\tau} + l_1^3\left(A' t C\sin\theta - t A C'\sin\theta - A^2 B t\cos\theta - t\frac{CA}{\tau}\cos\theta\right)$$
$$+ l_1 k_1^2(-C'B - B^3 t\cos\theta + cB')$$
$$+ l_1^2 k_1\left(-BA\frac{t}{\tau}\sin\theta - A'Bt\cos\theta + B^2 C t\sin\theta - ABC\right.$$
$$\left. + tB'A\cos\theta - \frac{C^2}{\tau}\right).$$

---

[1] Hier ist $\theta \mp 0$ vorausgesetzt. Ist $\theta = 0$, so ist nach II auch $t = 0$, was auf einen trivialen Fall führt.

Unter Benutzung des unteren Zeichens in der Bedingung γ) verschwinden nun alle Glieder der zu bildenden Differenz nach 7) bis auf das erste und letzte, und zufolge der Identitäten

$$l_2^3 k_1^3 - l_1^3 k_2^3 = (l_2 - l_1)\, l_2^2 k_1^2$$
$$l_1^2 l_2^3 k_1 - l_1^3 l_2^2 k_2 = (l_2 - l_1)\, l_1^2 l_2^2$$

bleibt die Bedingung

$$\text{III} \qquad -k_1^2 \frac{B^2}{\tau} + l_1^2 \left(- BAt \frac{\sin\theta}{\tau} - A'Bt\cos\theta + B^2 Ct \sin\theta - ABC + tB'A\cos\theta - \frac{C^2}{\tau} \right) = 0.$$

Der Koeffizient von l_1^2 läßt sich auf eine einfachere Form bringen, wenn man die Differentiationen nach s in Bezug auf A, B, C ausführt und die Gleichungen 5) und II beachtet; er nimmt dann die Form

$$-\frac{t^2}{\tau}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{t^2}{\sin^2\theta}\right)$$

an, wodurch die Bedingung III in

$$-\left[\frac{k_1^2}{r^2} + t^2 l_1^2 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{t^2}{\sin^2\theta}\right)\right]\frac{1}{\tau} = 0$$

übergeht. Diese Gleichung ist, da der Fall $r = \infty$, $t = 0$, wo die Mittelkurve eine gerade Linie sein muß, bereits oben als trivial ausgeschlossen wurde,[1]) für reelle Werte nur lösbar durch die Annahme $\tau = \infty$. Es ergibt sich also:

Wird die Bedingung der Ähnlichkeit für das untere Zeichen in der Gleichung γ gestellt, so muß die Mittelkurve Γ eine ebene Kurve sein.

Aus den Bedingungen

$$\frac{t'}{t^2} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \quad \cos\theta = rc, \quad t = -\theta' = -\frac{d\theta}{ds}$$

folgt jetzt

---

[1]) In diesem Falle ist übrigens nur direkte Kongruenz möglich.

$$\theta'' \sin\theta + \theta'^2 \cos\theta = 0$$

oder

$$\sin\theta\,\theta' = \text{const} = -c_1$$

$$\cos\theta = c_1 s + c_2.$$

Die Mittelkurve hat daher die Gleichung

$$r = \frac{1}{C}(c_1 s + c_2).$$

Unter den angegebenen Voraussetzungen über die Gleichung γ) gilt daher der Satz:

Ist die Mittelkurve eines Paares ähnlicher Kurven eben, so ist sie eine logarithmische Spirale.[1])

Damit sind auch die Kurven C und C_1 selbst gefunden; da die Lösung von l_1 und l_2 ganz unabhängig ist, erhält man ∞^1 solcher Paare. Ganz andere Resultate ergeben sich, wenn man in der Bedingung γ) das obere Zeichen nimmt. Hier verschwinden in der mit Benutzung von 9) zu bildenden Summe das erste und letzte Glied.

Setzt man

$$Q = -C'B - B^3 t \cos\theta + CB'$$

$$P = CA't \sin\theta - tAC' \sin\theta - A^2 Bt \cos\theta - \frac{tCA}{\tau}\cos\theta,$$

so ist die Bedingung

$$2 l_1^3 l_2^3 P + l_1 l_2 (l_2^2 k_1^2 + l_1^2 k_2^2) Q = 0$$

oder

$$l_1^2 P + k_1^2 Q = 0$$

zu erfüllen.

Führt man die Differentiationen in Q, P aus und beachtet die Gleichung II, so ergibt sich nach einiger Rechnung

[1]) Selbstverständlich kann hier, wie auch in anderen ähnlichen Fällen die logarithmische Spirale nicht in ihrer ganzen Ausdehnung in Betracht kommen, da $rc < 1$ sein muß. Andererseits ist auch der Spezialfall von Kreisen in parallelen Ebenen, p. 52 Anm. hierin mitenthalten.

$$P = t^2 \sin^2\theta \left(-\frac{C'}{r} + \frac{t^2}{\sin\theta} \frac{d\frac{1}{r}}{ds} - \cos\theta \frac{t}{r^3} \right)$$

$$Q = -\frac{C'}{r} - t\frac{\cos\theta}{r^3} + \frac{t^2}{\sin\theta} \frac{d\frac{1}{r}}{ds}.$$

Demnach erhält man

$$(k_1^2 + l_1^2 \sin^2\theta\, t^2) \left(\frac{C'}{r} + t\frac{\cos\theta}{r^3} - \frac{t^2}{\sin\theta} \frac{d\frac{1}{r}}{ds} \right) = 0.$$

Hieraus folgt, da der erste Faktor unter den bereits angegebenen Voraussetzungen nicht verschwindet,

$$-\frac{C'}{r} - \cos\theta \frac{t}{r^3} + \frac{t^2}{\sin\theta} \frac{d\frac{1}{r}}{ds} = 0.$$

Da nun

$$C' = 2\frac{t\,t'}{\sin\theta} - t^2 \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \left(\frac{1}{\tau} - t \right),$$

so wird nach II)

$$C' = 3\,t^3 \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} - \frac{t^2}{\tau} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

und man erhält die Bedingung

$$\text{IV} \qquad -3\frac{t^3}{r}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{t^2}{r\tau}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} - t\frac{\cos\theta}{r^3} + \frac{t^2}{\sin\theta}\frac{d\frac{1}{r}}{ds} = 0.$$

Diese Gleichung ist zugleich mit den Bedingungen

$$t' \sin\theta = t^2 \cos\theta, \qquad \cos\theta = r\,c,$$

$$t = \frac{1}{\tau} - \theta',$$

zu integrieren; man hat also vier Gleichungen für θ, t, τ, r.

Diese Bedingungen sind zunächst erfüllt für $t = 0$. Dann aber bilden die durch die Kurve Γ hindurchgehenden Normalen eine Developpabele, und da aus

$$-\theta' \sin\theta = \frac{dr}{ds}$$

folgt

$$\frac{1}{\tau} + \frac{dr}{ds}\,\frac{c}{\sqrt{1 - r^2c^2}} = 0,$$

so ist Γ eine sphärische Kurve, wie übrigens auch schon daraus hervorgeht, daß durch Abtragen der Strecke $\frac{1}{c}$ auf den Normalen von Γ die Koordinaten des Endpunktes einen konstanten Wert erhalten, wie aus 3) unmittelbar hervorgeht, wenn man

$$l_1 = \frac{1}{c}, \quad q = l_1 t = 0$$

setzt. Es handelt sich also jetzt um ein Kurvenpaar C, C_1 mit einem Ähnlichkeitspunkte, der mit dem oben angegebenen Punkte zusammenfällt.

Die von dem Faktor t befreite Gleichung IV

$$\text{IV}^a \qquad -3\,\frac{t^2\cos\theta}{r\sin^2\theta} + \frac{t\cos\theta}{r\tau\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{r^3} + \frac{t}{\sin\theta}\,\frac{d\frac{1}{r}}{ds} = 0$$

bleibt daher noch zu untersuchen. Wir suchen zunächst eine Gleichung für t zu bilden. Setzt man

$$\cos\theta = rc, \quad t = \frac{1}{\tau} - \theta', \quad t^2 rc = t'\sqrt{1 - r^2c^2}$$

$$\theta' = \frac{d\theta}{ds} = -\frac{dr}{ds}\,\frac{c}{\sqrt{1 - r^2c^2}}.$$

und führt diese Gleichungen in IV^a ein, so ergibt sich nach einigen Umformungen

$$-\frac{2ct^2}{1 - r^2c^2} - \frac{c}{r^2} - \frac{t}{r^2\sqrt{1 - r^2c^2}}\,\frac{dr}{ds}\,\frac{1}{1 - r^2c^2} = 0$$

oder, da $1 = r^2c^2$ wieder nur auf einen trivialen Fall zurückführt,

$$10)\qquad 2ct^2 + \frac{c}{r^2}(1 - r^2c^2) + \frac{t}{2r^3}\frac{dr^2}{ds}\frac{1}{\sqrt{1 - r^2c^2}} = 0.$$

Nun ist nach II

$$t^2 \cos\theta = t' \sin\theta$$
$$t^4 r^2 c^2 = t'^2 (1 - r^2 c^2).$$

Hieraus folgt

$$r^2 c^2 = \frac{t'^2}{t^4 + t'^2}, \quad 1 - r^2 c^2 = \frac{t^4}{t^4 + t'^2}, \quad \frac{r}{\sqrt{1 - r^2c^2}} = \pm \frac{t'}{c\,t^2}$$

$$\frac{c^2}{2}\frac{dr^2}{ds} = \frac{t' t^3 (t t'' - 2t'^2)}{(t^4 + t'^2)^2},$$

somit wird aus 10)

$$2ct^2 + c^3 \frac{t^4}{t'^2} \pm \frac{c\,t^2}{t'^2}(t t'' - 2t'^2) = 0.$$

Nimmt man das o b e r e Vorzeichen, so folgt, wenn man wieder von $c = 0$ absieht,

$$11)\qquad c^2 t + t'' = 0.$$

Für das untere Vorzeichen folgt dagegen

$$12)\qquad 4t^2 + c^2 \frac{t^4}{t'^2} - \frac{t t''}{t'^2} = 0.$$

Die Integration von 11) ist bekannt. Um auch die Gleichung 12) zu integrieren, setze man

$$\frac{t'}{t} = z, \quad \frac{t''}{t} - \frac{t'^2}{t^2} = \frac{dz}{ds},$$

so daß 12) übergeht in

$$\frac{dz}{ds} = 3z^2 + c^2.$$

Hieraus folgt

$$z = \frac{c}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}(sc\sqrt{3} + c_1)$$

oder

$$t = \frac{\text{const.}}{(\cos sc\sqrt{3} + c_1)^{1/3}}.$$

Wie man sieht, gehören auch hier zu jeder Kurve Γ dieser Arten, die nun durch ihre von s abhängigen Krümmungs- und Torsionsradien völlig definiert sind, da l_1 und l_2 dabei nicht auftreten, ∞^1 viele zueinander ähnliche Kurvenpaare.

Welcher Art nun diese Kurven Γ sind, würde noch einer näheren Untersuchung bedürfen, auf die ich nicht eingehe. Sie sind übrigens wirkliche Raumkurven. Dies würde sich schon aus dem Umstande folgen lassen, daß r, θ, t sonst vier Gleichungen genügen müssen; übrigens auch durch die Bemerkung, daß für $\tau = \infty$ die Gleichung IV[a]

$$\frac{3\cos\theta}{r\sin^2\theta}t^2 + \frac{\cos\theta}{r^3} + \frac{t}{r^2\sin\theta}\frac{dr}{ds} = 0,$$

wenn man zugleich

$$t = -\theta', \quad c\frac{dr}{ds} = -\sin\theta\,\theta' = t\sin\theta$$

setzt, übergeht in

$$c^2\left(\frac{3t^2}{\sin^2\theta} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{t^2}{r^2} = 0,$$

die für reelle Werte nicht erfüllt werden kann, wenn man von $t = 0$, $c = 0$ absieht.

Der im vorigen ausgeschlossene Fall

$$c = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

läßt sich leichter direkt behandeln. Dann ist

$$l_1 + l_2 = 0, \quad \frac{ds_1}{ds} \text{ und } \frac{ds_2}{ds}$$

werden einander gleich. Es folgt zunächst, daß τ eine konstante sein muß, wenn auch die Krümmungsradien von C_1 und C_2 gleich sein sollen. Soll dasselbe auch für die Torsionsradien gelten, so muß auch r eine Konstante sein; Γ wird eine gemeine Schraubenlinie, und C_1, C_2 werden selbst kongruente gemeine Schraubenlinien. Sollen dagegen die Torsionsradien

entgegengesetzt gleich sein, so muß entweder $\tau = \infty$ sein, — dies ist ein trivialer Fall, denn c_1, c_2 sind dann kongruente Kurven in parallelen Ebenen — oder I muß eine imaginäre gemeine Schraubenlinie sein.

Als Resultat ergibt sich also:

Es gibt ähnliche nicht kongruente Kurvenpaare C_1, C_2 — abgesehen von trivialen Fällen — nur unter den folgenden wesentlich verschiedenen Umständen.

Erstens: Die Kurven C_1, C_2 sind perspektiv ähnliche sphärische Kurven; sie werden durch Kugeln, deren Mittelpunkt die Spitze eines willkürlichen Kegels ist, ausgeschnitten. Sie sind Kreise, wenn sie eben sind.

Zweitens: Die „Mittelkurve“ Γ ist eine logarithmische Spirale; C_1 und C_2 sind Raumkurven.

Drittens: Die „Mittelkurve“ ist eine Raumkurve, deren Krümmung und Torsion in komplizierterer Weise von der Bogenlänge abhängt.

In allen diesen Fällen aber gibt es zu ein und derselben Bewegung der gemeinsamen Normalen unendlich viele Paare ähnlicher Kurven.

Die einzigen ebenen zu einander ähnlichen Kurvenpaare C, C_1 lassen sich übrigens auch aus den Gleichungen des § 1 ermitteln.

Aus den Gleichungen

$$a^2 = \left(1 - \frac{k \cos \sigma}{r}\right)^2 + k^2 \sigma'^2, \tag{13}$$

$$\sin \sigma + \sin \sigma_1 = r\,\Omega, \tag{14}$$

$$a \frac{d\sigma_1}{ds} = \frac{d\sigma}{ds}, \tag{15}$$

$$r(a^2 - 1) = (a \cos \sigma_1 - \cos \sigma)\,k, \tag{16}$$

in denen a eine positive Konstante bedeuten mag, da der Charakter der Windung nicht in Betracht kommt.

Ist nun $q = -k\sigma'$ nicht Null, so wird

$$17)\qquad \Omega = \frac{1}{q}\frac{dp}{ds} = -\left(\frac{\sin\sigma}{r} - \frac{\cos\sigma}{\sigma'}\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\right).$$

Durch Differentiation von 16) nach σ aber folgt

$$\frac{dr}{ds}(a^2-1) = k\left(\sin\sigma - a\sin\sigma_1\frac{d\sigma_1}{ds}\right)$$

oder wenn man aus 15) den Wert von $\frac{d\theta}{ds}$ einsetzt

$$18)\qquad \frac{dr}{ds}(a^2-1) = \sigma' k(\sin\sigma - \sin\sigma_1).$$

Dagegen folgt aus 14) und 17)

$$2\sin\sigma + \sin\sigma_1 = -\frac{\cos\sigma}{\sigma' r}\frac{dr}{ds}.$$

Setzt man hier aus 18) den Wert von $\frac{dr}{ds}$ und aus 16) den Wert von r ein, so folgt

$$(\sin\sigma_1 + 2\sin\sigma)(a\cos\sigma_1 - \cos\sigma) + \cos\sigma(\sin\sigma - \sin\sigma_1 = 0$$

oder

$$a\cos\sigma_1(\sin\sigma_1 + 2\sin\sigma) = \cos\sigma(\sin o + 2\sin\sigma_1).$$

In dieser Gleichung ist nach 15) noch

$$\sigma_1 = \frac{\sigma + c}{a}$$

zu setzen, so daß schließlich entsteht

$$a\cos\frac{(\sigma+c)}{a}\left(\sin\frac{(\sigma+c)}{a} + 2\sin\sigma\right) = \cos\sigma\left(\sin\sigma + 2\sin\frac{(\sigma+c)}{a}\right).$$

Aber diese Gleichung liefert, wie man durch Reihenentwicklung erkennt, so lange a einen willkürlichen Wert hat, einen konstanten Wert für σ, so daß die Annahme $\sigma' \neq 0$ nicht zulässig ist, ausgenommen in dem Falle $a = 1$, wo zugleich $c = 0$ zu nehmen ist. Dann entsteht aber nur Kongruenz.

Setzt man aber $\sigma' = 0$ voraus, so wird nach 13) r konstant. Die einzigen ebenen Paare ähnlicher Kurven $a \neq 1$ werden daher von Kreisen in parallelen Ebenen gebildet, während es für $a = 1$, wie in § 6 gezeigt, unendlich viele Paare kongruenter ebener Kurven gibt; der Fall der Kongruenz nimmt eine ausgezeichnete Stellung der Ähnlichkeit gegenüber ein.

§ 12.

Umformung der Gleichungen des § 1.

Die Gleichungen des § 1 sind in ihrer ursprünglichen Form zu einer weiteren Verwendung oft weniger geeignet. Man kann sie in eine übersichtlichere Gestalt durch die folgende Transformation bringen, die weiterhin mehrfach benutzt werden soll.

Da $S^2 = p^2 + q^2$ ist, so kann man

$$p = S \sin\lambda$$
$$q = S \cos\lambda$$

setzen, so daß, falls $\sin\lambda$ verschwindet, die Kurven des Paares sich unter rechtem Winkel zu schneiden scheinen, während für $\cos\lambda = 0$ ihre gemeinsamen Normalen eine Developpabele bilden.

Man hat nun nach § 1, II

$$\Omega = \frac{d\lambda}{ds}.$$

Mit Hülfe der Gleichungen

$$k\frac{\cos\sigma_1}{r_1} = 1 - \frac{\sin\lambda}{S}, \quad k\frac{\cos\sigma}{r} = 1 - S\sin\lambda$$

geht die Gleichung § 1, IV

$$S\frac{\sin\sigma_1}{r_1} + \frac{\sin\sigma}{r} = \frac{d\lambda}{ds} \tag{1}$$

über in

$$\operatorname{tg}\sigma_1 (S - \sin\lambda) + \operatorname{tg}\sigma (1 - S\sin\lambda) = k\frac{d\lambda}{ds}. \tag{2}$$

Führt man also s als unabhängige Variabele ein, so hat man das folgende System von Gleichungen, welches mit 2) die Kurven eines Paares völlig charakterisiert:

$$
3)\qquad
\begin{aligned}
\frac{k\cos\sigma}{r} &= 1 - S\sin\lambda\\
\frac{k}{T} &= S\cos\lambda + k\frac{d\sigma}{ds}\\
\frac{k\cos\sigma_1}{r_1} &= 1 - \frac{\sin\lambda}{S}\\
\frac{k}{T_1} &= \frac{\cos\lambda + k\frac{d\sigma_1}{ds}}{S}.
\end{aligned}
$$

Nimmt man σ, σ_1, S als Funktionen von s willkürlich an, so führt 2) auf eine Riccatische Gleichung für λ; die zugehörigen Werte von r, r_1, T, T_1 findet man dann aus den Gleichungen 3); doch ist zu beachten, daß S, r, r_1 als positive Größen definiert sind.

Nimmt man dagegen $\sigma, \sigma_1, \lambda$ als Funktionen von s an, so bestimmt 2) die Funktion S, so daß nun alle Größen durch bloße Elimination bestimmt werden können, und — soweit r, r_1, S positiv ausfallen — die natürlichen Gleichungen der Kurven C und C_1 liefern.

Die Gleichung 2) läßt sich in der folgenden Weise transformieren. Setzt man nach 3)

$$
\begin{aligned}
\frac{k}{T} - k\frac{d\sigma}{ds} &= S\cos\lambda\\
\frac{Sk}{T} - k\frac{d\sigma_1}{ds} &= \cos\lambda,
\end{aligned}
$$

multipliziert man 2) mit $\cos\lambda$ und ersetzt $S\cos\lambda$, $\cos\lambda$ durch die eben angegebenen Ausdrücke, so folgt

$$
\frac{d\sin\lambda}{ds} - \sin\lambda\left(\operatorname{tg}\sigma_1\frac{d\sigma_1}{ds} + \operatorname{tg}\sigma\frac{d\sigma}{ds}\right) + \operatorname{tg}\sigma_1\frac{d\sigma}{ds} + \operatorname{tg}\sigma\frac{d\sigma_1}{ds}
$$
$$
+ (\operatorname{tg}\sigma_1 - \sin\lambda\operatorname{tg}\sigma)\frac{1}{T} + (\operatorname{tg}\sigma - \sin\lambda\operatorname{tg}\sigma_1)\frac{1}{T_1} = 0;
$$

multipliziert man diese Gleichung mit $\cos\sigma.\ \cos\sigma_1$, so folgt

$$d(\sin\lambda\cos\sigma\cos\sigma_1+\sin\sigma\sin\sigma_1)$$
$$+\cos\sigma\cos\sigma_1\left(ds\frac{(\operatorname{tg}\sigma_1-\sin\lambda\operatorname{tg}\sigma)}{T}+\frac{ds_1}{T_1}(\operatorname{tg}\sigma-\sin\lambda\operatorname{tg}\sigma_1)\right)=0$$

oder durch Integration nach s, da nach § 2 S. 13

$$\sin\lambda\cos\sigma\cos\sigma_1+\sin\sigma\sin\sigma_1=-\cos(b\,b_1)$$
$$(\operatorname{tg}\sigma_1-\sin\lambda\operatorname{tg}\sigma)\cos\sigma_1\cos\sigma=-\cos(h\,b_1)$$
$$(\operatorname{tg}\sigma-\sin\lambda\operatorname{tg}\sigma_1)\cos\sigma_1\cos\sigma=-\cos(h_1\,b)$$

$$4)\qquad \cos(b\,b_1)+\int\frac{ds}{T}\cos(h\,b_1)+\int\frac{ds_1}{T_1}\cos(h_1\,b)=\text{const.}$$

Sind die beiden Kurven C, C_1 eben, so entsteht der selbstverständliche Satz $\cos(b\,b_1)=\text{const.}$ Aber $\cos(b\,b_1)$, d. h. der Winkel zwischen den Binormalen des Paares, ist auch dann eine Konstante, wenn

$$5)\qquad \frac{1}{T}(\operatorname{tg}\sigma_1-\sin\lambda\operatorname{tg}\sigma)+\frac{S}{T_1}\operatorname{tg}\sigma-\sin\lambda\operatorname{tg}\sigma_1)=0.$$

Damit dieser Fall eintrete, müssen die Gleichungen 3), 5) und

$$6)\qquad \sin\lambda\cos\sigma\cos\sigma_1+\sin\sigma\sin\theta=c$$

bestehen; an die Stelle von 5) kann natürlich auch 1) oder 2) treten. Man hat demnach 6 Gleichungen zwischen S, λ, r, r_1, σ, σ_1, T, T_1; vorausgesetzt ist dabei, daß $\cos\lambda$, $\cos\sigma$, $\cos\sigma_1$ nicht Null sind, und r, r_1, S positive Werte erhalten. Nimmt man z. B. σ, σ_1 willkürlich an, so kann man aus 6) λ entnehmen, aus den Gleichungen 2) und 3) ergeben sich die übrigen Größen. Damit ist im allgemeinen die Aufgabe gelöst:

Die Charaktere derjenigen Paare zu bestimmen, bei denen die Schmiegungsebenen einen konstanten (gegebenen) Winkel miteinander bilden.

Fügt man jetzt die Annahme hinzu, daß $\sigma=0,\ \pi$, d. h. daß die gemeinsame Normale Hauptnormale von C sei, so hat man aus 3)

$$\pm \frac{k}{r} = 1 - S \sin \lambda, \quad \frac{\cos \sigma_1}{r_1} = \frac{S - \sin \lambda}{S}$$

$$0 = \frac{1}{T} - \frac{S \cos \lambda}{k}, \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{S}{T_1} - \frac{\cos \lambda}{k}$$

und aus 5), 6)

$$\operatorname{tg} \theta \left(\frac{1}{T} - S \frac{\sin \lambda}{T_1} \right) = 0$$

$$\sin \lambda \cos \theta = c.$$

Es ist daher entweder auch $\operatorname{tg} \theta = 0$, d. h. die Kurven bilden ein Bertrandsches Paar; wie man aus der letzten Gleichung sieht, wird dann auch λ eine Konstante.

Oder es muß

$$\frac{1}{\tau} - \frac{\sin \lambda}{\tau_1} = 0$$

sein, und man kann θ noch willkürlich annehmen. Die Annahme von $\sigma = 0$ nebst der Bedingung eines konstanten Winkels der Schmiegungsebenen charakterisiert daher keineswegs die Bertrandschen Kurven, sondern führt außerdem auf die soeben angegebene, von einer willkürlichen Funktion abhängige Klasse von Kurvenpaaren.

Wir machen jetzt die Annahme, daß λ und $\cos(b b_1)$ konstant sei, d. h. daß sich die Kurven des Paares unter konstantem Winkel schneiden, und ihre Schmiegungsebenen ebenfalls einen konstanten Winkel miteinander bilden.

Differentiiert man jetzt die Gleichung 6), so folgt

$$0 = \sin \lambda \left(- \sin \sigma \cos \sigma_1 \frac{d\sigma}{ds} - \cos \sigma \sin \sigma_1 \frac{d\sigma_1}{ds} \right)$$
$$+ \cos \sigma \sin \sigma_1 \frac{d\sigma}{ds} + \sin \sigma \cos \sigma_1 \frac{d\sigma_1}{ds}.$$

Ersetzt man hier $\cos \sigma$, $\cos \sigma_1$ durch ihre Werte aus den Gleichungen 3), dividiert durch r, r_1, beachtet man ferner die Gleichung 1)

$$\frac{\sin\sigma_1}{r_1} = -\frac{\sin\sigma}{r}\frac{1}{S},$$

so ergibt sich nach einigen Reduktionen

$$\cos^2\lambda\,\frac{\sin\sigma}{r}\left(\frac{d\sigma}{ds}\frac{1}{S} - \frac{d\sigma_1}{ds}\right) = 0.$$

Sieht man von der trivialen, schon vorhin ausgeschlossenen Möglichkeit $\cos\lambda = 0$ ab, so muß entweder $\sin\sigma = 0$, $\sin\sigma_1 = 0$ sein; man hat also wieder ein Bertrandsches Paar.

Oder es muß

$$7)\qquad \frac{d\sigma}{ds} - \frac{d\sigma_1}{ds}S = 0$$

sein. Diese Gleichung liefert aber nach 3)

$$7')\qquad S^2 = \frac{T_1}{T};$$

d. h. die Torsionsradien stehen im Verhältnisse des Quadrats der Bogenelemente, die Kurven sind in gleichem Sinne gewunden.

Die Gleichung 6) ist aber, wenn man die Konstante c nicht als gegeben ansieht, eine Folge der vier Gleichungen 3) der Gleichungen 7') und der Gleichung 1) oder

$$8)\qquad \operatorname{tg}\sigma_1(S - \sin\lambda) + \operatorname{tg}\sigma(1 - S\sin\lambda) = 0,$$

so daß wieder nur sechs Gleichungen zur Bestimmung der 7 Unbekannten σ, σ_1, r, r_1, T, T_1, S vorhanden sind.

Das heißt:

Die Annahme, daß die Kurven eines Paares sich unter konstantem Winkel schneiden und zugleich ihre Schmiegungsebenen einen konstanten Winkel miteinander bilden, ergibt außer den Bertrandschen Paaren noch eine weitere von einer willkürlichen Funktion abhängige Klasse von Paaren.

Wird hier endlich die Bedingung hinzugefügt, daß σ konstant sei, so ist auch σ_1 nach 7) eine Konstante. Damit wird

aber nach 8) auch S konstant, und aus 3) folgen nun noch für r, r_1, T, T_1 konstante Werte; man erhält also nur gemeine Schraubenlinien. Der Ausdruck für S

$$S = \frac{\operatorname{tg}\sigma_1 \sin\lambda - \operatorname{tg}\sigma}{\operatorname{tg}\sigma_1 - \operatorname{tg}\sigma\sin\lambda}$$

ist z. B. sicher positiv für

$$0 < \sigma_1 < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \lambda < \pi,$$

wenn σ negativ, aber seinem absoluten Werte nach $< \frac{\pi}{2}$ ist.

Alsdann werden

$$1 - S\sin\lambda = \frac{\operatorname{tg}\sigma_1 \cos^2\lambda}{\operatorname{tg}\sigma_1 - \operatorname{tg}\sigma\sin\lambda}$$

$$1 - \frac{\sin\lambda}{S} = - \frac{\operatorname{tg}\sigma\cos\lambda}{\operatorname{tg}\sigma_1\sin\lambda - \operatorname{tg}\sigma},$$

positiv, so daß auch r, r_1 positive Werte erhalten. Wie man sieht, sind noch zahlreiche weitere Annahmen möglich. Ich erwähne, um nicht zu weitläufig zu werden, nur noch den Fall $S = 1$, wo

$$\frac{k\frac{d\lambda}{ds}}{1 - \sin\lambda} = \operatorname{tg}\sigma + \operatorname{tg}\sigma_1,$$

also λ durch eine einfache Quadratur aus den angenommenen Werten von σ und σ_1 bestimmt wird. Es ist dann

$$\frac{\cos\sigma}{r} = \frac{\cos\sigma_1}{r_1} = \frac{1 - \sin\lambda}{k}$$

$$\frac{k}{T} = \cos\lambda + k\frac{d\sigma}{ds}, \quad \frac{k}{T_1} = \cos\lambda + k\frac{d\sigma_1}{ds}.$$

Wählt man hier $\sigma = \sigma_1$, so erhält man alle Paare kongruenter Kurven, bei denen λ nicht konstant ist (vgl. § 6 S. 29). Wählt man dagegen $\sigma = -\sigma_1$, so entstehen Kurvenpaare, welche für entsprechende Punkte sich unter konstantem Winkel zu schneiden scheinen, gleiche Krümmungshalbmesser haben, und für die (vgl. übrigens § 7)

$$\frac{1}{T}+\frac{1}{T_1}=\frac{2\cos\lambda}{k}$$

also das arithmetische Mittel der Torsionen konstant ist.

Unter dieser letzten Annahme kann auch die eine Kurve, etwa C, eben sein. Setzt man dementsprechend

$$k\frac{d\sigma}{ds}+\cos\lambda=0,$$

so folgt

$$\sigma=-\left(\frac{\cos\lambda}{k}s+c_1\right).$$

Daraus ergibt sich

$$r=\frac{k}{1-\sin\lambda}\cos\left(\frac{s\cos\lambda}{k}+c_1\right).$$

eine vielfach betrachtete Kurvengattung, mit welcher also eine Raumkurve gleichen Bogenelements, gleichen Krümmungshalbmessers und konstanter Torsion ein sich unter konstantem Winkel schneidendes Paar bildet.

§ 13.

Kurvenpaare, die sich unter konstantem Winkel schneiden.

Ist $\lambda=$ const. so folgt aus den Gleichungen des § 12

$$S=-\frac{\operatorname{tg}\sigma-\operatorname{tg}\sigma_1\sin\lambda}{\operatorname{tg}\sigma_1-\operatorname{tg}\sigma\sin\lambda}\,^{1)}$$

$$\frac{k\cos\sigma}{r}=\frac{\operatorname{tg}\sigma_1\cos^2\lambda}{\operatorname{tg}\sigma_1-\operatorname{tg}\sigma\sin\lambda}$$

$$\frac{k\cos\sigma_1}{r_1}=\frac{\operatorname{tg}\sigma\cos^2\lambda}{\operatorname{tg}\sigma-\operatorname{tg}\sigma_1\sin\lambda}$$

$$\frac{k}{T}=S\cos\lambda+k\frac{d\sigma}{ds}$$

$$S\frac{k}{T_1}=\cos\lambda+k\frac{d\sigma_1}{ds}.$$

[1]) Ist $\operatorname{tg}\sigma=0$, $\operatorname{tg}\sigma_1=0$, so erscheint S unter der Form $\frac{0}{0}$. Man erhält dann z. B. für

$\sigma=0,\quad \sigma_1=0,\quad TT_1\cos^2\lambda=k^2,\quad \frac{k}{r}+\frac{k}{T}\operatorname{tg}\lambda=1,\quad \frac{k}{r_1}+\frac{k}{T_1}\operatorname{tg}\lambda=1,$

also die Bertrandschen Paare.

Nimmt man σ und σ_1 willkürlich als Funktionen von s an, so sind r, r_1, S, T, T_1 also die natürlichen Gleichungen der Kurven des Paares völlig bestimmt. Bezeichnet man die Kontingenzwinkel der Schmiegungsebenen der Kurven mit $d\eta$, $d\eta_1$, so geben die beiden letzten Gleichungen durch Integration

$$1)\qquad k(\eta - \sigma) = s_1 \cos\lambda + \text{const}$$

$$2)\qquad k(\eta_1 - \sigma_1) = s \cos\lambda + \text{const},$$

so daß die Winkeldifferenz $\eta - \sigma$ für die Kurve C eine lineare ganze Funktion der Bogenlänge der Kurve C_1 wird.

Verlangt man insbesondere, daß C und C_1 ebene Kurven sind, so tritt zu den Gleichungen noch hinzu

$$3)\qquad \sin\sigma \sin\sigma_1 + \sin\lambda \cos\sigma \cos\sigma_1 = \text{const} = c_1.$$

Man findet dann aus 2), wo $\eta_1 = 0$ zu setzen ist, σ_1 als Funktion von s, aus 3) σ als Funktion von s, womit denn auch r und r_1 als Funktionen von s bekannt sind. Hierdurch ist im allgemeinen die Aufgabe gelöst, alle ebenen Paare zu bestimmen, die sich unter konstantem Winkel schneiden.

Man erhält für $\sin\lambda = 0$, wo sich die ebenen Kurven unter rechtem Winkel zu schneiden scheinen, besonders einfache Beziehungen. So findet man z. B. aus 3) unmittelbar die folgende Beziehung zwischen den Krümmungshalbmessern in korrespondierenden Punkten aus 3)

$$c_1^2 = 1 - \frac{r^2 + r_1^2}{k^2} + \frac{r_1^2 r^2}{k^4}.$$

Zu einer vollständigen Behandlung dieses besonders interessanten Falls, die sich übrigens leicht an die vorigen Gleichungen anschließen läßt, kann man auch die Gleichungen des § 1 verwenden. Man hat nämlich, da $p = 0$,

$$\cos\sigma = \frac{r}{k}, \quad \cos\sigma_1 = \frac{r_1}{k}, \quad \Omega = 0, \quad S^2 = q^2 = k^2\sigma'^2,$$

$$4)\qquad S\frac{d\sigma_1}{ds} = \frac{d\sigma}{ds}, \quad \frac{\sin\sigma_1}{r_1} = -\frac{\sin\sigma}{rS}, \quad \frac{dS}{S\,ds} = \frac{\dfrac{d^2\sigma}{ds^2}}{\dfrac{d\sigma}{ds}}.$$

Deutet man die Differentiationen nach der Variabeln s durch einen oben angefügten Index an, so daß

$$\frac{d\sigma}{ds} = \sigma', \quad \frac{d^2\sigma}{ds^2} = \sigma'', \quad \frac{dr}{ds} = r',$$

so folgt wegen

$$5) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg}\sigma_1 &= -\frac{\operatorname{tg}\sigma}{S}, \quad \frac{1}{\cos^2\sigma_1} = \frac{k^2\sigma'^2 + \operatorname{tg}^2\sigma}{k^2\sigma'^2} \\ \frac{\sigma_1'}{\cos^2\sigma_1} &= -\frac{1}{\cos^2\sigma}\frac{\sigma'}{S} + \operatorname{tg}\sigma\frac{S'}{S^2} \end{aligned}$$

nach 4) und 5)

$$6) \quad \sigma'^2\left(1 + \frac{k^2}{r^2}\right) = \sigma''\operatorname{tg}\sigma - \frac{\operatorname{tg}^2\sigma}{k^2}.$$

Da nun nach 4) $-\sin\sigma\sigma' = \frac{r'}{k}$, so wird aus 6)

$$7) \quad \frac{r'^2}{k^2}\left(1 + \frac{k^2}{r^2}\right) = \sigma''\frac{\sin^3\sigma}{\cos\sigma} - \frac{\sin^4\sigma}{k^2\cos^2\sigma};$$

führt man hier vermöge der Gleichung

$$\sigma''\sin\sigma = -\frac{r''}{k} - \frac{rr'^2}{k^3\left(1 - \frac{r^2}{k^2}\right)}$$

den Wert von σ'' ein, und ersetzt $\sin^2\sigma$, $\cos^2\sigma$ durch ihre Werte

$$1 - \frac{r^2}{k^2}, \quad \frac{r^2}{k^2},$$

so ergibt sich die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung für r:

$$8) \quad r'^2\frac{\left(1 + 2\frac{r^2}{k^2}\right)}{1 - \frac{r^2}{k^2}} + rr'' + 1 - \frac{r^2}{k^2} = 0.$$

Setzt man

$$\frac{d(rr')}{ds} = rr'' + r'^2,$$

so geht sie über in

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 r^2}{ds^2} + 1 - \frac{r^2}{k^2} + 3 r'^2 \frac{\frac{r^2}{k^2}}{1 - \frac{r^2}{k^2}} = 0,$$

oder für

$$r^2 = \varrho, \quad r r' = \frac{1}{2}\frac{d\varrho}{ds},$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\varrho}{ds^2} + \frac{3}{4k^2}\frac{\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2}{1 - \frac{\varrho}{k^2}} + 1 - \frac{\varrho}{k^2} = 0.$$

Man integriert diese Gleichung durch Vertauschung der Variabeln. Setzt man

$$\frac{d\varrho}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{d\varrho}}, \quad \frac{d^2\varrho}{ds^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{1}{\left(\frac{ds}{d\varrho}\right)^2}\right),$$

so folgt

$$\frac{3}{4k^2}\frac{\frac{1}{\left(\frac{ds}{d\varrho}\right)^2}}{1 - \frac{\varrho}{k^2}} + 1 - \frac{\varrho}{k^2} + \frac{1}{4}\frac{d}{d\varrho}\frac{1}{\left(\frac{ds}{d\varrho}\right)^2} = 0;$$

für

$$\left(\frac{ds}{d\varrho}\right)^2 = \frac{1}{\lambda}$$

ergibt sich also die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{d\lambda}{d\varrho} + 4\left(1 - \frac{\varrho}{k}\right) + \frac{3}{k^2}\frac{\lambda}{1 - \frac{\varrho}{k^2}} = 0,$$

deren Lösung

$$\lambda = C\left(1 - \frac{\varrho}{k^2}\right)^3 - 4k^2\left(1 - \frac{\varrho}{k^2}\right)^2$$

mit der Integrationskonstanten C ist.

Demnach wird

$$8^{a}) \qquad ds = \frac{d\varrho}{\sqrt{C\left(1-\frac{\varrho}{k^2}\right)^3 - 4k^2\left(1-\frac{\varrho}{k^2}\right)^2}},$$

und dies ist die natürliche Gleichung der Kurve C, wenn man noch ϱ durch r^2 ersetzt. Setzt man

$$C\left(1-\frac{\varrho}{k^2}\right) - 4k^2 = \zeta^2,$$

so erhält man

$$s + c_1 = -k \operatorname{arctg} \frac{\zeta}{2k},$$

also

$$9) \qquad \frac{r^2}{k^2} = 1 - \frac{4k^2}{C} - \frac{4k^2}{C} \operatorname{tg}^2 \frac{(s+c_1)}{k}.$$

Ist nun C eine negative Konstante, so kann man

$$1 - \frac{4k^2}{C} = \frac{1}{\varepsilon^2}, \quad \varepsilon < 1$$

setzen. Dann erhält man aus 9)

$$9^{a}) \qquad r = \frac{k}{\varepsilon}\sqrt{1 + (1-\varepsilon^2)\operatorname{tg}^2 \frac{(s+c_1)}{k}};$$

ist dagegen C positiv, so muß die nach 9) positive Zahl

$$1 - \frac{4k^2}{C} = \varepsilon^2 < 1$$

sein, und man erhält

$$9^{b}) \qquad r = \frac{k}{\varepsilon}\sqrt{1 + (1-\varepsilon^2)\operatorname{tg}^2 \frac{(s+c_1)}{k}}.$$

Aber nur der Fall 9^{b}) kommt hier in Betracht. Denn nach § 2 ist der Cosinus des Winkels der Binormalen für $p = 0$ durch

$$\cos(bb_1) = \frac{r_1}{S}\left(\frac{1}{r} - \frac{\cos\sigma}{k}\right) = \frac{r_1}{rS}\sin^2\sigma$$

gegeben, wo r_1 den Krümmungshalbmesser der Kurve C_1 bedeutet, der nach § 1 IV[b] durch die Gleichung

$$\frac{S^2}{r_1^2} = \frac{S^2}{k^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{k^2}$$

gegeben ist. Setzt man nun in die Gleichung

$$\cos^2(b\,b') = \frac{\sin^4\sigma}{r^2\left(\frac{S^2}{k^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{k^2}\right)}$$

die Werte von $\sin\sigma$,

$$S^2 = k^2\sigma'^2 = \frac{r'^2}{k^2\,1 - \frac{r^2}{k^2}},$$

entnimmt man ferner aus 8[a]) den Wert von r', so ergibt sich

$$\cos^2(b\,b_1) = \frac{4\,k^2}{C}.$$

Es ist demnach C eine positive Konstante, welche $\geqq 4\,k^2$ sein muß, so daß die unter 9[b]) gemachte Annahme allein zulässig ist, wenn nur reelle Verhältnisse betrachtet werden. Es ist selbstverständlich, daß die zweite Kurve C_1 derselben Differentialgleichung 8) genügt; daß aber auch die Integrationskonstante in beiden Fällen denselben Wert haben muß, geht aus der soeben entwickelten Bedeutung von C hervor. Übrigens kann man auch direkt zeigen, daß die Gleichung für ϱ sich in die nämliche Gleichung für ϱ_1 transformiert. Für den Fall, daß $C = \infty$, stehen die Ebenen der beiden Kurven aufeinander senkrecht. In diesem Grenzfalle aber wird $r = k = r_1$, jede der Kurven C, C_1 wird ein Kreis.

Die Gleichung 9[b]) ist aber, wie bekannt, die natürliche Gleichung von gewissen Meridiankurven der Rotationsflächen konstanter positiver Krümmung.

Man hat also den Satz:

Das einzige System von zwei ebenen Kurven im Raume, die ein Paar bilden und sich unter rechtem

Winkel schneiden, wird durch zwei kongruente — aber nicht mit kongruenten Teilen aufeinander bezogene — Kurven gebildet, welche zu den Meridiankurven der Rotationsflächen konstanter positiver Krümmung gehören.

§ 14.

Fortsetzung, die Kurven C und C_1 in rechtwinkligen Koordinaten.

Mun kann das Resultat des vorigen § durch eine direkte Untersuchung bestätigen. Ordnet man der in der xy-Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems xyz liegenden Kurve C mit dem Krümmungshalbmesser r die Kurve C_1, welche mit ihr ein Paar bildet, in der Ebene

$$x_1 - c z_1 = 0 \tag{1}$$

zu, so sind die Koordinaten von C_1

$$\begin{aligned} x_1 &= x - k \cos\sigma \frac{dy}{ds} \\ y_1 &= y + k \cos\sigma \frac{dx}{ds} \\ z_1 &= k \sin\sigma \end{aligned} \tag{2}$$

mit der aus 1) folgenden Bedingung

$$- ck \sin\sigma + x - k\cos\sigma \frac{dy}{ds} = 0. \tag{3}$$

Sollen die Richtungen korrespondierender Tangenten von C und C_1 überdies aufeinander senkrecht stehen, so muß

$$1 - k\cos\sigma \left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right) = 0 \tag{4}$$

sein. Setzt man jetzt

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\alpha$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{\sin\alpha}{r}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{\cos\alpha}{r},$$

so geht 4) über in die aus § 1 bekannte Gleichung

$$4') \qquad 1 - \frac{k}{r} \cos\sigma = 0, \quad k \sin\sigma = \sqrt{k^2 - r^2}.$$

Demnach wird aus 3)

$$-c\sqrt{k^2 - r^2} = r\frac{dy}{ds} - x.$$

Differentiiert man diese Gleichung nach s, so entsteht

$$\frac{cr\frac{dr}{ds}}{\sqrt{k^2 - r^2}} = \frac{dr}{ds}\frac{dy}{ds},$$

oder, wenn $\frac{dr}{ds} \neq 0$ vorausgesetzt wird,

$$5) \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{cr}{\sqrt{k^2 - r^2}}.$$

Setzt man diesen Wert in 3) ein, so folgt nach 4')

$$6) \qquad x = \frac{ck^2}{\sqrt{k^2 - r^2}},$$

$$7) \qquad \frac{dx}{ds} = \frac{rck^2}{(\sqrt{k^2 - r^2})^3}\frac{dr}{ds},$$

und aus 5), 7) folgt durch Quadrieren und Addieren

$$1 = \frac{c^2 r^2}{k^2 - r^2} + \frac{r^2 c^2 k^4}{(k^2 - r^2)^3}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2$$

oder

$$8) \qquad (k^2 - r^2)^3 (1 + c^2) - c^2 k^2 (k^2 - r^2)^2 = r^2 c^2 k^4 \left(\frac{dr}{ds}\right)^2.$$

Setzt man hier $c = \operatorname{cotg}\delta$, so entsteht

$$\left(1 - \frac{r^2}{k^2}\right)^3 - \left(1 - \frac{r^2}{k^2}\right)^2 \cos^2\delta = \frac{1}{4k^2}\left(\frac{dr^2}{ds}\right)^2 \cos^2\delta,$$

welche Gleichung, wenn man

$$\cos^2\delta = \frac{4k^2}{C}$$

setzt, in die mit der früheren übereinstimmende

$$\left(1-\frac{r^2}{k^2}\right)^3-\frac{4k^2}{c}\left(1-\frac{r^2}{k^2}\right)^2=\left(\frac{d\,r^2}{d\,s}\right)^2\frac{1}{c}$$

übergeht. Es ist ferner die Länge der Normalen N der Kurve C, d. h. derjenige Abschnitt derselben, der vom Kurvenpunkte und der y-Achse begrenzt wird

$$N=\frac{x}{\frac{d\,y}{d\,s}}.$$

Demnach ist nach 5), 6)

$$N r = k^2. \tag{9}$$

Und endlich ergibt sich für x_1 der Wert

$$x_1 = x - k\cos\sigma\frac{d\,y}{d\,s}=\frac{c^2k^2}{x}.$$

oder

$$x x_1 = c^2 k^2. \tag{10}$$

Diese Gleichung gibt den Zusammenhang zwischen den Koordinaten entsprechender Punkte auf den beiden Kurven C, C_1 an. Nach 9) ist die Kurve C Meridiankurve einer Rotationsfläche konstanter positiver Krümmung $\frac{1}{k^2}$, wobei die y-Achse die Rotationsachse ist. Die Kurve C_1 ist selbstverständlich zu der Kurve C kongruent, aber die beiden Kurven sind nicht mit kongruent entsprechenden Punkten aufeinander bezogen.

Man erhält nun eine neue Definition dieser Kurven, welche von Interesse zu sein scheint. Soll der Endpunkt der Strecke k, welche auf der gegen ihre Hauptnormale unter dem Winkel σ geneigten Normale aufgetragen ist, überhaupt eine ebene Kurve beschreiben, so ist nach 2)

$$c^2k^2\sin^2\sigma = x^2 - 2kx\cos\sigma\frac{d\,y}{d\,s}+k^2\cos^2\sigma\left(\frac{d\,y}{d\,s}\right)^2$$

oder

$$k^2 \cos^2 \sigma \left[c^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right] - 2kx \cos\sigma \frac{dy}{ds} + x^2 - c^2k^2 = 0.$$

Im allgemeinen ergeben sich daraus zwei Werte von $\cos\sigma$. Dieselben fallen zusammen, wenn

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = \frac{x^2 - k^2c^2}{k^2} \tag{11}$$

ist. Dies ist aber gerade die Differentialgleichung zwischen x und y, welche aus 5) und 6) hervorgeht.

Diese Gleichung stellt aber nicht alle Meridiankurven der Rotationsflächen konstanter positiver Krümmung vor.

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung dieser Kurven ist bekanntlich

$$x \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = k^2$$

oder

$$-\frac{1}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{x^2}{k^2} - c_1,$$

wo c_1 eine positive Konstante, wenn reelle Werte von y, x vorhanden sein sollen. Hieraus folgt

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = \frac{x^2}{k^2} - (c_1 - 1).$$

Setzt man, um diese Gleichung mit der vorhergehenden zu identifizieren,

$$c_1 - 1 = c^2,$$

so erkennt man, daß der kleinste Wert, den x annehmen kann, $x = kc$ ist. Man erhält also nur die zu den Rotationsflächen konstanter positiver Krümmung vom ringförmigen Typus gehörigen Meridiankurven, während die vom spindelförmigen ausgeschlossen bleiben.

Hieraus geht nun eine weitere Beziehung zwischen den Kurven C und C_1 hervor. C liegt in der xy-Ebene, C_1 in einer unter dem Winkel δ gegen diese geneigten Ebene E durch die Y-Achse, aus welcher die Normalebene von C eine Gerade g ausscheidet. Im allgemeinen würden auf einer Geraden zwei Punkte von C_1 liegen, deren Normalabstand von C gleich k ist. Da aber diese im vorliegenden Falle stets zusammenfallen, muß die Linie g mit der Normalen k einen rechten Winkel bilden. Die beiden Kurven C, C_1 liegen daher so gegen einander, daß die Tangente der Kurve C mit der Normalen der Kurve C_1 im korrespondierenden Punkte sich in demselben Punkte der Y-Achse schneiden und umgekehrt.

Der im vorigen unberücksichtigt gebliebene Fall

$$\frac{dr}{ds} = 0$$

ist nur ein trivialer. Denn alsdann ist $r = \text{const}$, mithin die Kurve C ein Kreis, und wegen

$$\cos\sigma = \frac{r}{k}$$

reduziert sich die Kurve C, in kinematischem Sinne auf den senkrecht über dem Mittelpunkt von C gelegenen Punkt im Abstande $\sqrt{k^2 - r^2}$.

Auch der Fall $z_1 = \text{const}$ oder $k \sin\sigma = \gamma$ ist in der obigen Darstellung nicht enthalten. Dann ist aber nach 4') $r = \sqrt{k^2 - \gamma^2}$, die Kurve C also wieder ein Kreis, und C_1 reduziert sich auf den zuvor erwähnten Punkt.

Ist endlich $c = 0$, so ist $x_1 = 0$ oder

$$x - r\frac{dy}{ds} = 0.$$

Daraus folgt aber

$$\frac{dr}{ds}\sin\alpha = 0.$$

Wäre nun $\sin a = 0$, so ist $y = \text{const.}$ $x = s + \text{const.}$ was mit der Bedingung $x_1 = 0$ unverträglich ist. Ist aber

$$\frac{dr}{ds} = 0,$$

so wird man wieder auf den angegebenen Punkt geführt, der von der Kurve C_1 allein in Betracht kommt.

Von diesen Fällen abgesehen, die man übrigens als Grenzfälle ansehen kann, findet ein gegenseitiges Entsprechen zwischen den Kurven C, C_1 statt. Setzt man

$$x_1^2 + z_1^2 = x_1^2 \frac{1 + c^2}{c^2} = \xi^2,$$

so sind y_1 und ξ die Koordinaten der Kurve C_1 in ihrer Ebene.

Es wird also, da

$$x_1 = x - \frac{c r^2}{\sqrt{k^2 - r^2}} = c \sqrt{k^2 - r^2}$$

$$y_1 = y + \frac{r^2 c k^2}{(\sqrt{k^2 - r^2})^3} \frac{dr}{ds}$$

$$\xi^2 = (1 + c^2)(k^2 - r^2).$$

Nun ist der kleinste Wert, den x annehmen kann, kc, der größte $k\sqrt{1 + c^2}$; diesen Werten entsprechen die Krümmungshalbmesser $r = 0$,

$$r = \frac{k}{\sqrt{1 + c^2}}$$

von C. Es kann daher für $c^2 \neq 0$, r niemals gleich k werden, und dem Werte $r = 0$ entsprechen die Koordinaten $y_1 = y$.[1] $\xi = k\sqrt{1 + c^2}$; dem Werte

$$r = \frac{k}{\sqrt{1 + c^2}}$$

dagegen entspricht $\xi = kc$, $y_1 = y$.

[1]) Dies zeigt die Betrachtung der Gleichung 8), nach der $r \frac{dr}{ds}$ für r einen endlichen Wert erhält.

Das Verhältnis der Quadrate der Bogenelemente der Kurven c und c_1 ist nach § 1

$$\left(\frac{d s_1}{d s}\right)^2 = k^2 \sigma'^2;$$

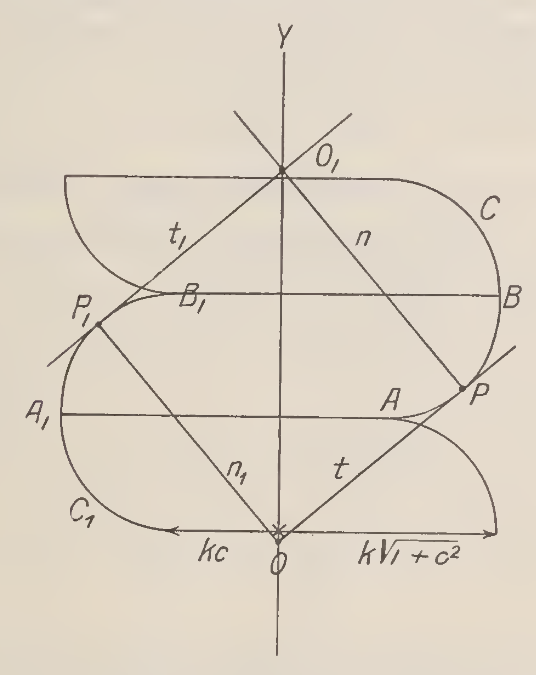
hieraus folgt

$$\left(\frac{d s_1}{d s}\right)^2 = \frac{(k^2 - r^2)\,[k^2 - r^2(1 + c^2)]}{r^2 c^2 k^2}.$$

Für $r = 0$ ist daher

$$\frac{d s_1}{d s} = \infty; \text{ für } r = \frac{k}{\sqrt{1 + c^2}} \text{ wird } \frac{d s_1}{d s} = 0.$$

Die Kurven C und C_1 haben daher, wenn man C_1 durch Drehung um die Y-Achse in die Ebene $x\,y$ verlegt, die in der folgenden Figur angedeutete Lage.



In derselben sind korrespondierende Punkte mit gleichen Buchstaben bezeichnet. Dreht man die Figur A, P, B so lange

um die Y-Achse, bis sie mit der Ebene von A, P, B den durch $\cot g\, \delta = c$ bestimmten Winkel bildet, so wird in der Tat die Entfernung der beiden Punkte BB_1 gleich k, wie es sein muß.

Je mehr sich nun c dem Werte 0 nähert, um so mehr wird $r = k$, das Verhältnis der Bogenelemente nähert sich der Null. In der Tat findet man auch aus 11)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 - c^2 k^2}}{\sqrt{(1 + c^2) k^2 - x^2}}.$$

Für $c = 0$ entspringt daraus die Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 = k^2.$$

Die beiden Kreise C und C_1 haben dann die Y-Achse zum gemeinsamen Durchmesser, aber der Mittelpunkt des einen fällt mit dem Diametralpunkte des andern zusammen, wie auch aus der Figur für $c = 0$ hervorgeht.

§ 15.

Über eine gewisse Berührungstransformation in der Ebene.

Die im vorigen § nachgewiesene Lage der beiden Kurven C, C_1 legt nun die folgende Aufgabe nahe:

Alle ebenen Kurvenpaare C, C_1 in derselben Ebene von derjenigen Eigenschaft zu bestimmen, daß sich die Normale des Punktes $P(xy)$ von C mit der Tangente im korrespondierenden Punkte $P_1(\xi, \eta)$ von C_1 und auch umgekehrt die Tangente von C in P mit der Normale von C_1 in P_1 je in zwei Punkten der y-Achse schneiden. Solche Kurvenpaare müssen den beiden Gleichungen

$$1)\qquad y - x\frac{dy}{dx} = \eta + \xi\frac{d\xi}{d\eta},$$

$$2)\qquad y + x\frac{dx}{dy} = \eta - \xi\frac{d\eta}{d\xi},$$

genügen, aus denen die invariante Beziehung

$$3)\qquad \xi\left(\frac{1}{\frac{d\eta}{d\xi}}+\frac{d\eta}{d\xi}\right)=-x\left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}+\frac{dy}{dx}\right)$$

hervorgeht; sie drückt zugleich aus, daß Normale und Tangente von C und C_1 in korrespondierenden Punkten zwei Dreiecke gleicher Hypotenuse auf der Y-Achse bilden.

Man kann das simultane System 1, 2 in folgender Weise lösen. Durch Elimination von $\frac{d\eta}{d\xi}$ entsteht aus 1), 2)

$$4)\quad y^2-x^2-2\eta y+x(y-\eta)\left(\frac{1}{y'}-y'\right)=-(\eta^2+\xi^2),$$

oder, wenn man nach 1)

$$(y-xy')\frac{d\eta}{dx}=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\xi^2+\eta^2)$$

setzt — für $\frac{dy}{dx}$ ist dabei y' geschrieben — und nun 4) nach x differentiiert, eine Differentialgleichung für η, die nach Befreiung von dem unwesentlichen Faktor $1+y'^2$[1]) die integrabele Form

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\eta x}{y'}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{yx}{y'}-x^2+C\right)$$

mit der willkürlichen Konstanten C annimmt, so daß

$$5)\qquad \eta=y-xy'+C\frac{y'}{x}$$

und nach 4)

$$6)\qquad \xi^2=C\left[1-y'^2\left(\frac{C}{x^2}-1\right)\right]$$

wird.

Für $C=0$ entsteht hieraus nur die triviale Lösung $\xi=0$, $\eta=y-xy'$.

[1]) Diese Lösung gibt aber nur die Minimalgeraden der Ebene, denen wieder Minimalgerade entsprechen; in der Tat bildet jede solche Gerade mit sich selbst ein solches Paar.

Aus den Gleichungen 5), 6) geht hervor, daß man zu jeder Kurve, $y = f(x)$, ∞^1 Kurven C_1, $\eta = \varphi(\xi)$, finden kann, je nachdem man der Konstanten C verschiedene Werte erteilt.

Die Gleichungen 5), 6) stellen eine Berührungstransformation vor. Differentiiert man nämlich beide nach x, so folgt

$$\xi \frac{d\xi}{dx} = -Cy'\left[y''\left(\frac{C}{x^2} - 1\right) - y'\frac{C}{x^3}\right]$$
$$\frac{d\eta}{dx} = x\left[y''\left(\frac{C}{x^2} - 1\right) - y'\frac{C}{x^3}\right].$$

Genügt nun die Kurve C der Differentialgleichung[1])

$$y''\left(\frac{C}{x^2} - 1\right) - y'\frac{C}{x^3} = 0,$$

so werden ξ und η Konstanten. Abgesehen von diesem besonderen Fall, wo die Kurve C_1, welche der C entspricht, in einem Punkt degeneriert, ist daher

$$7) \qquad -C\frac{d\eta}{d\xi}\frac{dy}{dx} = x\xi$$

und die Aequatio Directrix dieser Berührungstransformation, welche sich durch Elimination von y' aus 5), 6) ergibt, erhält die in $x, y; \xi, \eta$ symmetrische Form

$$\Omega = (\xi^2 - C)(x^2 - C) - C(\eta - y)^2 = 0$$

---

[1]) Der Fall

$$y''\left(\frac{C}{x^2} - 1\right) - y'\frac{C}{x^3} = 0$$

ist übrigens ein ganz trivialer. Denn es wird jetzt

$$y^2 + kx^2 = Ck,$$

wo k die wesentliche Integrationskonstante ist, und man hat damit nur die bekannte Eigenschaft der Mittelpunktskegelschnitte, daß Normale und Tangente eines Punktes dieser Kurven der ersten Hauptachse in zwei Punkten begegnen, welche mit den auf der zweiten Hauptachse gelegenen Brennpunkten auf einem Kreise liegen, dessen Mittelpunkt sich auf der ersten Hauptachse befindet.

vermöge der jedem Punkte x, y ein Mittelpunktskegelschnitt ξ, η entspricht.

Mit Hilfe der Gleichung 7) findet man leicht die Umkehrung der Gleichungen 5), 6) in der Form

$$5^{a})\qquad y = \eta + C\frac{\eta'}{\xi} - \xi\eta',$$

$$6^{a})\qquad x^2 = C\left[1 - \eta'^2\left(\frac{C}{\xi^2} - 1\right)\right],$$

in welcher C dieselbe Konstante, wie in 5), 6) bedeutet. Man hat dazu nur aus 7) den Wert y' mittelst

$$\eta' = \frac{d\eta}{d\xi}$$

in 5), 6) einzuführen; damit ergibt sich x^2 rational und somit auch y.

Der im § 14 besprochene Fall der Meridiankurven der Rotationsflächen konstanter positiver Krümmung ist unter den Gleichungen 5), 6) enthalten, aber dadurch von Interesse, daß hier C und C_1 kongruent sind. Indessen ist diese Eigenschaft für jene Kurven nicht charakteristisch.

Schon die Parabel bietet einen solchen Fall dar. Setzt man

$$y = q x^2,$$

so wird

$$\eta = q(2C - x^2)$$
$$\xi^2 = C[1 - 4q^2C + 4q^2x^2];$$

der Parabel C oder $y = qx^2$ entspricht also die Parabel C_1

$$\eta = \frac{1 + 4q^2C}{4q} - \frac{\xi^2 q}{4q^2C}.$$

Setzt man $4q^2C = +1$, so wird

$$\eta = \frac{1}{2q} - q\xi^2;$$

die Kurve C_1 ist also eine Parabel mit demselben Parameter, welche zu C confocal ist, aber entgegengesetzte Achsenrich-

tung hat. Setzt man dagegen $4q^2 C = -1$, so fallen C und C_1 zusammen: die Beziehung zwischen den korrespondierenden Punkten wird aber imaginär, wie aus der Gleichung

$$\xi^2 = -\frac{1}{4q^2}(2 + 4q^2 x^2)$$

folgt.

Es ist übrigens leicht, unzählig viele kongruente Paare dieser Art zu finden. Man kann sich die allgemeine Aufgabe stellen, alle Paare zu finden, bei denen die Kurven C, C_1 durch Verschiebung, Drehung und Symmetrie auseinander hervorgehen. Beschränkt man sich indessen auf den einfacheren Fall, daß die Kurven C, C_1 durch Translation längs der Y-Achse, eventuell unter Hinzufügung einer symmetrischen Umformung in Bezug auf die X-Achse auseinander entspringen sollen, so läßt sich diese Frage mit Hilfe der Invarianten der Transformation beantworten.

Ich verstehe dabei unter einer Invariante der Berührungstransformation jede Funktion, für die

$$F(x, y, y', y'' \ldots) = F(\xi, \eta, \eta', \eta'' \ldots)$$

ist.

Eine solche Invariante ist nun, wenn man η mit $-\eta$ vertauscht, nach 3)

$$J_1 = x\left(\frac{1 + y'^2}{y'}\right).$$

Eine zweite erhält man aus 7), da nach dieser Gleichung

$$C\frac{\eta'}{\xi} = -\frac{x}{y'}$$

$$\frac{\xi}{\eta'} = -C\frac{y'}{x};$$

mithin nach Vertauschung von η mit $-\eta$ ebenfalls

$$J_2 = \frac{x}{y'} + C\frac{y'}{x}$$

eine Invariante wird. Diese beiden Invarianten sind von einander unabhängig; eine dritte von ihnen unabhängige kann nicht vorhanden sein, wie man unmittelbar sieht.[1])

Hienach ergibt sich der Satz:

Die Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(J_1, J_2) = 0$$

liefert, da in ihr nur y' vorkommt, kongruente Kurvenpaare, welche Funktion auch F bedeutet. An Stelle der Invariante J_2 kann man auch

$$J_3 = J_2 - J_1 = y' x \left(\frac{C}{x^2} - 1\right)$$

nehmen; es ist daher auch

$$J_1 J_3 = (C - x^2)(1 + y'^2)$$

eine Invariante.[2])

Setzt man demgemäß

$$J_1 J_3 = a,$$

wo a eine Konstante, so folgt

$$1 + y'^2 = \frac{a}{c - x^2}. \tag{8}$$

Nun ist die Differentialgleichung der Meridiankurven der Rotationsflächen konstanter (von 0 verschiedener) Krümmung

$$1 + y'^2 = \frac{-k^2}{x^2 \varepsilon + c_1}, \tag{9}$$

wo c_1 eine willkürliche Konstante, und k^2 der absolute Wert des reziproken Krümmungsmaßes ist.

Ist nun $\varepsilon = +1$, was den positiv gekrümmten Flächen entspricht, so fallen die Gleichungen 8), 9) zusammen, wenn

---

[1]) Auch
$$C\frac{\eta'}{\xi} - \frac{\xi}{\eta'} = C\frac{y'}{x} - \frac{x}{y'} = J_4$$
ist eine Invariante; daher gehört auch $J_4^2 = J_2^2 - 4C$ zu diesen Invarianten.

[2]) Bei der Verwendung dieser Invariante ist die Vertauschung von η mit $-\eta$ nicht erforderlich.

man $a = k^2$ und $c_1 = -C$ setzt; da C, falls überhaupt eine reelle Beziehung entstehen soll, einen positiven Wert haben muß,[1]) so hat man die Formel

$$10) \qquad 1 + y'^2 = \frac{k^2}{C - x^2};$$

es wird dann

$$\eta = y + \frac{1}{x} \sqrt{(C - x^2)(k^2 - C + x^2)}$$

$$\xi^2 = C \frac{(C - k^2)}{x^2}.$$

Soll die Beziehung reell sein, so muß $C > k^2$ sein, dann findet aber wegen

$$\sqrt{C - k^2} \leq x < \sqrt{C},$$

abgesehen vom Grenzfalle $\xi = 0$, nur der ringförmige Typus statt.

Ist dagegen $\varepsilon = -1$, so wird man $a = -k^2$, $c_1 = +C$ zu setzen haben. Es wird dann

$$1 + y'^2 = \frac{k^2}{x^2 - C}$$

$$\xi^2 = C \frac{(C + k^2)}{x^2}, \quad y'^2 = \frac{k^2 + C - x^2}{x^2 - C}.$$

also

$$C \leq x^2 < C + k^2;$$

daher entsteht hier nur der hyperbolische Typus, so daß der Fall der Tractrix und der Kegeltypus ausgeschlossen ist. In Bezug auf die gegenseitige Lage der Kurven C, C_1 gelten hier ganz analoge Bemerkungen, wie zu der Figur in § 14.

[1]) Aus der „im allgemeinen" giltigen Gleichung 7) erhält man

$$1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 = \frac{x^2}{y'^2} \frac{(1 + y'^2)}{C},$$

aus der hervorgeht, daß C einen positiven Wert haben muß, wenn die Beziehung reell sein soll; selbstverständlich ist dies nicht hinreichend.

Wir heben noch einige weitere Fälle hervor. Setzt man

$$J_1 = a\, J_3,$$

so ergibt sich die Differentialgleichung

$$a \frac{(C - x^2)}{x^2} = \frac{1 + y'^2}{y'^2},$$

deren Lösung unter Weglassung der willkürlichen Konstanten der Mittelpunktskegelschnitt

$$(a+1)^2 y^2 + x^2(a+1) = a\,C, \quad -(a+1)\,y = \sqrt{a\,C - (a+1)\,x^2}$$

ist. Hieraus folgt dann

$$\xi^2 = C + \frac{C\,(x^2 - C)}{a\,C - (a+1)\,x^2}$$

$$\eta = \frac{C}{a+1\sqrt{a\,C - x^2\,(a+1)}},$$

und durch Elimination von x

$$(a+1)\,\xi^2 + \eta^2\,(a+1)^2 = a\,C,$$

falls nicht $\xi^2 - C = 0$ und somit auch $x^2 - C = 0$ ist.[1])

Das eben angeführte Beispiel ist dadurch ausgezeichnet, daß eine und dieselbe Kurve durch die Berührungstransformation auf sich bezogen wird, was demnach bei allen Kegelschnitten stattfindet, deren eine Achse die Y-Achse ist, übrigens auf dem früher erwähnten Satze beruht.

Diese Möglichkeit ist indessen nicht auf die Kegelschnitte beschränkt. Als einfaches Beispiel kann man die Differentialgleichung

---

[1]) In diesem Falle wird

$$\xi = \pm\sqrt{C}, \quad x = \pm\sqrt{C}, \quad y = \eta = \frac{\sqrt{C}}{(1+a)^2}.$$

Bei geeignetem Werte von a kann dies jeder reelle Punkt sein; in der Tat bilden auch zwei Nullkreise, deren Zentra zusammenfallen oder symmetrisch zur Y-Achse liegen, ein reelles Kurvenpaar C, C_1.

$$J_3 = y' \frac{(x^2 - C)}{x} = a$$

anführen, deren Integral

$$y = \frac{a}{2} \lg (x^2 - C) + \text{const ist.}$$

Es wird dann

$$-\eta = y - \frac{a x^2}{x^2 - C} + \frac{C a}{x^2 - C} + \text{const} = y - a + \text{const},$$

$$\xi^2 - C = \frac{a^2 C}{x^2 - C},$$

mithin

$$\eta = \frac{a}{2} \lg (\xi^2 - C) + a \left(1 - \frac{1}{2} \lg a^2 C\right) - c.$$

Wählt man daher z. B. $2 = \lg (a^2 C)$ und setzt die konstante c gleich Null, so hat man eine Kurve, die mit sich selbst ein Paar bildet.

Man erhält durch eine einfache Rechnung ferner

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{C^2} \left(\frac{C y' - x y''(C - x^2)}{x y'' - (1 + y'^2) y'}\right).$$

Das identische Verschwinden des Zählers ist dabei, wie schon oben bemerkt, auszuschließen. Verschwindet dagegen der Nenner oder $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$, so ergibt sich durch Integration eine Kreislinie, der vermöge der Berührungstransformation eine durch ihren Mittelpunkt gehende Gerade entspricht. In der Tat bildet auch ein Kreis mit jeder durch seinen Mittelpunkt gehenden Geraden ein Paar von Kurven C, C_1 in Bezug auf jede durch seinen Mittelpunkt gehende Y-Achse, wie unmittelbar ersichtlich ist.

Es lassen sich noch eine große Zahl hierher gehöriger Fragen stellen. Man kann z. B. verlangen, daß die Krümmungshalbmesser der Kurven C, C_1 in entsprechenden Punkten zueinander proportional sind, oder daß die Tangentenrichtungen von C und C_1 in korrespondierenden Punkten einen konstanten Winkel miteinander bilden sollen, u. s. w.; u. s. w.

Nur auf die einfache Gestalt, welche die Transformationsgleichungen 5), 6) für den Fall der Meridiankurven der Rotationsflächen konstanter Krümmung annehmen, soll hier noch hingewiesen werden; der Einfachheit halber führen wir dieselbe nur für den Fall positiver Krümmung aus.

Aus der Gleichung 10)

$$1 + y_1^2 = \frac{k^2}{C - x^2}$$

folgt

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\varepsilon}{k}\sqrt{C - x^2}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{\varepsilon_1}{k}\sqrt{k^2 - C + x^2},$$

wo $|\varepsilon|$, $|\varepsilon_1|$ gleich $+1$ sind. Daraus folgt

$$y' = \varepsilon\varepsilon_1 \frac{\sqrt{k^2 - C + x^2}}{\sqrt{C - x^2}}, \tag{11}$$

und aus der Definition des Krümmungshalbmessers, der hier mit seinem Vorzeichen einzuführen ist,

$$\frac{1}{r} = \frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{dy'}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2, \tag{12}$$

oder

$$\frac{1}{r} = \varepsilon\varepsilon_1 \frac{dx}{ds}\frac{x}{\sqrt{C - x^2}\sqrt{k^2 - C + x^2}}$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{x^2}{k^2(k^2 - C + x^2)}.$$

Es wird daher

$$\eta = y + \frac{y'}{x}(C - x^2) = y + \varepsilon\varepsilon_1\sqrt{C - x^2}\sqrt{k^2 - C + x^2}.$$

also:

5′) $$\eta = y + r\frac{dx}{ds}.$$

6′) $$\xi = \frac{\lambda}{x^2}\sqrt{C}\sqrt{C-k^2}, \quad \lambda = 1,$$

so daß die positive Größe $C > k^2$ ist.

Aus 5′) kann man wegen der Reziprozität der Transformation schließen, daß

13) $$r_1\frac{d\xi}{ds_1} = -r\frac{dx}{ds};$$

dies läßt sich in der Tat durch die folgende Rechnung bestätigen. Man hat nach 12)

$$\frac{1}{r_1} = \frac{d}{ds_1}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)\left(\frac{d\xi}{ds_1}\right)^2.$$

Wird hier nach 7) $\frac{d\eta}{d\xi}$ durch seinen Wert $-\frac{x\xi}{Cy'}$, und $x\xi$ nach 6′) ersetzt, so folgt

$$r\frac{dx}{ds} = \lambda r_1\frac{d\xi}{ds_1}\frac{\sqrt{C-k^2}}{\sqrt{C}\,y'^2}\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\frac{d\xi}{ds},$$

oder wegen

$$\frac{d\xi}{ds} = -\lambda\frac{\sqrt{C}}{x^2}\sqrt{C-k^2}\frac{dx}{ds}$$

$$-r\frac{dx}{ds} = r_1\frac{d\xi}{ds_1}\frac{C-k^2}{x^2}\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\frac{1}{y'^2}.$$

Aus der Gleichung S. 98, Anmerkung.

$$1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 = \frac{x^2(1+y'^2)}{Cy'^2},$$

erhält man aber

$$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = \frac{C-k^2}{x^2y'^2}.$$

so daß in der Tat die Gleichung 13) auch dem Vorzeichen nach richtig ist. Sie zeigt, daß die Projektion des Krümmungshalbmessers auf die Y-Achse in korrespondierenden Punkten für beide Kurven C und C_1 den nämlichen Wert hat.

Man erhält endlich aus der Gleichung 13)

$$r_1^2 \frac{C}{C - x^2} = k^2.$$

Eliminiert man nun aus dieser und der unter 12) angeführten Gleichung für r^2 die Größe x^2, so folgt endlich

$$\frac{k^6}{C} + r^2 r_1^2 - k^2 (r^2 + r_1^2) = 0$$

als Beziehung zwischen den Krümmungshalbmessern in korrespondierenden Punkten von C und C_1; wie man sieht, ist dieselbe von der Lage der Punkte völlig unabhängig.

§ 16.

Über eine zweite Berührungstransformation.

Mit der im vorigen § betrachteten Berührungstransformation steht in engstem Zusammenhange eine zweite, bei der zwei Kurven C, C_1 sich so entsprechen, daß sowohl die Tangenten von C und C_1 in entsprechenden Punkten $x, y; \xi, \eta$, als auch die zugehörigen Normalen sich jedesmal in zwei auf der Y-Achse gelegenen Punkten schneiden.

Aus den beiden Gleichungen

$$y - x \frac{dy}{dx} = \eta - \xi \frac{d\eta}{d\xi}$$

$$y + \frac{x}{\frac{dy}{dx}} = \eta + \frac{\xi}{\frac{d\eta}{d\xi}}$$

erhält man, abgesehen von der imaginären trivialen Lösung,

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

durch Integration

$$1)\qquad \begin{aligned} \eta &= y + \frac{Cx}{y'} \\ \xi^2 &= (1 - C)\,x^2 \left(1 + \frac{C}{y'^2}\right). \end{aligned}$$

Dies ist eine Berührungstransformation mit der aequatio directrix

$$\Omega = (C - 1)(\eta - y)^2 + C(C - 1)x^2 + C\xi^2 = 0.$$

Sie reduziert sich für $C = 0$ auf die identische, resp. symmetrische Transformation $\eta = y$, $\xi = \pm x$; in der Tat befinden sich auch zwei in Bezug auf die Y-Achse symmetrische Kurven in der geforderten Beziehung. Dagegen wird für $C = 1$, $\xi = 0$, während

$$\eta = y + \frac{x}{y'}$$

wird. Die Gleichungen 1) lassen mit Hülfe der Gleichung

$$2)\qquad (1 - C)\frac{\eta'}{\xi} = \frac{y'}{x}$$

die Umkehrung

$$\begin{aligned} y &= \eta + \frac{C}{C - 1}\,\frac{\xi}{\eta'} \\ x^2 &= \frac{\xi^2}{1 - C}\left(1 + \frac{C}{(C - 1)\,\eta'^2}\right) \end{aligned}$$

zu. Da ferner nach 2)

$$1 + \eta'^2 = + \frac{(1 + y'^2)}{1 - C},$$

so muß bei reeller Beziehung notwendig $C < 1$ sein. Einer Geraden entspricht dabei wieder eine Gerade, welche die

Y-Achse in demselben Punkte trifft, wie die erste, einem Kreise jeder konzentrische Kreis, einem Kegelschnitte, welcher die Y-Achse zur Hauptachse hat, ein confocaler Kegelschnitt. Wir gehen nicht weiter auf diese Verhältnisse ein, da sie in einfacher Art sich aus dem elementaren Satze:

Die Berührungspunkte des von einem Punkte der Hauptachse eines confocalen Systems von Kegelschnitten an dieselben gezogenere Tangenten liegen auf einem Kreise der durch diesen Punkt und die beiden auf der anderen Hauptachse gelegenen, imaginären oder reellen Brennpunkte geht. Dieser Satz, der auch für confocale Parabeln gilt (die imaginären Brennpunkte sind hier die Kreispunkte), kommt auch namentlich für das ausgezeichnete Verhalten confocaler Kegelschnitte bei der im vorigen § behandelten Berührungstransformation in Betracht.

Auch hier ist eine Invariante

$$J_1 = x\frac{(1+y'^2)}{y'} = \xi\frac{(1+\eta'^2)}{\eta'}$$

vorhanden. Eine zweite Invariante würde sich aus der Gleichung

$$(1-C)^2\left(\frac{\eta'}{\xi}\right)^2 = \left(\frac{y'}{x}\right)^2$$

für $C = 2$ ergeben; dies führt indeß nur zu einer imaginären Beziehung.

Die Gleichung

$$x\frac{(1+y'^2)}{y'} = 2a$$

definiert daher Kurven, welche durch die Berührungstransformation längs der Y-Achse in Translation versetzt werden. Diese Kurven, für die also das von der Normalen und der Tangente auf der Y-Achse begrenzte Stück eine konstante Länge hat, und die auch bei der im vorigen § behandelten Transformation auftreten, sind in ihrem Verlauf der Tractrix nicht unähnlich, weisen aber eine unter dem Winkel von 45^0

gegen die Y-Achse gerichtete Spitze auf, von der ein weiterer die Y-Achse rechtwinklig schneidender Zweig ausgeht. Versetzt man diese Kurven in Translation längs der Y-Achse, so liegen die Berührpunkte der von irgend einem Punkte der Y-Achse gezogenen Tangenten auf einem Kreise, der durch diesen Punkt geht und dessen Mittelpunkt auf der Y-Achse liegt; bei der im vorigen § behandelten Transformation muß nach der Translation das Kurvensystem an der X-Achse gespiegelt werden.

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 15. Abhandlung

Über die singulären Stellen eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung

von

Walther von Dyck

Vorgetragen am 6. März 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

Bauer, Gustav. Ueber einen Kettenbruch Eulers. A. 11$_2$, 1872 ℳ —.50
— Pascal's Theorem. A. 11$_3$, 1874 ℳ 1.—
— Gedächtnissrede auf Otto Hesse. 1882 ℳ —.60
— Von der Hesse'schen Determinante. A. 14$_3$, 1883 ℳ —.50
* — Von zwei Tetraëdern, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind. Sb. 1897, p. 359—366.

Brill, Al. Zur Theorie der geodät. Linie etc. A. 14$_2$, 1883 ℳ 1.—
* — Bestimmung der optischen Wellenfläche etc. 1883, 3 p. 423—435.
* — Ueber rationale Curven und Regelflächen, 1885, 2 p. 276—287.
— Multiplicität d. Schnittp. zweier ebener Curven. Sb. 1888, p. 81—94.
— Die reducirte Resultante. A. 17$_1$, 1889 ℳ —.40.
— Ueber das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle. Sb. 1891, p. 207—220.

Burmester, L. Kinetographische Verwandtschaft ebener Systeme und räumlicher Systeme. 1907, 1 ℳ —.40

Dyck, W. v. Die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Diff.-Gl. 1ter O. definirten Curvensysteme. I. (mit 4 Taf.) Sb. 1891, p. 23—57; II. (mit 3 Taf.) Sb. 1892, p. 101—138.
* — Beiträge zur Potentialtheorie. I. Kronecker'sche Charakteristiken. Sb. 1895, p. 261—277. — II. Umschlingung zweier Mannigf. Desgl. p. 447—500. — III. Nullstellen eines Syst. von Funkt. mehrerer Veränderl. Sb. 1898, p. 203—224.
— Ueber die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und der angewandten Mathematik. Festrede. Nov. 1896 ℳ 1.20
— Rede v. C. G. J. Jacobi. Sb. 1901, p. 203-208 ℳ —.20

Finsterwalder, S. Katoptr. Eigensch. der F_2. Sb. 1887, p. 33—42.
— Ueber die Vertheilung der Biegungselasticität in dreifach symmetrischen Krystallen (mit 1 Taf.). Sb. 1888, p. 257—266.
— Ueber den mittleren Böschungswinkel und das wahre Areal einer topographischen Fläche. Sb 1890, p. 35—82.
— Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. A. 17, 1891, p. 517—587 ℳ 3.—
— Analogie zwischen Aufg. der Ausgl.-Rechnung und Statik. Sb. 1903, p. 683—689 ℳ —.20
— Neue Anwend. d. Photogrammetrie. Sb. 1904, p. 683—689 ℳ —.40
— u. W. Scheufele. Rückwärts-Einschneiden im Raume. Sb. 1903, p. 591—614 ℳ —.40
— Ueber Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen. 1900, 2 ℳ —.40
— Ueber die innere Struktur der Mittelmoränen. 1900, 3 ℳ —.20

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 16. Abhandlung

Registrierungen einiger südeuropäischer Erdbeben auf der Münchener Erdbebenstation

von

J. B. Messerschmitt

Mit 3 Figuren

Vorgelegt am 6. November 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

(mathematisch-physikalische Klasse).

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

Astronomie. Sitzungsberichte von 1871 = Sitzb.
Abhandlungen von 1846 ab = Abh.
Neue Annalen der Sternwarte = Ann.

Anding, E. Die bisherigen Publicationen der Sternwarte Bogenhausen bei München. Ann. II. 1891. (Nicht separat gedruckt.)

Bauschinger, Jul. Ueber die Biegung von Meridianfernrohren. München. Ann. II. 1888. M. 1.50.

— Ableitung der Eigenbewegungen von 90 telescopischen Sternen. Ann. II. 1890. M. 2.70.

— Zweites Münchener Sternverzeichnis. Ann. II. 1891. M. 12.00.

— Untersuchungen über den periodischen Cometen. 1889 V. (Brooks). Ann. Bd. III. 1892. M. 5.—.

* — Ueber eine neue Bestimmung der Refractionsconstante auf astronomischen Wege. Sitzb. 1895. S. 239—260.

— Untersuchungen über die astronomische Refraction. Ann. Bd. III. 1896. M. 12.—.

*Charlier, C. Untersuchung über die Methoden zum Tabulieren der Störungen der kleinen Planeten. Sitzb. 1896. S. 287—307.

*Föppl, A. Ueber eine mögliche Erweiterung des Newton'schen Gravitations-Gesetzes. Sitzb. 1897. S. 93—99.

Häerdtl, E. v. Skizzen zu einem speziellen Fall des Problems der 3 Körper. Abh. XVII, 3. 1891. M. 2.50.

Lamont, J. Die Nebelflecken. Rede. 1837. M. 1.30.

— Die Instrumente an der Münchener Sternwarte. Abh. VI, 2. M. 3.—.

*Lehmann-Filhés, R. Ueber die Saecularstörung der Länge des Mondes unter der Annahme einer sich nicht momentan fortpflanzenden Schwerkraft. Sitzb. 1895. S. 371—422.

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 17. Abhandlung

Ein Beitrag zur Pithecanthropus-Frage

(Die paläobotanischen Ergebnisse der Selenka'schen Trinil-Expeditionen)

von

Julius Schuster

Mit einem Profil und einer Tafel

Vorgelegt am 4. Dezember 1909

München 1910
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

(mathematisch-physikalische Klasse)

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

Bergeat, Alfr. Die äolischen Inseln. XX,1 1899 — 16 ℳ

Egger, Jos. G. Foraminiferen und Ostrakoden der Kreidebildungen in den bayerischen Alpen. XXI,1 1899 — 14 ℳ

Fraunhofer, Jos. Gesammelte Schriften. 1888 — 12 ℳ

Fuchs, J. Nep. Chemie und Mineralogie. Rede. 1824 — 60 ₰

— Theoretische Bemerkungen über die Gestaltungszustände des Eisens. VII, 1 1852 — 60 ₰

Glungler G., Das Eruptivgebiet zwischen Weiden und Tirschenreut und seine kristalline Umgebung 1905, 2. — 1 ℳ

Groth, Paul. Ueber die Molekularbeschaffenheit der Krystalle. Festrede. 1888 — 80 ₰

— Führer durch die Mineraliensammlung des bayerischen Staates. 1891. 8[0] — 1 ℳ

*Gümbel, Karl Wilh. Ueber das Vorkommen des Antozon-haltigen Flussspathes bei Wölsenberg. 1863 I S. 301.

* — Ueber das fränkische Knochenbett des Keupers und seine Pflanzenschichten. 1864 I S. 215.

* — Vorkommen von unteren Triasschichten in Hochasien. 1865 II S. 348.

* — Ueber neue Funde von Gosauschichten und Vilserkalk. 1866 II S. 158.

* — Weitere Mitteilungen über das Vorkommen von Phosphorsäure in Schichtgesteinen Bayerns. 1867 II S. 147.

* — Ueber die geognostischen Verhältnisse des Montblanc nach Favre. 1867 II S. 603.

* — Ueber Pyrophyllit als Versteinerungsmittel. 1868 I S. 498.

— Ueber Gliederung der Procänschichten in Böhmen. X, 2 1868 S. 501 — 2 ℳ 60 ₰

* — Der Riesvulkan. 1870 I S. 153.

* — Ueber die Foraminiferen der Gosau- und Belemnitellen-Schichten. 1870 II. S. 278.

* — Geognostische Verhältnisse des Ulmer Cementmergels und über seine Foraminiferen. 1871 S. 38.

— Sogenannte Nulliporen, I. Abtlg. Nulliporen des Pflanzenreichs (Litihothamnium). XI,1 1871 S. 1 — 1 ℳ 50 ₰

— Desgl. II. Abtlg. Nullporen des Thierreichs (Dactyloporen). XI,1 1871 S. 60 — 2 ℳ 40 ₰

* — Gletschererscheinungen aus der Eiszeit. 1872 S. 223.

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 18. Abhandlung

Elementare Herleitung des Weierstrass'schen „Vorbereitungssatzes"

von

G. Dumas

Vorgelegt am 4. Dezember 1909

München 1910
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

Bauer, Gustav. Ueber einen Kettenbruch Eulers. A. 112, 1872 ℳ —.50
— Pascal's Theorem. A. 113, 1874 ℳ 1.—
— Gedächtnissrede auf Otto Hesse. 1882 ℳ —.60
— Von der Hesse'schen Determinante. A. 143, 1883 ℳ —.50
* — Von zwei Tetraëdern, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind. Sb. 1897, p. 359—366.

Brill, Al. Zur Theorie der geodät. Linie etc. A. 142, 1883 ℳ 1.—
* — Bestimmung der optischen Wellenfläche etc. 1883, 3 p. 423—435.
* — Ueber rationale Curven und Regelflächen, 1885, 2 p. 276—287.
— Multiplicität d. Schnittp. zweier ebener Curven. Sb. 1888, p. 81—94.
— Die reducirte Resultante. A. 171. 1889 ℳ —.40.
— Ueber das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle. Sb. 1891, p. 207—220.

Burmester, L. Kinetographische Verwandtschaft ebener Systeme und räumlicher Systeme. 1907, 1 ℳ —40

Dyck, W. v. Die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Diff.-Gl. 1ter O. definirten Curvensysteme. I. (mit 4 Taf.) Sb. 1891, p. 23—57; II. (mit 3 Taf.) Sb. 1892, p. 101—138.
* — Beiträge zur Potentialtheorie. I. Kronecker'sche Charakteristiken. Sb. 1895, p. 261—277. — II. Umschlingung zweier Mannigf. Desgl. p. 447—500. — III. Nullstellen eines Syst. von Funkt. mehrerer Veränderl. Sb. 1898, p. 203—224.
— Ueber die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und der angewandten Mathematik. Festrede. Nov. 1896 ℳ 1.20
— Rede v. C. G. J. Jacobi. Sb. 1901, p. 203—208 ℳ —.20

Finsterwalder, S. Katoptr. Eigensch. der F_2. Sb. 1887, p. 33—42.
— Ueber die Vertheilung der Biegungselasticität in dreifach symmetrischen Krystallen (mit 1 Taf.). Sb. 1888, p. 257—266.
— Ueber den mittleren Böschungswinkel und das wahre Areal einer topographischen Fläche. Sb 1890. p 35—82.
— Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. A. 17, 1891, p. 517—587 ℳ 3.—
— Analogie zwischen Aufg. der Ausgl.-Rechnung und Statik. Sb. 1903, p. 683—689 ℳ —.20
— Neue Anwend. d. Photogrammetrie. Sb. 1904, p. 683—689 ℳ —.40
— u. W. Scheufele. Rückwärts-Einschneiden im Raume. Sb. 1903, p. 591—614 ℳ —.40
— Ueber Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen. 1900, 2 ℳ —.40
— Ueber die innere Struktur der Mittelmoränen. 1900, 3 ℳ —.20

Finsterwalder, S. Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen. Abh. II. Kl. XXII, 2. 1903 ℳ 1.20
— Der gefährliche Ort beim Rückwärtseinschneiden auf der Kugel. 1905, 1 ℳ —.20
Föppl, A. Absol. u. relat. Bewegung. Sb. 1904, p. 383—395 ℳ —.40
— Kreiselversuch zur Messung zur Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde. 1904, 1 ℳ —.40
— Ueber die Torsion von runden Stäben mit veränderlichem Durchmesser. 1905, 2 ℳ —.40
Günther, S. Pothenot'sches Problem auf d. Kugel. Sb. 1904, p. 115—123 ℳ —.20
Gordan, P. Discriminante einer ternären Form. Sb. 1887, p. 477—478.
*Klein, F. Elliptische Modulfunctionen. Sb. 1880, p. 89—100.
* — Unendl. viele Normalf. des ellipt. Integr. 1. Gtg. Sb. 1880, p. 533—541.
Königsberger, L. Unmöglichkeit der Existenz eines anderen Functionaltheorems als des Abel'schen. Sb. 1885, p. 462—468.
— Algebraische Bez. zw. Fund.-Integralen etc. Sb. 1887, p. 423—431.
— Irreducibilität der algebr. part. Diff.-Gl.-Syst. Sb. 1891, p. 275—279.
Lindemann, F. Conforme Abbild. d. Halbebene auf ein einf. zusammenh., von algebr. Curve begrenztes Flächenst. Sb. 1894, p. 403—422.
— Die Abbildung der Halbebene auf ein Polygon, das von Bögen confocaler Kegelschnitte begrenzt wird. Sb. 1895. p. 219—237.
— Lineare Transf. einer quadrat. Mannigf. in sich. Sb. 1896, p. 31—66.
* — Analyt. Forts. derj. Funktionen, welche das Innere eines Kegelschn. conform auf die Halbebene abbilden. Sb. 1896, p. 401—424.
— Zur Gesch. d. Polyeder u. Zahlzeichen. Sb. 1896, p. 625—756.
— Gedächtnissrede auf Phil. Ludw. von Seidel. März 1897 ℳ 3.—
— Umkehrprobleme aus d. Theorie der ellipt. Integrale. Sb. 1898, p. 37—54.
* — Drehung eines Körpers um d. Schwerpunkt. Sb. 1898, p. 181—202.
* — Prähistorische Gewichte. I. Sb. 1899, p. 71—136
* — Zur Theorie der automorphen Funktionen I. Sb. 1899, p. 423—454. II. Desgl. p. 493—510.
— Fermat's her Satz betr. d. Gl. $x^n = y^n + z^n$. Sb. 1901, p. 185—202 und p. 495 ℳ —.40
— Zur Theorie der Spectrallinien. I. Sb. 1901, p. 451—491 ℳ —.80 II. Sb. 1903, p. 27—100 ℳ 1.—
— Das Pascal'sche Sechseck. Sb. 1902, p. 153—161 ℳ —.20
— Das d'Alembert'sche Prinzip. Sb. 1904, p. 77—101 ℳ —.60
Lüroth, J. Kanon. Perioden d. Abel'schen Integrale. I. A. 152, 1885 ℳ 1.20. II. A. 161, 1887 ℳ 1.30
— Bestimmung einer Fläche durch geod. Messungen. Sb. 1892, p. 27—52.
Nöther, M. Berührungscurven der C_4. A. 171, 1889, p. 103—150 ℳ 1.50
— Die sieben Systeme von Kegelschnitten durch die Berührpunkte der Doppeltangenten einer ebenen C_4. Sb. 1895, p. 93—100.
Pringsheim, A. Zur Theorie d. Taylor'schen Reihe. Sb. 1892, p. 211—245.
— Ueber den Cauchy'schen Integralsatz. Sb. 1895, p. 39—72.
— Entwickelung eind. analyt. Funkt. in Potenzreihen. Sb. 1895 p. 75—92.
— Zum Cauchy'schen Integralsatz. Sb. 1895, p. 295—304.
— Potenzreihen a. Conv.-Kr. u. Fourier'sche Reihen. Sb. 1895, p. 337—364.
— Zur Theorie der synektischen Funktionen. Sb. 1896, p. 167—182.
— Sog. Grenze u. Grenzgebiete zw. Conv. u. Div. Sb. 1896, p. 605—624.
— Elementare Theorie d. unendl. Doppelreihen. Sb. 1897, p. 101—152.
— Du Bois-Reymond'sche Conv.-Grenze etc. Sb. 1897, p. 303—344 und 356—358.

Pringsheim, A. Zwei Abel'sche Sätze, betr. Reihen-Stetigkeit. Sb. 1897, p. 343—356.
— Zur Theorie des Doppelintegrals. Sb. 1898, p. 59—74.
— Convergenz unendlicher Kettenbrüche. Sb. 1898, p. 295—324.
— Die ersten Beweise d. Irrationalität von e u. π. Sb. 1898, p. 325—337.
— Zur Theorie des Doppelintegrals, des Green'schen und Cauchy'schen Integralsatzes. Sb. 1899, p. 39—62 und 268—271.
— Convergenzkrit. f. Kettenbr. mit pos. Gliedern. Sb. 1899, p. 261—268.
— Potenzreihen auf d. Conv.-Kreise. Sb. 1900, p. 37—100 ℳ 1.20
— Zweiter Mittelw.-Satz f. Summen u. Integrale. Sb. 1900, p. 209—233. ℳ —.40
— Conv. periodischer Kettenbrüche. Sb. 1900, p. 463—488 ℳ —.40
— Fund.-Satz f. period. Funktionen. Sb. 1900, p. 541—552 ℳ —.20
— Divergenz gewisser Potenzreihen an der Convergenz-Grenze. Sb. 1901, p. 505—524 ℳ —.40
— Zur Theorie der ganzen transzendenten Funktionen. Sb. 1902, p. 163—192 u. 295—304 ℳ —.40
— Ganze transz. Funkt. v. endl. Range. Sb. 1903, p. 101—130 ℳ —.40
— Cauchy-Goursat'scher Integralsatz f. reelle Curven-Integrale. Sb. 1903. p. 673—682 ℳ —.40
— Ueber Wert und angeblichen Unwert der Mathematik. Festrede. März 1904 ℳ 1.20
— Ueber einige Konvergenz-Kriterien für Kettenbrüche mit komplexen Gliedern. 1905, 3 ℳ —.40
— Ueber das Additions-Theorem der elliptischen Funktionen. 1906, 2 ℳ —.20
— Ueber Konvergenz- und Divergenz-Kriterien für zwei- und mehrfach unendliche Reihen mit positiven Gliedern. 1908, 1 ℳ —.20

Seeliger, H. v. Interpolat. Darst. einer Function durch eine nach Kugelfunctionen fortschr. Reihe. Sb. 1890, p. 499—511.
* — Verteilung d. nach Ausgleichung übrigbl. Fehler. Sb. 1899, p. 3—21.

Voss, A. Ueber die projective Centrafläche einer algebraischen Fläche n^{ter} Ordnung. A. 16, 1887, p. 245—324 ℳ 2.40
— Ueber einen Satz aus der Theorie der Formen. Sb. 1888, p. 15—19.
— Ueber diejenigen Flächen, auf denen zwei Schaaren geodätischer Linien ein conjugirtes System bilden. Sb. 1888, p. 90—102.
— Conjug. Transf. einer bilin. Form in sich selbst. Sb. 1889, p. 175—211.
— Mit bilin. Form vertauschb. bilin. Formen. Sb. 1889, p. 283—300.
— Satz aus der Theorie der Determinanten. Sb. 1889, p. 329—339.
— Cogred. Transf. bilin. Formen in sich. A. 17, 1890, p. 237—356 ℳ 3.60
— Die Fundamentalgl. der Flächentheorie. Sb. 1892, p. 247—278.
— Cogred. Transf. der bilin. Formen in sich. Sb. 1896, p. 1—23.
— Cogred. u. adjung. Transf. einer bilin. Form. Sb. 1896, p. 211—272.
— Symmetr. u. altern Lösungen der Gl. $SX=XS'$. Sb. 1896, p. 273—281.
— Infinites. Biegungsdeform. einer Fläche. Sb. 1897, p. 229—301.
— Energet. Grundgesetz d. Mechanik. Sb. 1901, pag. 53—62 ℳ —.20
— Prinzipien d. Mechanik. Sb. 1901, p. 167—182 ℳ —.40
— Unendl. kl. Deform. einer Fläche. Sb. 1904, p. 141—199 ℳ 1.—
— Ueber diejenigen Flächen, welche durch zwei Scharen von Kurven konstanter geodätischer Krümmung in infinitesimale Rhomben zerlegt werden. 1906, 2 ℳ —.80
— Ueber die Krümmung und konforme Transformation. 1907, 1 ℳ —.60

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

*Gümbel, Karl Wilhelm. Geognostische Mitteilungen aus den Alpen. I. Mendel- und Schlerngebirge. 1873 S. 14.
— Desgl. II. Ein Profil aus dem Kaisergebirge. 1874 S. 177.
* — Ueber Conodictyum bursiforme. 1873 S. 282.
* — Ueber die Beschaffenheit der Steinmeteoriten von Jowa. 1875 S. 313
— Beiträge zur Kenntnis der Organisation und systematischen Stellung von Receptaculites. XII, 1 1875.
* — Geognostische Mitteilungen aus der Umgegend v. Trient. 1876 S. 51.
— Die geognostische Durchforschung Bayerns. Rede. 1877 2 ℳ 30 ₰
— Die in Bayern gefallenen Steinmeteorite. 1878 S. 14.
* — Die am Grunde d. Meeres vorkomm. Manganknollen. 1878 S. 189.
* — Geognostische Mitteilungen aus den Alpen. V. Die Pflanzenreste-führenden Schichten von Recoaro. 1879 S. 33.
* — Das Eruptionsmaterial des Schlammvulkans v. Paterno. 1879 S. 217.
* — Geognostische Mitteilungen aus den Alpen. VI. Ein Streifzug durch die Bergamasker Alpen. 1880 S. 164.
* — Desgl. VII. Das Gebirge am Comersee und über Gebirgsfaltung. 1880 S. 542.
* — Ueber die mit einer Flüssigkeit gefüllten Chalzedon-Mandeln (Enhydros) aus Uruguay. 1880 S. 241.
* — Beiträge zur Geologie der Goldküste in Afrika. 1882 S. 170.
* — Geologische Fragmente aus der Umgegend von Ems. 1882 S. 197.
* — Die miocänen Ablagerungen im oberen Donaugebiete und die Stellung des Schliers von Ottnang. 1887 S. 221.
* — Das Erdbeben vom 27. Februar 1889 S. 79.
* — Geolog. Bemerkungen über die Thermen von Gastein. 1889 S. 341.
* — Geolog. Bemerkungen über die Thermen von Bormio und über das Ortlergebirge. 1891 S. 79.
* — Geologische Bemerkungen über die warmen Quellen vom Brennerbad. 1892 S. 139.
* — Die Amberger Eisenerzformation. 1893 S. 293.
* — Ueber die Grünerde am Monte Baldo. 1896 S. 545.

Günther, S. Akustisch-geographische Probleme I. 1901, 1 40 ₰
— Akustisch-geographische Probleme II. 1901, 3 1 ℳ
— Ueber gewisse hydrologisch-topographische Grundbegriffe. 1902, 1 40 ₰
— Glaziale Denudationsgebilde im mittleren Eisacktale. 1902, 3 40 ₰
— und Reindl, J. Seismologische Untersuchungen. 1903, 4 60 ₰
— Das Pothenotsche Problem auf der Kugelfläche. 1904, 2 20 ₰
— Erdpyramiden und Büsserschnee als gleichartige Erosionsgebilde. 1904, 3 60 ₰
— Neue Beiträge zur Theorie der Erosionsfiguren. 1905, 3 40 ₰
— Ein Naturmodell der Dünenbildung. 1907, 2 20 ₰
— und Dannbeck, S. Die Vorgeschichte des barischen Windgesetzes. 1905, 3 60 ₰

Haushofer, K. Franz von Kobell. Denkschrift. 1884 80 ₰

Liebig, Justus Frhr. v. Rede am 28. März 1863 (Francis Bacon von Verulam) 1 ℳ 60 ₰
— Rede am 28. März 1865 (Induction und Deduction) 50 ₰
— Rede am 25. Juli 1866 (Entwicklung der Ideen in der Naturwissenschaft). 8⁰. 50 ₰

Pfaff, F. Bewegung des Firnes und der Gletscher. XII, 2 1876 60 ₰

Pohlig, Hans. Eine Elephantenhöhle Siciliens. XVIII, 1. 1893 2 ℳ 80 ₰

Rauff, Herm. Untersuchungen üb. d. Receptaculitiden. XVII, 3 1892 5 ℳ

Roth, J. u. Wagner, A. Fossile Knochenüberreste von Pikermi. VII, 2 1854 3 ℳ

Rothpletz, A. Ueber eigentümliche Deformationen jurassischer Ammoniten. 1900, 1 60 ₰

— Ueber die Jodquellen bei Tölz. 1901, 1 60 ₰

— Ueber den Ursprung der Thermalquellen von St. Moriz. 1902, 2 40 ₰

— Ueber die Möglichkeit, den Gegensatz zwischen Kontraktions- und Expansionstheorie aufzuheben. 1902, 3 40 ₰

— Die fossilen, oberoligocänen Wellenfurchen des Peissenberges etc. 1904, 3 40 ₰

— Gedächtnisrede auf Karl Alfred von Zittel am 15. Marz 1905 60 ₰

Schlagintweit, Herm. v. Salzseen im westl. Tibet. Thl. I. XI, 1. 1871 2 ℳ

Sendtner, O. Vegetationsverhältnisse Südbayerns. 1854 8⁰ 15 ℳ

Voit, E. Vergleichung von Bergkrystall-Gewichten. 1880 3 ℳ

Wagner, Andr. Spezif. Differenzen der Hyaena brunnea von der Hyaena striata. III, 3 1842 50 ₰

— Geograph. Verbreitung der Säugethiere. 1, 2 u. 3. IV, 1, 2 u. 3 1844, 45 u. 46. I. à 3 ℳ 80 ₰, II. à 2 ℳ, III. à 4 ℳ

— Säugethiere Amerikas. 1, 2 u. 3. V, 1 u. 2 1847 u. 48. I. II. III. jedes à 2 ℳ

— Urweltliche Säugethier-Ueberreste aus Griechenland. V, 2 1848 2 ℳ 60 ₰

— Foss. Ueberreste gavialart. Saurier. V, 3 1849 3 ℳ 40 ₰

— Urweltliche Fische in d. lithogr. Schiefern. VI, 1 1850 2 ℳ 40 ₰

— Neue Art von Ornithocephalus. VI, 1 1850 1 ℳ 60 ₰

— Urweltliche Säugethiere in den Höhlen von Muggendorf. VI, 1 1850 1 ℳ 50 ₰

— Ichthyosaurus im süddeutschen Lias. VI, 2 1851 1 ℳ 40 ₰

— Neu aufgefundene Saurier-Ueberreste a. d. lithograph. Schiefern. VI, 3 1852 2 ℳ 40 ₰

— Beschreib. einer fossilen Schildkröte v. Kelheim. VII, 1 1853 90 ₰

— Fossile Säugethier-Ueberreste v. Pikermi. VIII, 1 1857 3 ℳ 70 ₰

— Urweltliche Fauna des lithogr. Schiefers. 1 u. 2. VIII, 2 u. IX, 1 1858 u. 61 I. à 2 ℳ 80 ₰, II. à 2 ℳ 20 ₰

— Fossile Ueberreste von nackten Dintenfischen. VIII, 3 1860 2 ℳ

— Monographie der fossilen Fische a. d. lithogr. Schiefern. 1 u. 2 IX, 2 u. 3 1861 u. 63 I. à 2 ℳ 70 ₰, II. à 3 ℳ 60 ₰

Weinschenk, Ernst. Beiträge zur Petrographie der östl. Zentralalpen. XVIII, 3 1894 I. Abhdlg. 3 ℳ, II. Abhdlg. 1 ℳ 50 ₰
XXII, 2 1903 III. Abhdlg. 3 ℳ

— Zur Kenntnis der Graphitlagerstätten. XIX, 2 1897 3 ℳ

Zittel, Karl Alfr. Denkschrift auf Christ. Erich Herm. v. Meyer. 1870 1 ℳ 40 ₰

— Ueber Coeloptychium. XII, 3 1876 3 ℳ 70 ₰

— Studien über fossile Spongien. 1, 2 u. 3. XIII, 1 u. 2 1877 u. 78. I. à 1 ℳ 80 ₰, II. à 5 ℳ, III. à 2 ℳ

— Geolog. Bau der libyschen Wüste. Rede. 1880 2 ℳ 40 ₰

— Rückblick auf die Gründung u. die Entwicklung der k. b. Akademie der Wissenschaften im XIX. Jahrh. Rede. 1899 80 ₰

* — Die Räuberhöhle im Schelmengraben. 1872 S. 28.

* — Ueber Gletschererscheinungen in der bayer. Hochebene. 1874 S. 252.

* — Ueber Plicatocrinus. 1881 S. 105.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Oertel, K. Neue Beobachtung und Ausmessung des Sternhaufens 38 h Persei. Ann. II. 1891. M. 5.—.

Oppolzer, Theodor v. Berechnung der wahren Anomalie in nahezu parabolischen Bahnen. Abh. XIII, 3. 1879. M. 1.—.

Schwarzschild, K. Die Poincaré'sche Theorie der Gleichgewichtsfiguren. Ann. III. 1897. M. 5.—.

* — Ueber die Beugungsfigur im Fernrohr weit ausserhalb des Focus. Sitzb. 1898. S. 271—294.

*Seeliger, H. v. Ueber die Gestalt des Planeten Uranus. Sitzb. 1884 S. 267—279. (Vergriffen.)

* — Die Verteilung der Sterne auf der nördlichen Halbkugel nach der Bonner Durchmusterung. Sitzb. 1884. S. 521—548. (Vergriffen.)

* — Ueber die Verteilung der Sterne auf der südlichen Halbkugel nach Schönfelds Durchmusterung. Sitzb. 1886. S. 220-251.

— Ueber den Einfluss dioptrischer Fehler des Auges auf das Resultat astronomischer Messungen. Abh. XV, 3. 1886. M. 1.20.

— Zur Theorie der Beleuchtung der grossen Planeten, insbesonders des Saturn. Abh. XVI, 2. 1887. M. 3.40.

* — Zur Photometrie zerstreut reflectierender Substanzen. Sitzb. 1888. S. 201—248.

— Vertheilung der in beiden Bonner Durchmusterungen enthaltenen Sterne am Himmel. Ann. II. 1888. M. 2.50.

— Fortgesetzte Untersuchungen über das mehrfache Sternsystem ζ Cancri. Abh. XVII, 1. 1888. M. 2.80.

* — Ueber optische Ungleichheiten in der Bewegung der Doppelsterne. Sitzb. 1889. S. 19—32.

* — Ueber die interpolatorische Darstellung einer Function durch eine nach Kugelfunctionen fortlaufende Reihe. Sitzb. 1890. S. 499—511.

— Ueber Zusammenstösse und Theilungen planetarischer Massen. Abh. XVII, 2. 1891. M. 1.20.

* — Notiz über die Strahlenbrechung in der Atmosphäre. Sitzb. 1891. S. 239—246.

* — Ueber die Extinction des Lichtes in der Atmosphäre. Sitzb. 1891. S. 247—272.

— Ueber allgemeine Probleme der Mechanik des Himmels. Festrede. 1892. M. —.90.

— Theorie der Beleuchtung staubförmiger kosmischer Massen, insbesondere des Saturnringes. Abh. XVIII, 1. 1893. M. 2.20.

* — Maxwell's und Hirn's Untersuchungen über die Constitution des Saturnringes. Sitzb. 1894. S. 161—188.

* — Ueber den vierfachen Stern ζ Cancri. Sitzb. 1894. S. 257—271.

*Seeliger, H. Ueber das Newton'sche Gravitationsgesetz. Sitzb. 1896. S. 373—400.

— Die Vergrösserung des Erdschattens bei Mondfinsternissen. Abh. XIX, 2. 1896. M. 2.20.

* — Ueber die Grössenklassen der telescopischen Sterne der Bonner Durchmusterung. Sitzb. 1898. S. 147—180.

— Betrachtungen über die räumliche Verteilung der Fixsterne. Abh. XIX, 3. 1898. M. 2.60.

* — Ueber die Verteilung der nach einer Ausgleichung übrig bleibenden Fehler. Sitzb. 1899. S. 3—21.

* — Zur Vertheilung der Fixsterne am Himmel. Sitzb. 1899. S. 363—413.

— Ueber kosmische Staubmassen u. das Zodiakallicht. 1901, 3 M. —.50

— Ueber die sogenannte absolute Bewegung. 1906, 1 M. —.80

— Das Zodiakallicht und die empirischen Glieder in der Bewegung der inneren Planeten. 1906, 3 M. —.60

Seeliger u. Bauschinger, J. Erstes Münchener Sternverzeichnis. Ann. I. 1890. M. 30.00.

Seidel, Phil. Ludw. Gegenseitige Helligkeiten der Fixsterne. Abh. IV, 3. 1852. M. 3.80.

— Lichtstärke der Planeten. Mon. saec. II. Cl. 1859. M. 6.—.

— Resultate photometr. Messungen. Abh. IX, 3. 1862. M. 4.10.

Seidel, Ph. L. u. Leonhard, E. Helligkeitsmessungen an Fixsternen 1852—1860. Abh. X, 1. 1867. M. 3.20.

Steinheil, C. A. Elemente der Helligkeitsmessungen am Sternhimmel. Abh. II. 1831—36. M. 4.—.

Villiger, W. Die Rotationszeit des Planeten Venus. Ann. III. 1898 M. 7.—.

Wolf, Max. Ueber die Bestimmung der Lage des Zodiakallichtes und den Gegenschein. Sitzb. 1900. S. 197—207. M. —.40.

— Die Aussennebel der Plejaden. Abh. XX, 3. 1900. M. 1.—.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Finsterwalder, S. Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen. Abh. II. Kl. XXII, 2. 1903 M 1.20

— Der gefährliche Ort beim Rückwärtseinschneiden auf der Kugel. 1905, 1 M —.20

Föppl, A. Absol. u. relat. Bewegung. Sb. 1904, p. 383—395 M —.40

— Kreiselversuch zur Messung zur Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde. 1904, 1 M —.40

— Ueber die Torsion von runden Stäben mit veränderlichem Durchmesser. 1905, 2 M —.40

Günther, S. Pothenot'sches Problem auf d. Kugel. Sb. 1904, p. 115—123 M —.20

Gordan, P. Discriminante einer ternären Form. Sb. 1887, p. 477—478.

*Klein, F. Elliptische Modulfunctionen. Sb. 1880, p. 89—100.

* — Unendl. viele Normalf. des ellipt. Integr. 1. Gtg. Sb. 1880, p. 533—541.

Königsberger, L. Unmöglichkeit der Existenz eines anderen Functionaltheorems als des Abel'schen. Sb. 1885, p. 462—468.

— Algebraische Bez. zw. Fund.-Integralen etc. Sb. 1887, p. 423—431.

— Irreducibilität der algebr. part. Diff.-Gl.-Syst. Sb. 1891, p. 275—279.

Lindemann, F. Conforme Abbild. d. Halbebene auf ein einf. zusammenh., von algebr. Curve begrenztes Flächenst. Sb. 1894, p. 403—422.

— Die Abbildung der Halbebene auf ein Polygon, das von Bögen confocaler Kegelschnitte begrenzt wird. Sb. 1895, p. 219—237.

— Lineare Transf. einer quadrat. Mannigf. in sich. Sb. 1896, p. 31—66.

* — Analyt. Forts. derj. Funktionen, welche das Innere eines Kegelschn. conform auf die Halbebene abbilden. Sb. 1896, p. 401—424.

— *Zur Gesch. d. Polyeder u. Zahlzeichen. Sb. 1896, p. 625—756.

— Gedächtnissrede auf Phil Ludw. von Seidel. März 1897 M 3.—

— Umkehrprobleme aus d. Theorie der ellipt. Integrale. Sb. 1898, p. 37—54.

* — Drehung eines Körpers um d. Schwerpunkt. Sb. 1898, p. 181—202.

* — Prähistorische Gewichte. I. Sb. 1899, p. 71—136.

* — Zur Theorie der automorphen Funktionen. I. Sb. 1899, p. 423—454. II. Desgl. p. 493—510.

— Fermat'scher Satz betr. d. Gl. $x^n = y^n + z^n$. Sb. 1901, p. 185—202 und p. 495 M —.40

— Zur Theorie der Spectrallinien. I. Sb. 1901, p. 451—491 M —.80
II. Sb. 1903, p. 27—100 M 1.—

— Das Pascal'sche Sechseck. Sb. 1902, p. 153—161 M —.20

— Das d'Alembert'sche Prinzip. Sb. 1904, p. 77—101 M —.60

Lüroth, J. Kanon. Perioden d. Abel'schen Integrale. I. A. 152, 1885 M 1.20. II. A. 161, 1887 M 1.30

— Bestimmung einer Fläche durch geod. Messungen. Sb. 1892, p. 27—52.

Nöther, M. Berührungscurven der C_4. A. 171, 1889, p. 103—150 M 1.50

— Die sieben Systeme von Kegelschnitten durch die Berührpunkte der Doppeltangenten einer ebenen C_4. Sb. 1895, p. 93—100.

Pringsheim, A. Zur Theorie d. Taylor'schen Reihe. Sb. 1892, p. 211—245.

— Ueber den Cauchy'schen Integralsatz. Sb. 1895, p. 39—72.

— Entwickelung eind. analyt. Funkt. in Potenzreihen. Sb. 1895, p. 75—92.

— Zum Cauchy'schen Integralsatz. Sb. 1895, p. 295—304.

— Potenzreihen a. Conv.-Kr. u. Fourier'sche Reihen. Sb. 1895, p. 337—364.

— Zur Theorie der synektischen Funktionen. Sb. 1896, p. 167—182.

— Sog. Grenze u. Grenzgebiete zw. Conv. u. Div. Sb. 1896, p. 605—624.

— Elementare Theorie d. unendl. Doppelreihen. Sb. 1897, p. 101—152.

— Du Bois-Reymond'sche Conv.-Grenze etc. Sb. 1897, p. 303—344 und 356—358.

Pringsheim, A. Zwei Abel'sche Sätze, betr. Reihen-Stetigkeit. Sb. 1897, p. 343—356.
— Zur Theorie des Doppelintegrals. Sb. 1898, p. 59—74.
— Convergenz unendlicher Kettenbrüche. Sb. 1898, p 295—324.
— Die ersten Beweise d. Irrationalität von e u. π. Sb. 1898, p. 325—337
— Zur Theorie des Doppelintegrals, des Green'schen und Cauchy'schen Integralsatzes. Sb. 1899, p. 39—62 und 268—271.
— Convergenzkrit. f. Kettenbr. mit pos. Gliedern. Sb. 1899. p. 261—268.
— Potenzreihen auf d. Conv.-Kreise. Sb. 1900, p. 37—100 ℳ 1.20
— Zweiter Mittelw.-Satz f. Summen u. Integrale. Sb. 1900, p. 209—233. ℳ —.40
— Conv. periodischer Kettenbrücke. Sb. 1900, p 463—488 ℳ —.40
— Fund.-Satz f. period. Funktionen. Sb. 1900, p. 541—552 ℳ —.20
— Divergenz gewisser Potenzreihen an der Convergenz-Grenze. Sb. 1901, p. 505—524 ℳ —.40
— Zur Theorie der ganzen transzendenten Funktionen. Sb. 1902. p. 163—192 u. 295—304 ℳ —.40
— Ganze transz. Funkt. v. endl. Range. Sb. 1903. p. 101—130 ℳ —.40
— Cauchy-Goursat'scher Integralsatz f. reelle Curven-Integrale. Sb. 1903. p. 673—682 ℳ —.40
— Ueber Wert und angeblichen Unwert der Mathematik. Festrede. März 1904 ℳ 1.20
— Ueber einige Konvergenz-Kriterien für Kettenbrüche mit komplexen Gliedern. 1905, 3 ℳ —.40
— Ueber das Additions-Theorem der elliptischen Funktionen 1906 2 ℳ —.20
— Ueber Konvergenz- und Divergenz-Kriterien für zwei- und mehrfach unendliche Reihen mit positiven Gliedern. 1908, 1 ℳ —.20

Seeliger, H. v. Interpolat. Darst. einer Function durch eine nach Kugelfunctionen fortschr. Reihe. Sb. 1890, p 499—511.
* — Verteilung d. nach Ausgleichung übrigbl. Fehler. Sb. 1899, p. 3—21.

Voss, A. Ueber die projective Centrafläche einer algebraischen Fläche n^{ter} Ordnung. A. 16, 1887, p. 245—324 ℳ 2.10
— Ueber einen Satz aus der Theorie der Formen. Sb. 1888, p. 15—19.
— Ueber diejenigen Flächen, auf denen zwei Schaaren geodätischer Linien ein conjugirtes System bilden. Sb. 1888. p. 90—102.
— Conjug. Transf. einer bilin. Form in sich selbst. Sb. 1889. p. 175—211.
— Mit bilin. Form vertauschb. bilin. Formen. Sb. 1889, p. 283—300.
— Satz aus der Theorie der Determinanten. Sb. 1889, p. 329—339.
— Cogred. Transf. bilin. Formen in sich. A. 17, 1890, p. 237—356 ℳ 3.60
— Die Fundamentalgl. der Flächentheorie. Sb. 1892, p. 247—278.
— Cogred. Transf. der bilin. Formen in sich. Sb. 1896, p 1—23.
— Cogred. u. adjung. Transf. einer bilin. Form. Sb. 1896. p. 211—272.
— Symmetr. u. altern Lösungen der Gl. $SX=XS'$. Sb. 1896, p. 273—281.
— Infinites. Biegungsdeform. einer Fläche Sb. 1897. p. 229—301.
— Energet. Grundgesetz d. Mechanik. Sb. 1901, pag. 53—62 ℳ —.20
— Prinzipien d. Mechanik. Sb. 1901, p. 167—182 ℳ —.40
— Unendl. kl. Deform. einer Fläche. Sb. 1904. p. 141—199 ℳ 1.—
— Ueber diejenigen Flächen, welche durch zwei Scharen von Kurven konstanter geodätischer Krümmung in infinitesimale Rhomben zerlegt werden. 1906, 2 ℳ —.80
— Ueber die Krümmung und konforme Transformation. 1907, 1 ℳ —.60

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 19. Abhandlung

Über Kurvenpaare im Raume

von

A. Voss

Vorgetragen am 6. Februar 1909

München 1910
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

Bauer, Gustav. Ueber einen Kettenbruch Eulers. A. 11_2, 1872 ℳ —.50
— Pascal's Theorem. A. 11_3, 1874 ℳ 1.—
— Gedächtnissrede auf Otto Hesse. 1882 ℳ —.60
— Von der Hesse'schen Determinante. A. 14_3, 1883 ℳ —.50
* — Von zwei Tetraëdern, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind. Sb. 1897, p. 359—366.

Brill, Al. Zur Theorie der geodät. Linie etc. A. 14_2, 1883 ℳ 1.—
* — Bestimmung der optischen Wellenfläche etc. 1883, 3 p. 423—435.
* — Ueber rationale Curven und Regelflächen, 1885, 2 p. 276—287.
— Multiplicität d. Schnittp. zweier ebener Curven. Sb. 1888, p. 81—94.
— Die reducirte Resultante. A. 17_1, 1889 ℳ —.40.
— Ueber das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle. Sb. 1891, p. 207—220.

Burmester, L. Kinetographische Verwandtschaft ebener Systeme und räumlicher Systeme. 1907, 1 ℳ —.40

Dyck, W. v. Die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Diff.-Gl. 1ter O. definirten Curvensysteme. I. (mit 4 Taf.) Sb. 1891, p. 23—57; II. (mit 3 Taf.) Sb. 1892. p. 101—138.
* — Beiträge zur Potentialtheorie. I. Kronecker'sche Charakteristiken. Sb. 1895, p. 261—277. — II. Umschlingung zweier Mannigf. Desgl. p. 447—500. — III. Nullstellen eines Syst. von Funkt. mehrerer Veränderl. Sb. 1898, p. 203—224.
— Ueber die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und der angewandten Mathematik. Festrede. Nov. 1896 ℳ 1.20
— Rede v. C. G. J. Jacobi. Sb. 1901, p. 203—208 ℳ —.20

Finsterwalder, S. Katoptr. Eigensch. der F_2. Sb. 1887, p. 33—42.
— Ueber die Vertheilung der Biegungselasticität in dreifach symmetrischen Krystallen (mit 1 Taf.). Sb. 1888, p. 257—266.
— Ueber den mittleren Böschungswinkel und das wahre Areal einer topographischen Fläche. Sb. 1890, p. 35—82.
— Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. A. 17, 1891, p. 517—587 ℳ 3.—
— Analogie zwischen Aufg. der Ausgl.-Rechnung und Statik. Sb. 1903, p. 683—689 ℳ —.20
— Neue Anwend. d. Photogrammetrie. Sb. 1904, p. 683—689 ℳ —.40
— u. W. Scheufele. Rückwärts-Einschneiden im Raume. Sb. 1903, p. 591—614 ℳ —.40
— Ueber Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen. 1900, 2 ℳ —.40
— Ueber die innere Struktur der Mittelmoränen. 1900, 3 ℳ —.20

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, Schlußheft

Inhaltsübersicht

Berichte über die Sitzungen mit Inhaltsangaben der Vorträge

Verzeichnis der eingelaufenen Druckschriften

München 1910
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)







Finsterwalder, S. Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen. Abh. II. Kl. XXII, 2. 1903 ℳ 1.20

— Der gefährliche Ort beim Rückwärtseinschneiden auf der Kugel. 1905, 1 ℳ —.20

Föppl, A. Absol. u. relat. Bewegung. Sb. 1904, p. 383—395 ℳ —.40

— Kreiselversuch zur Messung zur Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde. 1904, 1 ℳ —.40

— Ueber die Torsion von runden Stäben mit veränderlichem Durchmesser. 1905, 2 ℳ —.40

Günther, S. Pothenot'sches Problem auf d. Kugel. Sb. 1904, p. 115—123 ℳ —.20

Gordan, P. Discriminante einer ternären Form. Sb. 1887, p. 477—478.

*Klein, F. Elliptische Modulfunctionen. Sb. 1880, p. 89—100.

* — Unendl. viele Normalf. des ellipt. Integr. 1. Gtg. Sb. 1880, p. 533—541.

Königsberger, L. Unmöglichkeit der Existenz eines anderen Functionaltheorems als des Abel'schen. Sb. 1885, p. 462—468.

— Algebraische Bez. zw. Fund.-Integralen etc. Sb. 1887, p. 423—431.

— Irreducibilität der algebr. part. Diff.-Gl.-Syst. Sb. 1891, p. 275—279.

Lindemann, F. Conforme Abbild. d. Halbebene auf ein einf. zusammenh., von algebr. Curve begrenztes Flächenst. Sb. 1894, p. 403—422.

— Die Abbildung der Halbebene auf ein Polygon, das von Bögen confocaler Kegelschnitte begrenzt wird. Sb. 1895, p. 219—237.

— Lineare Transf. einer quadrat. Mannigf. in sich. Sb. 1896, p. 31—66.

* — Analyt. Forts. derj. Funktionen, welche das Innere eines Kegelschn. conform auf die Halbebene abbilden. Sb. 1896, p. 401—424.

— Zur Gesch. d. Polyeder u. Zahlzeichen. Sb. 1896, p. 625—756.

— Gedächtnissrede auf Phil Ludw. von Seidel. März 1897 ℳ 3.—

— Umkehrprobleme aus d. Theorie der ellipt. Integrale. Sb. 1898, p. 37—54.

* — Drehung eines Körpers um d. Schwerpunkt. Sb. 1898, p. 181—202.

* — Prähistorische Gewichte. I. Sb. 1899, p. 71—136.

* — Zur Theorie der automorphen Funktionen. I. Sb. 1899, p. 423—454. II. Desgl. p. 493—510.

— Fermat'scher Satz betr. d. Gl. $x^n = y^n + z^n$. Sb. 1901, p. 185—202 und p. 495 ℳ —.40

— Zur Theorie der Spectrallinien. I. Sb. 1901, p. 451—491 ℳ —.80 II. Sb. 1903, p. 27—100 ℳ 1.—

— Das Pascal'sche Sechseck. Sb. 1902, p. 153—161 ℳ —.20

— Das d'Alembert'sche Prinzip. Sb. 1904, p. 77—101 ℳ —.60

Lüroth, J. Kanon. Perioden d. Abel'schen Integrale. I. A. 152, 1885 ℳ 1.20. II. A. 161, 1887 ℳ 1.30

— Bestimmung einer Fläche durch geod. Messungen. Sb. 1892, p. 27—52.

Nöther, M. Berührungscurven der C_4. A. 171, 1889, p. 103—150 ℳ 1.50

— Die sieben Systeme von Kegelschnitten durch die Berührpunkte der Doppeltangenten einer ebenen C_4. Sb. 1895, p. 93—100.

Pringsheim, A. Zur Theorie d. Taylor'schen Reihe. Sb. 1892, p. 211—245.

— Ueber den Cauchy'schen Integralsatz. Sb. 1895, p. 39—72.

— Entwickelung eind. analyt. Funkt. in Potenzreihen. Sb. 1895, p. 75—92.

— Zum Cauchy'schen Integralsatz. Sb. 1895, p. 295—304.

— Potenzreihen a. Conv.-Kr. u. Fourier'sche Reihen. Sb. 1895, p. 337—364.

— Zur Theorie der synektischen Funktionen. Sb. 1896, p. 167—182.

— Sog. Grenze u. Grenzgebiete zw. Conv. u. Div. Sb. 1896, p. 605—624.

— Elementare Theorie d. unendl. Doppelreihen. Sb. 1897, p. 101—152.

— Du Bois-Reymond'sche Conv.-Grenze etc. Sb. 1897, p. 303—344 und 356—358.

Pringsheim, A. Zwei Abel'sche Sätze, betr. Reihen-Stetigkeit. Sb. 1897, p. 343—356.
— Zur Theorie des Doppelintegrals. Sb. 1898, p. 59—74.
— Convergenz unendlicher Kettenbrüche. Sb. 1898, p. 295—324.
— Die ersten Beweise d. Irrationalität von e u. π. Sb. 1898, p. 325—337.
— Zur Theorie des Doppelintegrals, des Green'schen und Cauchy'schen Integralsatzes. Sb. 1899, p. 39—62 und 268—271.
— Convergenzkrit. f. Kettenbr. mit pos. Gliedern. Sb. 1899, p. 261—268.
— Potenzreihen auf d. Conv.-Kreise. Sb. 1900, p. 37—100 M 1.20
— Zweiter Mittelw.-Satz f. Summen u. Integrale. Sb. 1900, p. 209—233. M —.40
— Conv. periodischer Kettenbrüche. Sb. 1900, p. 463—488 M —.40
— Fund.-Satz f. period. Funktionen. Sb. 1900, p. 541—552 M —.20
— Divergenz gewisser Potenzreihen an der Convergenz-Grenze. Sb. 1901, p. 505—524 M —.40
— Zur Theorie der ganzen transzendenten Funktionen. Sb. 1902, p. 163—192 u. 295—304 M —.40
— Ganze transz. Funkt. v. endl. Range. Sb. 1903, p. 101—130 M —.40
— Cauchy-Goursat'scher Integralsatz f. reelle Curven-Integrale. Sb. 1903. p. 673—682 M —.40
— Ueber Wert und angeblichen Unwert der Mathematik. Festrede. März 1904 M 1.20
— Ueber einige Konvergenz-Kriterien für Kettenbrüche mit komplexen Gliedern. 1905, 3 M —.40
— Ueber das Additions-Theorem der elliptischen Funktionen. 1906, 2 M —.20
— Ueber Konvergenz- und Divergenz-Kriterien für zwei- und mehrfach unendliche Reihen mit positiven Gliedern. 1908, 1 M —.20

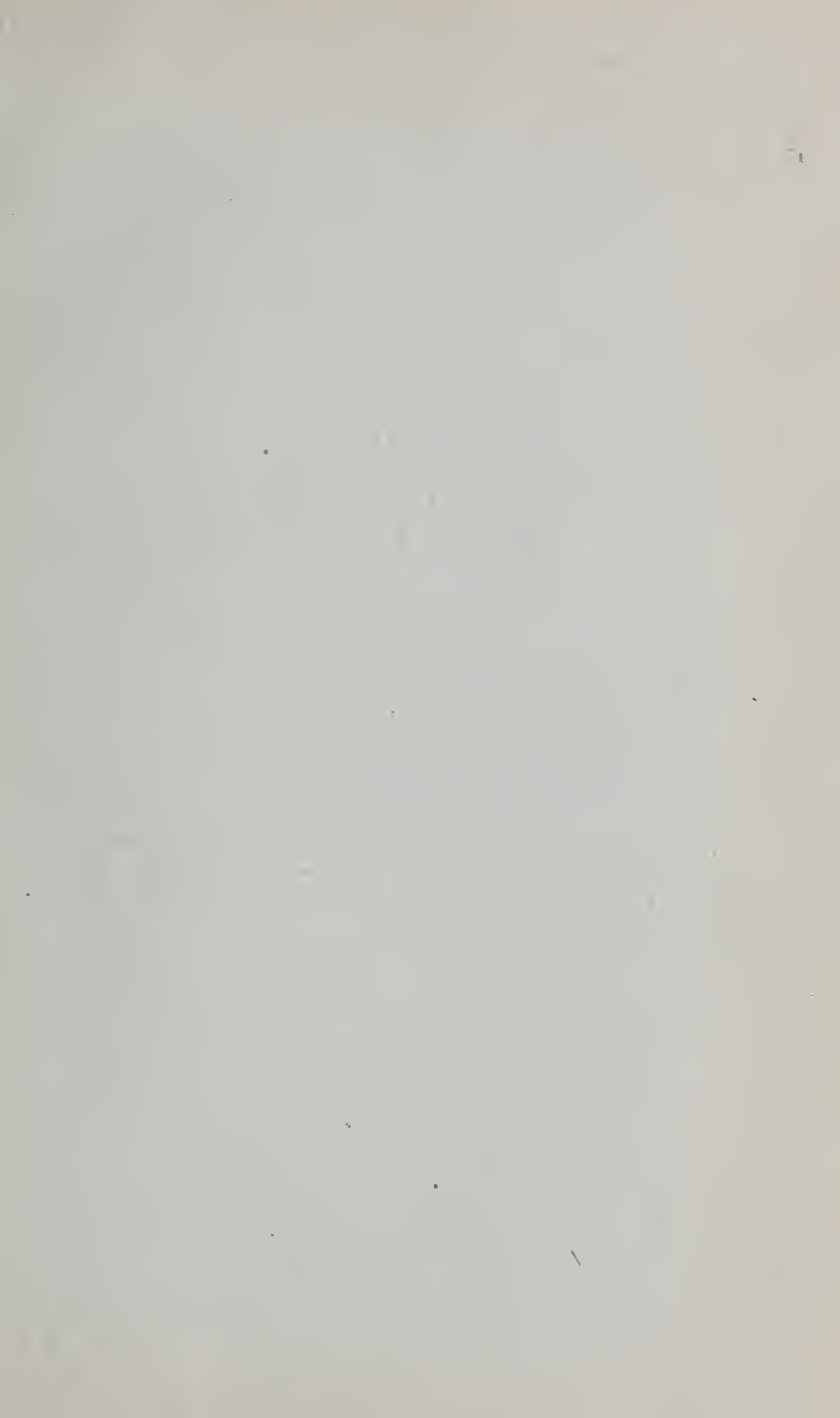
Seeliger, H. v. Interpolat. Darst. einer Function durch eine nach Kugelfunctionen fortschr. Reihe. Sb. 1890, p. 499—511.
* — Verteilung d. nach Ausgleichung übrigbl. Fehler. Sb. 1899, p. 3—21.

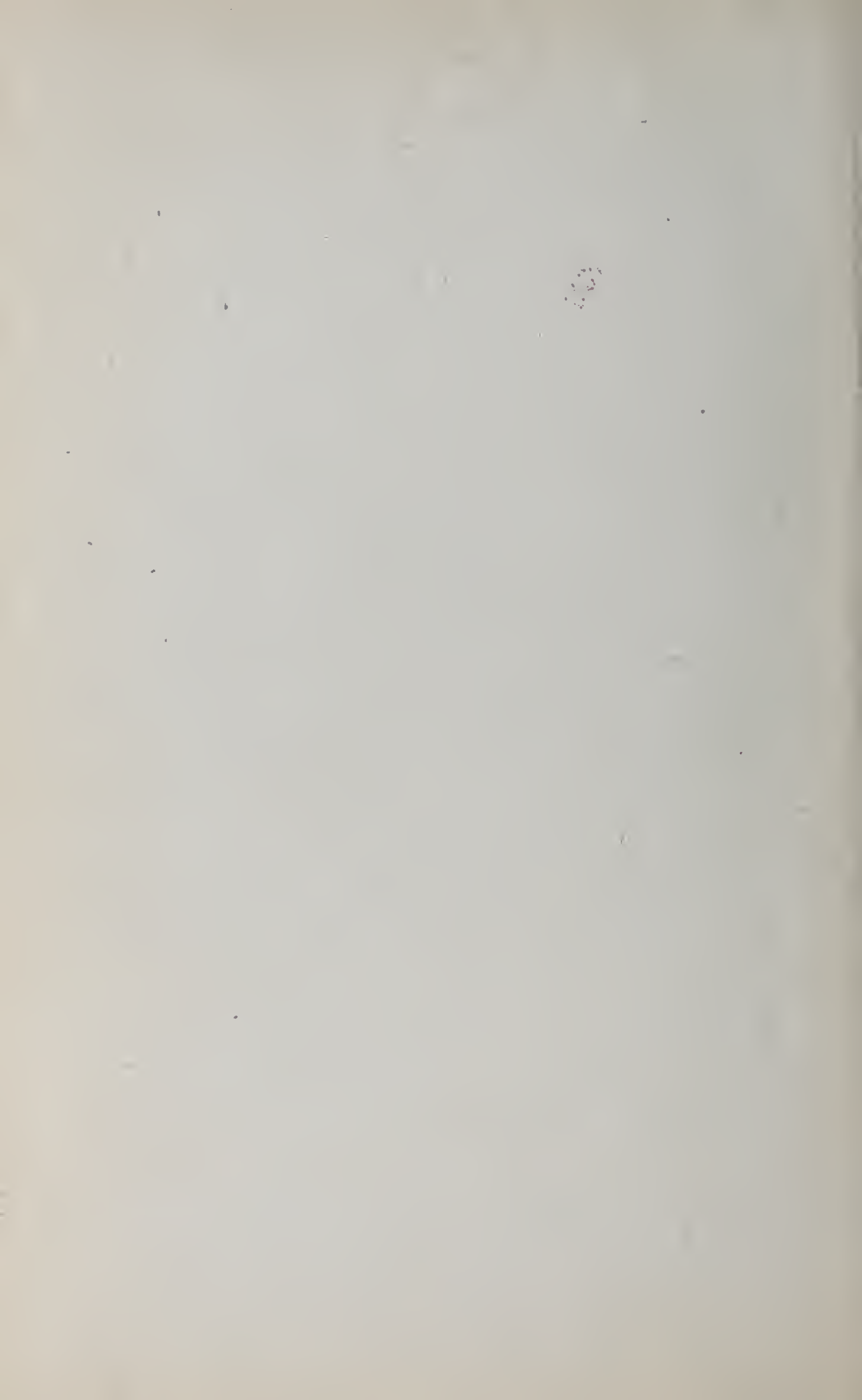
Voss, A. Ueber die projective Centrafläche einer algebraischen Fläche n^{ter} Ordnung. A. 16, 1887, p. 245—324 M 2.40
— Ueber einen Satz aus der Theorie der Formen. Sb. 1888, p. 15—19.
— Ueber diejenigen Flächen, auf denen zwei Schaaren geodätischer Linien ein conjugirtes System bilden. Sb. 1888, p. 90—102.
— Conjug. Transf. einer bilin. Form in sich selbst. Sb. 1889, p. 175—211.
— Mit bilin. Form vertauschb. bilin. Formen. Sb. 1889, p. 283—300.
— Satz aus der Theorie der Determinanten. Sb. 1889, p. 329—339.
— Cogred. Transf. bilin. Formen in sich. A. 17, 1890, p. 237—356 M 3.60
— Die Fundamentalgl. der Flächentheorie. Sb. 1892, p. 247—278.
— Cogred. Transf. der bilin. Formen in sich. Sb. 1896, p. 1—23.
— Cogred. u. adjung. Transf. einer bilin. Form. Sb. 1896, p. 211—272.
— Symmetr. u. altern Lösungen der Gl. $SX = XS'$. Sb. 1896, p. 273—281.
— Infinites. Biegungsdeform. einer Fläche. Sb. 1897, p. 229—301.
— Energet. Grundgesetz d. Mechanik. Sb. 1901, pag. 53—62 M —.20
— Prinzipien d. Mechanik. Sb. 1901, p. 167—182 M —.40
— Unendl. kl. Deform. einer Fläche. Sb. 1904, p. 141—199 M 1.—
— Ueber diejenigen Flächen, welche durch zwei Scharen von Kurven konstanter geodätischer Krümmung in infinitesimale Rhomben zerlegt werden. 1906, 2 M —.80
— Ueber die Krümmung und konforme Transformation. 1907, 1 M —.60

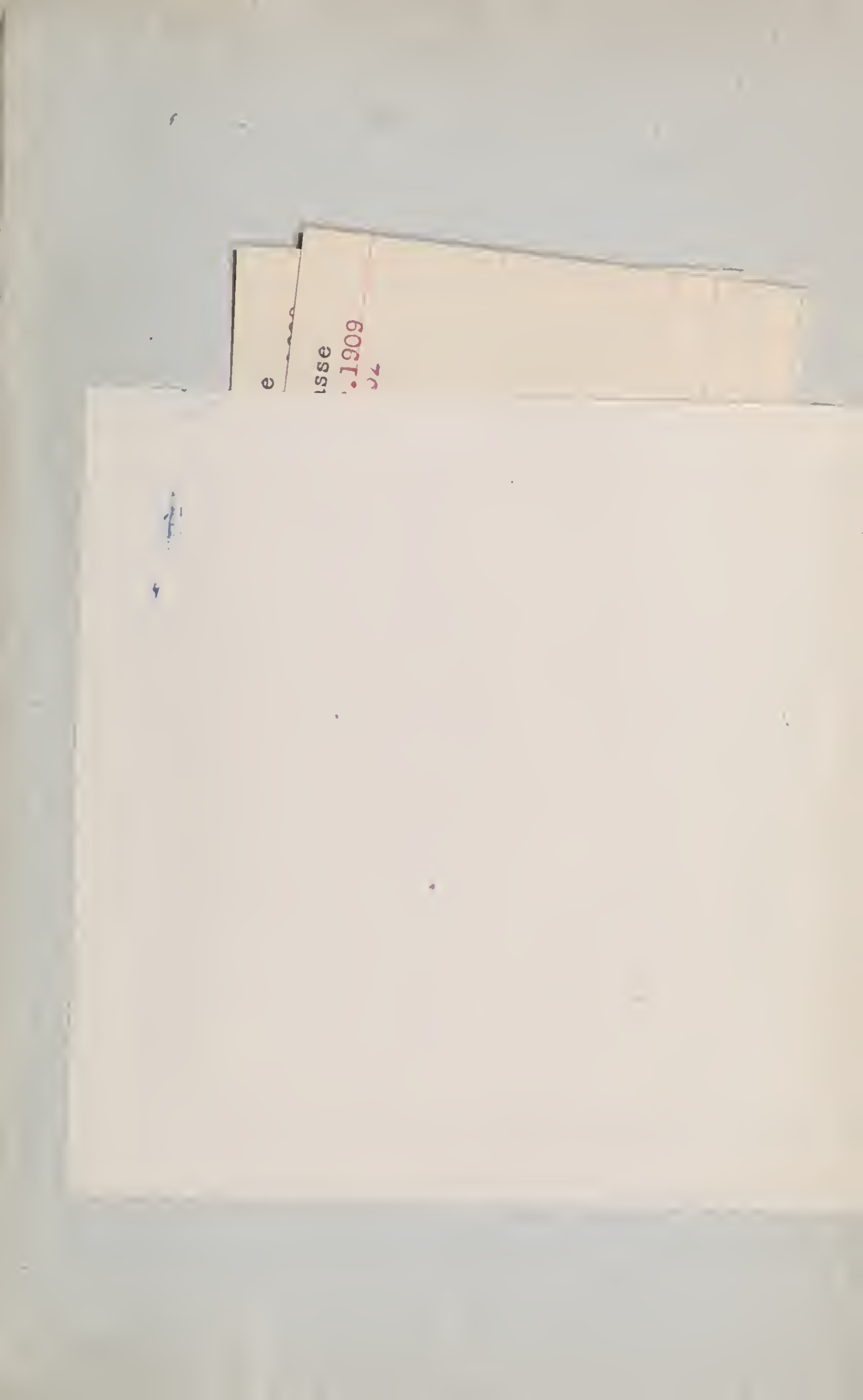
Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.












AMNH LIBRARY
100229652